Серия «Математика»
2026. Т. 56. С. 19—32

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49J15, 49M37, 90C26
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.19

Методика нелокального поиска в задаче оптимального управления, основанная на свойстве скрытой выпуклости

Т. С. Зароднюк[1✉]

[1] Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация
✉ tz@icc.ru

Аннотация: Разработана методика нелокального поиска экстремума в нелинейных задачах оптимального управления, опирающаяся на использование свойства скрытой выпуклости множества допустимых скоростей управляемых динамических систем. Формируются расширенные задачи оптимального управления, которые в некоторых случаях могут характеризоваться выпуклыми множествами достижимости. Предложено пять вариантов методики овыпукления исходной задачи оптимального управления в зависимости от способа учета ограничений на вспомогательные управляющие воздействия.
Представлены результаты вычислительных экспериментов на тестовой коллекции нелинейных задач оптимального управления с геометрическими ограничениями. Сформулированы выводы, основанные на полученном экспериментальном опыте и использовании критерия корректности по расширению. Предложенный подход позволяет реализовать овыпукление множества скоростей и расширить область применимости численных методов оптимизации при исследовании невыпуклых задач оптимального управления.

Ключевые слова: нелинейная задача оптимального управления, свойство скрытой выпуклости, расширение по Гамкрелидзе, множество допустимых скоростей

Благодарности: Работа выполнена за счет государственного задания в рамках темы «Эволюционные и динамические управляемые системы: теория, численные методы, приложения» (шифр научной темы FWEW-2026-0011, № гос. регистрации 126021217177-7).

Ссылка для цитирования: Зароднюк Т. С. Методика нелокального поиска в задаче оптимального управления, основанная на свойстве скрытой выпуклости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 19–32.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.19

Research article

A Technique of Nonlocal Search in Optimal Control Problems Based on the Hidden Convexity Property

Tatiana S. Zarodnyuk[1]✉

[1] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

✉ tz@icc.ru

Abstract: A non-local search method for extremum in nonlinear optimal control problems is developed, based on the use of the property of hidden convexity of the set of admissible velocities of controlled dynamic systems. Extended optimal control problems are formed, which in some cases can be characterized by convex reachable sets. Five variants of the convexification method of the initial optimal control problem are proposed, depending on the way of accounting for the constraints on auxiliary controls.
The results of computational experiments on a test collection of nonlinear optimal control problems with geometric constraints are presented. Conclusions are formulated based on the obtained experimental experience and the use of the expansion correctness criterion. The proposed approach allows for the convexification of the velocity set and expands the applicability of numerical optimization methods in the study of non-convex optimal control problems.

Keywords: nonlinear optimal control problem, hidden convexity property, Gamkrelidze extension, admissible velocities set

Acknowledgements: The research was carried out at the expense of the state assignment within the framework of the topic "Evolutionary and Dynamic Controlled Systems: Theory, Numerical Methods, and Applications" (scientific code FWEW-2026-0011, No. registration 126021217177-7).

For citation: Zarodnyuk T. S. A Technology of Nonlocal Search in Optimal Control Problems Based on the Hidden Convexity Property. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 56, pp. 19–32. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.19

1. Введение

Активное развитие теории оптимального управления и рост интереса к исследованию управляемых динамических систем принято относить к середине прошлого века и связывать с появлением принципа максимума Л. С. Понтрягина (ПМП, см., например, [1;10;15]). Необходимость решать сложные прикладные задачи оптимизации управляемых динамических систем из различных научно-технических областей (космонавигации, мобильной робототехники, синтеза композитных конструкций, технической экологии, сейсмологии, химии, биологии, медицины и др.) стимулировало развитие как теории исследования управляемых динамических систем, так и области создания численных методов и алгоритмов их решения. Подходы, основанные на ПМП, характеризуются наличием строгой доказательной теории и применяются для исследования задач и более широких классов (например, для исследования неавтономных систем в линейно-квадратичных задачах, систем с запаздываниями и в фазовых координатах, и в управлениях и др.). Дальнейшее развитие области исследования управляемых динамических систем принято связывать с появлением идей динамического программирования [3], достаточных условий оптимальности [9; 21], позиционного принципа минимума [11] и др.

Разработка методов и вычислительных технологий решения нелинейных задач оптимального управления продолжает быть востребованным направлением. Однако в большом обзоре зарубежных публикаций по глобальной оптимизации [19] не содержится ссылок на работы по исследованию невыпуклых задач оптимального управления (ЗОУ), в основном отражены работы по параметрической идентификации динамических систем. Известно довольно много публикаций, посвященных построению алгоритмов поиска глобального экстремума функционалов, основанных на генетических методах, но для исследования динамических систем они показали меньшую эффективность, чем при решении задач конечномерной оптимизации, для исследования которых в невыпуклом случае по прежнему остаются популярными подходы, основанные на схеме случайного мультистарта (многократные локальные спуски из последовательности сгенерированных стартовых точек [12; 22; 23]).

Для эффективного исследования управляемых динамических систем необходимо учитывать особенности задач данного класса. В силу специфики дифференциальных связей управляемые динамические системы характеризуются свойством скрытой выпуклости множества допустимых скоростей. Данное свойство может быть использовано для построения расширенных задач оптимального управления, основанного на применении процедуры формирования выпуклой оболочки правых частей дифференциальных уравнений [5]. В данной работе предлагается подход к решению нелинейных задач оптимального управления, основанный на методике овыпукления множества допустимых скоростей соответствующей динамической системы.

2. Постановка задачи оптимального управления с геометрическими ограничениями

Управляемые динамические процессы из научно-технических и промышленных областей могут быть представлены в виде

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2.1}$$

где функция $f(x(t), u(t), t)$ непрерывно дифференцируема по x, $f : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ для $\forall t$ и удовлетворяет условию $\exists \beta > 0 : |f(x(t), u(t), t)| \leq \beta(1 + |x(t)|)$, управляющие воздействия $u = u(\cdot)$ принадлежат следующему геометрическому (параллелепипедному) множеству:

$$u \in U = \{u \in \mathbb{R}^m : \underline{u}_j \leq u_j \leq \overline{u}_j, j = \overline{1, m}\}; \tag{2.2}$$

здесь $\underline{u}_j$, $\overline{u}_j$, $j = \overline{1, m}$ – нижняя и верхняя границы множества значений управляющих функций. Под допустимыми понимаются кусочно-непрерывные управляющие воздействия $u = u(\cdot)$, для любых значений времени t, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2.2), а соответствующая ЗОУ заключается в нахождении допустимого управления u^* из множества U, доставляющего минимум целевому функционалу (в общем случае невыпуклому), зависящему от траектории системы (2.1) в конечный момент времени t_1:

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min . \tag{2.3}$$

Допустимым процессом в задаче (2.1)–(2.3) будем называть пару (x, y), где $u = u(\cdot)$ является допустимым управлением, а соответствующая этому управлению траектория системы $x = x(\cdot)$ – решением задачи Коши (2.1). Допустимый процесс $(\tilde{x}, \tilde{u})$ будет являться решением исходной нелинейной задачи (2.1)–(2.3), если $\varphi(\tilde{x}(t_1)) \leq \varphi(x(t_1))$ для всех допустимых процессов (x, u).

Невыпуклые функционалы интегрального и смешанного типа могут сводиться к виду (2.3) путем стандартного приема введения дополнительных фазовых переменных. Таким образом, предложенная в работе методика оптимизации управляемых динамических систем может применяться и для задач более широких классов, сводимых путем использования стандартных редукций к эталонной постановке.

Подобные задачи оптимального управления, описываемые нелинейными дифференциальными системами, как правило, характеризуются невыпуклыми множествами достижимости. Задача аппроксимации множества достижимости (МД) управляемой динамической системы заключается в нахождении приближения к множеству $R_{x_0,t_0} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, где $R_{x_0,t_0} = \{(x(t_1), t_1) : x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$, при этом траектория $x(t)$ начинается в $(x(t_0), t_0)$. С ростом времени функционирования нелинейной динамической системы структура соответствующего множества достижимости существенно усложняется. На небольших интервалах МД может быть выпуклым (даже для нелинейных систем дифференциальных уравнений), с увеличением t_1 проявляется невыпуклость, которая становится все более явной на возрастающих временных интервалах. При этом управляемые динамические системы характеризуются свойством линейной связности МД, которое также может быть использовано при построении алгоритмов решения нелинейных ЗОУ [8].

Исходная ЗОУ может быть сведена к альтернативной постановке – поиску минимума невыпуклого функционала на множестве достижимости, однако соответствующая задача оптимизации является не менее сложной. На рис. 1 приведен пример, иллюстрирующий усложнение структуры МД с ростром интервала времени функционирования системы для модификации задачи оптимального управления колебаниями математического маятника.

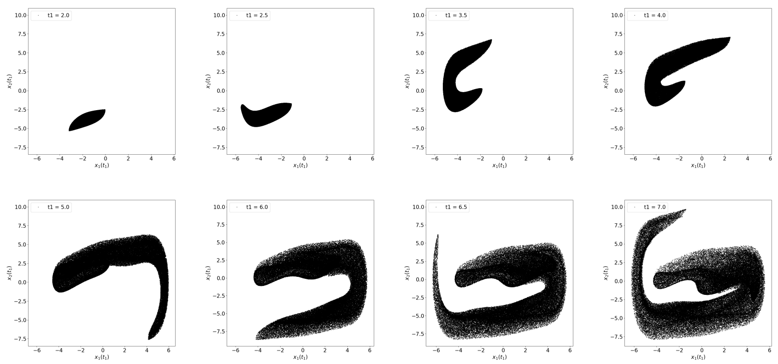

Рис. 1. Пример последовательности множеств достижимости для нелинейной ЗОУ на увеличивающихся временных интервалах: $t_0 = 0$, t_1 возрастает от 2 до 7,5

Соответствующая задача формулируется следующим образом: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u - x_1 + x_1^3/6 - x_1^5/120$, начальный фазовый вектор задан $x(t_0) = (5, 0)$ и определены ограничения на управление $u \in U = [-1, 1]$. Подобные свойства проявляются даже для случаев небольшой размерности, поэтому для эффективного исследования нелинейных управляемых динамических систем необходимо учитывать специфические особенности нелинейных задач оптимального управления.

3. Методики овыпукления множества допустимых скоростей

Динамические системы с непрерывным временем характеризуются свойством скрытой выпуклости [25, 27, 35], которое может быть использовано при построении специализированных алгоритмов. С использованием свойства скрытой выпуклости динамической системы разработана методика, основанная на проведении процедуры формирования расширенной задачи, позволяющей овыпуклить множество допустимых скоростей. Процедура овыпукления управляемых динамических систем была предложена для обобщенных управлений [8], позволяющих обеспечить непрерывную зависимость траекторий от управляющих воздействий. Представленный подход опирается на непосредственное использование свойств задач рассматриваемого класса и приводит к формированию расширенных задач оптимального управления, в которых в некоторых случаях даже с использованием локальных методов оптимизации удается получить решение. Для построения овыпукленного множества допустимых скоростей формируется расширенная система дифференциальных уравнений путем использования неотрицательных вспомогательных управляющих воздействий $\alpha_i(t)$:

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) f(x(t), v_i(t), t), \ \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) = 1, \tag{3.1}$$

$$\alpha_j(t) \leq 0, \ v_j(t) \in U, j = \overline{1, l}, t \in T, \tag{3.2}$$

$$I[x, v, \alpha] = \varphi(x(t_1)) \to \min, \tag{3.3}$$

значение фазового вектора в начальный момент времени фиксировано. Оптимальная в расширенной задаче (3.1)–(3.3) траектория $x^*(t)$ и соответствующие управления $\{\alpha_j^*(t), v_j^*(t) : j = \overline{1, l}\}$, $t \in T$ являются обобщенным или ослабленным решением. В силу априорной выпуклости множества обобщенные решения существуют при весьма общих предположениях, в отличие от решений исходной задачи (2.1)–(2.3). Поэтому оптимальная в расширенной задаче траектория $x^*(t)$ может не быть допустимой в исходной задаче, в то же время оптимальный процесс в исходной ЗОУ, являясь допустимым в расширенной постановке, не будет в ней оптимальным. Критерий корректности по расширению [27] формулируется следующим образом: нижние грани оптимизируемого функционала в исходной (2.3) и в расширенной задачах (3.3) совпадают [13; 14; 17]. Выполнение этого критерия позволяет гарантировать, что любая оптимальная в исходной задаче траектория будет и обобщенным решением. Следовательно, задачи с выпуклым множеством скоростей (в случае параллелепипедных ограничений на управляющие воздействия и линейных по управлению систем) будут корректными по расширению. Для большинства задач рассматриваемого типа выполняется корректность по расширению в связи с особенностями управляемых систем с непрерывным временем (отражающим специфику дифференциальных связей) без каких-либо априорных предположений выпуклости.

3.1. Формирование расширенных задач оптимального управления

На вспомогательные управляющие воздействия накладываются ограничения типа равенства, в то же время они должны быть неотрицательными. Для приведения постановки (3.1)–(3.3) к виду (2.1)–(2.3) при построении расширенной задачи предлагается использовать ряд редукций, позволяющий получить последовательность задач с овыпукленными множествами допустимых скоростей.

В первом варианте построения расширенной задачи формируется система дифференциальных уравнений с линейной комбинацией правых частей и вводится дополнительная фазовая координата x_{n+1}, позволяющая учитывать ограничения на вспомогательные управления (здесь и далее $\alpha_j(t) \geq 0$, $j = \overline{1, l}$):

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) f_1(x, v, t),\ \dot{x}_2 = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) f_2(x, v, t), ..., \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) f_n(x, v, t),\ \dot{x}_{n+1} = \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) - 1 \right)^2 \tag{3.5}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = \overline{1, n+1}, v \in U, t \in T, \tag{3.6}$$

$$I[x, v, \alpha] = \varphi(x(t_1)) \to \min. \tag{3.7}$$

Функционал (3.3) остается неизменным. *Во втором варианте* для сведения исходной системы к расширенной (обобщенной) используется альтернативный способ учета ограничений на вспомогательные управления, при этом $\alpha_j(t)$ одновременно не равны нулю:

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k} f(x, v, t), \tag{3.8}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ i = \overline{1, n}, v \in U, t \in T. \tag{3.9}$$

Третий вариант является удобным для двумерных тестовых задач ($x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, управления также принадлежат парллелепипедному множеству — $v \in U$), и может быть использован при тестировании методики овыпукления с целью сравнений вариантов между собой и выбора значений алгоритмических параметров программной реализации методики овыпукления:

$$\dot{x}_1 = \alpha_1(t) f_1(x, v, t) + (1 - \alpha_1(t)) f_1(x, v, t), \tag{3.10}$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_1(t) f_2(x, v, t) + (1 - \alpha_1(t)) f_2(x, v, t). \tag{3.11}$$

В первых двух вариантах размерность вектора фазовых координат равна $n + 1$ и n соответственно, размерность вектора управляющих параметров – l, управляющих функций – $l \times m$. *На следующих этапах* формируются расширенные задачи оптимального управления с использованием дополнительной фазовой координаты для линеаризации функционала (также заданы ограничения на управление $v \in U$ и начальный

фазовый вектор $x(t_0) = x^0$, $t \in T$):
Вариант 4:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) f_i(x, v, t),\ i = \overline{1, n},\ \dot{x}_{n+1} = \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) - 1 \right)^2 \tag{3.12}$$

$$\dot{x}_{n+2} = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j(t) \nabla\varphi(x), \tag{3.13}$$

$$I[x, v, \alpha] = x_{n+2}(t_1) \to \min. \tag{3.14}$$

Вариант 5:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k} f_i(x, v, t), i = \overline{1, n}, \tag{3.15}$$

$$\dot{x}_{n+1} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k} \nabla\varphi(x),\ t \in T, \tag{3.16}$$

$$I[x, v, \alpha] = x_{n+1}(t_1) \to \min. \tag{3.17}$$

Таким образом, для задачи (2.1)–(2.3) формируется 5 расширенных задач, в результате численного исследования которых можно делать выводы о решении в исходной нелинейной задаче оптимального управления.

3.2. Результаты вычислительных экспериментов

Оценка эффективности программной реализации представленной методики овыпукления проведена на тестовой коллекции задач оптимального управления [20], включающей как известные тесты, так и сгенерированные с учетом моделирования типовых вычислительных трудностей для алгоритмов невыпуклой оптимизации (наличие большого числа локальных экстремумов, узких областей притяжения экстремумов, невыпуклых множеств достижимости характеризующихся сложной структурой и др.). Результат овыпукления множества допустимых скоростей (*вариант 1*) управляемой динамической системы, описывающей колебания маятника, представлен на рис. 2. В данном случае в результате решения расширенной задачи и построения соответствующего множества достижимости в терминальном фазовом пространстве с помощью модификации метода мультистарта [22] удалось получить овыпукленное множество достижимости.

В соответствующей задаче оптимального управления решения можно найти уже с помощью локальных методов (например, градиентного

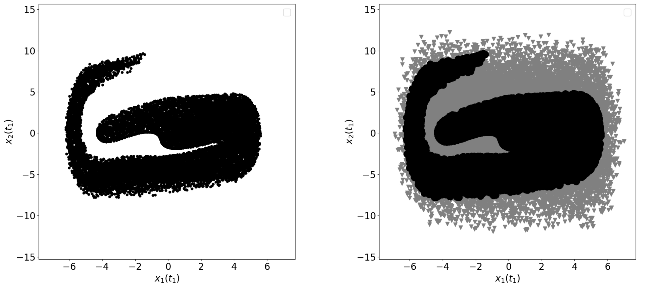

Рис. 2. Результаты решения модификации тестовой задачи оптимального управления колебаниями математического маятника: а) МД в исходной нелинейной ЗОУ; б) МД в расширенной ЗОУ

типа [6]). В общем случае гарантировать овыпукление множества достижимости, наряду с овыпуклением множества скоростей, не удается, однако корректность по расширению имеет место для большинства задач рассматриваемого типа в силу особенностей дифференциальных связей.

Вычислительные эксперименты проведены для ряда невыпуклых задач оптимального управления ЗОУ из тестовой коллекции [20], характеризующихся невыпуклостью множеств достижимости (табл. 1). Соответствующие управления и траектории, доставляющие минимум терминальному функционалу, приведены на рис. 3.

В табл. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов, полученные с использованием методики решения ЗОУ, основанной на расширении по Гамкрелидзе (расчеты проводились на персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 7 5700G 3.80 GHz и объемом оперативной памяти 16 ГБ). В первом столбце приведены минимальные значения целевых функционалов, достигнутые методом классического мультистарта [22]. В последующих столбцах отражена результативность предложенной методики на представленном фрагменте коллекции тестов. В столбцах *Conv1* – *Conv3* приведены значения целевого функционала, полученные в расширенных задачах оптимального управления (*варианты 1–3*), в столбцах *Conv5* и *Conv6* — варианты, дополненные введением фазовой координаты для линеаризации терминального функционала.

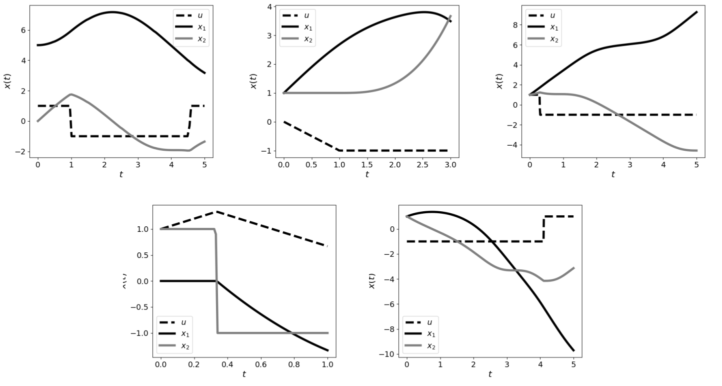

Рис. 3. Результаты численного решения нелинейных ЗОУ из тестовой коллекции [20]

Таблица 1.

Фрагмент набора тестов, для которых проводились вычислительные эксперименты

N	Система ДУ	$x(t_0)$	U, T	$I(u)$
3.2.1	$\dot{x}_1 = x_2$	$x_1^0 = 5$	$u(t) \in [-1, 1]$	$x_1^2(5) + x_2^2(5) \downarrow$
[2; 18]	$\dot{x}_2 = u - \sin x_1$	$x_2^0 = 0$	$t \in [0, 5]$	
3.2.2	$\dot{x}_1 = \sin x_2 + \cos t$	$x_1^0 = 1$	$u(t) \in [-1, 1]$	$x_1(3) + x_2(3) \downarrow$
[20]	$\dot{x}_2 = (u + t)^2$	$x_2^0 = 1$	$t \in [0, 3]$	
3.2.3	$\dot{x}_1 = \exp^{\sin x_2}$	$x_1^0 = 1$	$u(t) \in [-1, 1]$	$x_1(5) \cdot x_2(5) \downarrow$
[7; 20]	$\dot{x}_2 = u - \cos x_1$	$x_2^0 = 1$	$t \in [0, 5]$	
3.2.4	$\dot{x}_1 = u$	$x_1^0 = 0$	$u(t) \in [-1, 1]$	$x_2(1) \downarrow$
[4; 16]	$\dot{x}_2 = x_1(u - 1)$	$x_2^0 = 0$	$t \in [0, 1]$	
3.2.5	$\dot{x}_1 = x_2$	$x_1^0 = 1$	$u(t) \in [-1, 1]$	$x_1(5) - x_2(5) \downarrow$
[7; 20]	$\dot{x}_2 = u - \cos x_1$	$x_2^0 = 1$	$t \in [0, 5]$	

Для тестов 1 и 3–5 решения во всех задачах – расширенных и исходной – совпали. Для второго теста в соответствующей расширенной задаче (*вариант 2*) численное решение не получено (найден один из локальных экстремумов, значение в котором не является рекордным), в остальных вариантах наилучшее из известных значение достигнуто.

Получение решения в невыпуклой задаче оптимального управления, характеризующейся нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений, удается гарантировать не всегда. Тем не менее, опираясь на результаты проведенных вычислительных экспериментов и результаты исследования расширенных ЗОУ, можно сформулировать следующее утверждение: если все решения расширенных задач и исходной совпали, то на основе критерия корректности по расширению можно утверждать, что решение исходной ЗОУ получено.

Таблица 2.
Результаты вычислительных экспериментов на тестовой коллекции нелинейных ЗОУ

N	Multistart	*Conv1*	*Conv2*	*Conv3*	*Conv4*	*Conv5*
3.2.1	$11,90817$	11,90884	11,90876	11,90873	11,90873	11,90817
3.2.2	$7,15602$	7,15600	6,86314	7,15600	6,86314	7,15602
3.2.3	$-42,46849$	$-42,44947$	$-42,46964$	$-42,46073$	$-42,46966$	$-42,46992$
3.2.4	$-1,33333$	$-1,33334$	$-1,3333$	$-1,3334$	$-1,33333$	$-1,33333$
3.2.5	$-6,56876$	$-6,56363$	$-6,56890$	$-6,56363$	$-6,56900$	$-6,56892$

4. Заключение

Методика решения нелинейных задач оптимального управления опирается на свойство скрытой выпуклости множества скоростей управляемых динамических систем. В системах линейных по управлению с параллелепипедными ограничениями на управляющие воздействия множество скоростей является выпуклым, в остальных случаях требуется проведение процедуры овыпукления, основанной на формировании расширенной ЗОУ. Различные способы учета ограничений на вспомогательные управления позволяют сформировать серию расширенных задач ЗОУ, включающих также возможность линеаризации целевого функционала.

Таким образом, сформировано 5 вариантов к построению расширенных задач с использованием методики овыпуклений по Гамкрелидзе. Тестирование программной реализации предложенного подхода проведено на фрагменте тестовой коллекции невыпуклых задач оптимального управления, включающей как хорошо известные тесты, так и примеры, ориентированные на моделирование особенностей нелинейных динамических систем.

Полученные результаты проведенных вычислительных экспериментов позволили продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода при исследовании нелинейных управляемых динамических систем и, опираясь на критерий корректности по расширению, сформулировать выводы о достижимости решений в исходной задаче оптимального управления.

Список источников

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М. : Наука, 1979. 420 с.

2. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М. : Высш. шк., 2003. 614 с.
3. Беллман Р. Динамические программирование. М. : Наука, 1976. 352 с.
4. Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1999. 208 с.
5. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1977. 253 с.
6. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск : Наука, 2009. 279 с.
7. Горнов А. Ю., Данеева А. В. Подход к исследованию невыпуклых задач оптимального управления с параллелепипедными ограничениями // Вестник Бурятского университета. Серия: Математика и информатика. 2005. Вып. 2. С. 122–130.
8. Горнов А. Ю., Зароднюк Т. С. Метод криволинейного поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3. С. 19–27.
9. Гурман В. И., Батурин В. А., Расина И. В. Приближенные методы оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1983. 178 с.
10. Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. М. : Наука, 1989. 144 с.
11. Дыхта В. А. Некоторые приложения неравенств Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении. Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2009. № 1 (2). С. 183–196.
12. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума. М. : Наука, 1991. 248 с.
13. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.
14. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1988. 360 с.
15. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М. : Наука, 1976.
16. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. 160 с.
17. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск : Наука, 1986. 296 с.
18. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск : Наука, 1992. 193 с.
19. Floudas C. A., Gounaris C. E. A review of recent advances in global optimization // Journal of Global Optimization. 2009. N 1 (45). P. 3–38. https://doi.org/10.1007/s10898-008-9332-8
20. A Collection of Test Multiextremal Optimal Control Problems / A. Y. Gornov, T. S. Zarodnyuk, T. I. Madzhara, A. V. Daneyeva, I. A. Veyalko // Optimization, Simulation, and Control / eds.: Chinchuluun A. [et al.] New York : Springer, 2013. Vol. 76. P. 257–274. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5131-0_16
21. Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory. New York : Marcel Dekker Inc., 1996. 384 p.
22. Extension technology and extrema selections in a stochastic multistart algorithm for optimal control problems / A. Yu. Gornov, T. S. Zarodnyuk, A. S. Anikin, E. A. Finkelstein // J. Glob. Optim. 2020. Vol. 76, N 3. P. 533–543.
23. Zhigljavsky A., Zilinskas A. *Stochastic Global Optimization.* New York : Springer, 2008.

References

1. Alekseev V.M., Tixomirov V.M., Fomin S.V. *Optimalnoe upravlenie* [Optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 420 p. (in Russian)
2. Afanasev V.N., Kolmanovskij V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* [Mathematical Theory of Control Systems Design]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003, 614 p. (in Russian)
3. Bellman R. *Dinamicheskie programmirovanie* [Dynamic programming]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 352 p. (in Russian)
4. Vasilev O.V., Arguchintsev A.V. *Metody optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Optimization Methods: Problems and Exercises]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1999, 208 p. (in Russian)
5. Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimalnogo upravleniya* [Principles of Optimal Control]. Tbilisi, Tbilisi Univ. Publ., 1977, 253 p. (in Russian)
6. Gornov A.Yu. *Vychislitelnye tekhnologii resheniya zadach optimalnogo upravleniya* [Computational Technologies for Solving Optimal Control Problems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 279 p. (in Russian)
7. Gornov A.Yu., Daneyeva A.V. Podkhod k issledovaniyu nevypuklykh zadach optimalnogo upravleniya s parallelepipednymi ogranicheniyami [An approach to the study of nonconvex optimal control problems with box constraints]. *Vestnik Buryatskogo universiteta. Ser. Matematika i informatika*, 2005, no. 2, pp. 122–130. (in Russian)
8. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S. Metod krivolineynogo poiska globalnogo ekstremuma v zadache optimalnogo upravleniya [Curvilinear search method for the global extremum in optimal control problems]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye*, 2009, no. 3, pp. 19–27. (in Russian)
9. Gurman V.I., Baturin V.A., Rasina I.V. *Priblizhennye metody optimalnogo upravleniya* [Approximate optimal control methods]. Irkutsk, Irkutsk Univ. Publ., 1983, 178 p. (in Russian)
10. Dikusar V.V., Milyutin A.A. *Kachestvennye i chislennye metody v principe maksimuma* [Qualitative and Numerical Methods in the Maximum Principle]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 144 p. (in Russian)
11. Dykhta V.A. Nekotorye prilozheniya neravenstv Gamiltona–Yakobi v optimalnom upravlenii [Some applications of Hamilton–Jacobi inequalities in optimal control] *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2009, no. 1 (2), pp. 183–196.
12. Zhiglyavsky A.A., Zhilinskas A.G. *Metody poiska globalnogo ekstremuma* [Methods for Searching the Global Extremum]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 248 p. (in Russian)
13. Clark F. *Optimizatsiya i negladkiy analiz* [Optimization and Nonsmooth Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p. (in Russian)
14. Mordukhovich B.Sh. *Metody approksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation Methods in Problems of Optimization and Control]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 360 p. (in Russian)
15. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnyh processov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1976. (in Russian)
16. Srochko V.A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimalnogo upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 160 p. (in Russian)

17. Tolstonogov A.A. *Differentsialnye vklyucheniya v banakhovom prostranstve* [Differential Inclusions in a Banach Space]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986, 296 p. (in Russian)
18. Tyatyushkin A.I. *Chislennye metody i programmnye sredstva optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Numerical Methods and Software for Optimizing Controlled Systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 193 p. (in Russian)
19. Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization. *Journal of Global Optimization*, 2009, no. 1 (45), pp. 3–38. https://doi.org/10.1007/s10898-008-9332-8
20. Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneyeva A.V., Veyalko I.A. A Collection of Test Multiextremal Optimal Control Problems. *Chinchuluun A. et al. (eds.) Optimization, Simulation, and Control.* New York, Springer Publ., 2013, vol. 76, pp. 257–274. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5131-0_16
21. Krotov V.F. *Global Methods in Optimal Control Theory.* New York, Marcel Dekker Inc., 1996, 384 p.
22. Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu. Computing technique based on multistart method for obtaining global extremum in optimal control problems. *J. Glob. Optim.*, 2015.
23. Zhigljavsky A., Zilinskas A. *Stochastic Global Optimization.* New York, Springer Publ., 2008.

Об авторах

Зароднюк Татьяна Сергеевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, tz@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-2170-689X

About the authors

Tatiana S. Zarodnyuk, Cand. Sci. (Tech.), Senior Research Scientist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, tz@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-2170-689X

Поступила в редакцию / Received 17.03.2026
Поступила после рецензирования / Revised 23.04.2026
Принята к публикации / Accepted 30.04.2026