Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 123—133

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 519.716.5, 512.56, 512.714
MSC 06D25, 08A40, 13M10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.123

Мощность решетки замкнутых классов полиномов в k-значной логике при составных k

С. Н. Селезнева[1]✉

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
✉ selezn@cs.msu.ru

Аннотация: Рассматриваются замкнутые относительно суперпозиции классы в k-значной логике. Э. Пост установил, что решетка по включению всех замкнутых классов в двузначной логике является счетной. Кроме того, любой замкнутый класс в двузначной логике имеет конечный базис. Ю. И. Янов и А. А. Мучник показали континуальность решетки всех замкнутых классов в k-значной логике при каждом $k \geqslant 3$. Кроме того, в k-значной логике при $k \geqslant 3$ найдутся замкнутые классы без базиса и замкнутые классы со счетным базисом. В силу континуальности решетки всех замкнутых классов при $k \geqslant 3$ изучаются ее подрешетки. В частности, рассматривается замкнутый класс всех функций k-значной логики, представимых полиномами по модулю k. Этот замкнутый класс содержит все функции k-значной логики, если и только если k является простым числом. Если k является составным числом, то этот замкнутый класс не является даже предполным. В работах А. Н. Черепова, А. Б. Ремизова, А. А. Крохина, К. Л. Сафина, Е. В. Суханова, Д. Г. Мещанинова и др. изучалось строение надрешеток и подрешеток замкнутого класса всех полиномиальных функций при составных k. В настоящем исследовании при каждом составном числе k устанавливается континуальность подрешетки замкнутого класса всех полиномиальных функций k-значной логики.

Ключевые слова: функция k-значной логики, кольцо вычетов по модулю k, полином, замкнутый класс, решетка замкнутых классов

Ссылка для цитирования: Селезнева С. Н. Мощность решетки замкнутых классов полиномов в k-значной логике при составных k // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 123–133.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.123

Research article

On the Cardinality of the Lattice of Closed Classes of Polynomials in k-Valued Logic for Composite Numbers k

Svetlana N. Selezneva[1]✉

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

✉ selezn@cs.msu.ru

Abstract: Closed classes under superposition are examined in k-valued logic. E. Post established that the lattice (on inclusion) of all closed classes in two-valued logic is countable. Besides, each closed class has a finite basis in two-valued logic. Yu. I. Yanov and A. A. Muchnick proved that the lattice of all closed classes in k-valued logic is continuous at each $k \geqslant 3$. Besides, there are closed classes without a basis and closes classes of a countable basis in k-valued logic at $k \geqslant 3$. Because of the continuity on the lattice of all closed classes at $k \geqslant 3$, its sub-lattices are examined. In particular, the closed class of all functions, that are represented by polynomials modulo k, is considered in k-valued logic. This closed class contains all functions of k-valued logic, if and only if k is a prime number. If k is a composite number, then this closed class is not even pre-complete. In works of A. N. Cherepov, A. B. Remizov, A. A. Krokhin, K. L. Safin, E. V. Sukhanov, D. G. Meschaninov and of others the structure of sub-lattices and of over-lattices is examined for the closed class of all polynomial functions at composites k. In this work at each composite number k the continuity of the sub-lattice is established for the closed class of all polynomial functions in k-valued logic.

Keywords: k-valued logic function, residue ring modulo k, polynomial, closed class, lattice of closed classes

For citation: Selezneva S. N. On the Cardinality of the Lattice of Closed Classes of Polynomials in k-Valued Logic for Composite Numbers k. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 123–133. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.123

1. Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $P_k^{(n)} = \{f \mid f : E_k^n \to E_k\}$ и $P_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_k^{(n)}$. Любая функция из P_k называется функцией k-значной логики. Множество P_k рассматривается как функциональная система с операциями суперпозиции [4; 10]. Функциональная система, состоящая из множества P_k вместе с операциями суперпозиции, называется k-значной логикой. Замкнутым классом в k-значной логике называется любое подмножество функций из P_k, замкнутое относительно суперпозиции. Множество всех замкнутых классов образует решетку по отношению включения. Получение решетки всех замкнутых классов в k-значной логике означает установление классификации всех функций из P_k по выразимости одних функций через другие.

В 1921 г. Э. Пост описал решетку $\mathcal{L}_2$ всех замкнутых классов в двузначной логике [12]. Он показал, что решетка $\mathcal{L}_2$ является счетной и что любой замкнутый класс в двузначной логике порождается конечным множеством функций. В 1964 г. Ю. И. Янов и А. А. Мучник установили существенное отличие k-значной решетки $\mathcal{L}_k$ (т. е. решетки всех замкнутых классов в k-значной логике) при $k \geqslant 3$ от двузначной решетки $\mathcal{L}_2$ [11]. А именно: ими доказана континуальность решетки $\mathcal{L}_k$ при всех $k \geqslant 3$. Кроме того, в [11] показано существование в k-значной логике при $k \geqslant 3$ замкнутых классов, которые не порождаются никаким их конечным подмножеством. Неизбыточное порождающее подмножество замкнутого класса называется его базисом. В [12] доказано, что в любом замкнутом классе в P_2 найдется конечный базис. В [11] установлено в P_k при $k \geqslant 3$ как существование замкнутых классов без базиса, так и существование замкнутых классов со счетным базисом.

Функция k-значной логики называется полиномиальной, если ее можно представить полиномом (многочленом) над кольцом $Z_k = (E_k; +, \cdot)$ вычетов по модулю k. Множество Pol_k всех полиномиальных функций из P_k (т. е. всех полиномов по модулю k) является замкнутым классом. При этом $Pol_k = P_k$ в том и только в том случае, когда k — простое число [10]. Если k — составное число, то замкнутый класс Pol_k не является даже предполным [10]. В [1; 7; 9] найдены свойства надрешеток замкнутого класса Pol_k в k-значной логике в зависимости от вида числа k. В 1997 г. А. А. Крохин, К. Л. Сафин, Е. В. Суханов установили счетность отрезка $[L_4; Pol_4]$ решетки всех замкнутых классов полиномов в четырехзначной логике, содержащих замкнутый класс L_4 всех линейных функций [3]. В 2017 г. Д. Г. Мещанинов обобщил этот результат на случай значности логики, равной квадрату произвольного простого числа [5]. А именно: им показана счетность отрезка $[L_{p^2}; Pol_{p^2}]$ решетки всех замкнутых классов полиномов в p^2-значной логике, содержащих замкнутый класс L_{p^2} всех линейных функций, где p — простое число. Кроме того, в [3; 5] установлено, что если p — простое число, то отрезок $[L_{p^2}; Pol_{p^2}]$ содержит ровно два замкнутых класса со счетным базисом. Во всех других замкнутых классах этого отрезка найдутся конечные базисы.

Вопрос о мощности решетки всех замкнутых классов полиномов пока решен только в случае p-значной логики, где p — простое число. А именно: если p — простое число, $p \geqslant 3$, то в силу $Pol_p = P_p$ заключаем, что решетка всех замкнутых классов в Pol_p континуальна и в ней найдутся замкнутые классы без базиса и замкнутые классы со счетным базисом. В настоящей работе устанавливается континуальность решетки всех замкнутых классов в Pol_k, где k — произвольное составное число.

2. Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Если $n \geqslant 1$, $\alpha \in E_k^n$, то i-й разряд набора α обозначаем α_i, $i = 1, \dots, n$. Другими словами, если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Кроме того, если $\alpha_j \in E_k^n$, то $\alpha = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n})$. Пусть $P_k^{(n)} = \{f \mid f : E_k^n \to E_k\}$ — множество всех n-местных функций k-значной логики и $P_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_k^{(n)}$ — множество всех функций k-значной логики. Пусть $Z_k = (E_k; +, \cdot)$ — кольцо вычетов по модулю k и $Z_k[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо полиномов (многочленов) над кольцом Z_k. Любой полином $F \in Z_k[x_1, \dots, x_n]$ назовем полиномом по модулю k. Говорят, что полином (многочлен) $F \in Z_k[x_1, \dots, x_n]$ задает (или представляет) функцию k-значной логики $f \in P_k^{(n)}$, если для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $F(\alpha) = f(\alpha) (\mathrm{mod}\ k)$. Функцию $f \in P_k$ называем полиномиальной (по модулю k), если найдется некоторый полином на кольцом Z_k, который задает функцию f. Множество всех полиномиальных функций из P_k (т. е. всех полиномов по модулю k) обозначаем Pol_k. Известно, что любая функция $f \in P_k$ является полиномиальной в том и только в том случае, когда k — простое число [10]. Другими словами, $Pol_k = P_k$ тогда и только тогда, когда k — простое число. Кроме того, если k — простое число, то любую функцию $f \in P_k$ можно задать полиномом по модулю k, в котором степень любой переменной не превышает $(k-1)$.

Если $A \subseteq P_k$, то пусть $A^{(n)}$ обозначает множество всех n-местных функций из A, $n \geqslant 1$. Пусть $A \subseteq P_k$. Говорим, что функция $f \in P_k$ является суперпозицией функций из A, если либо $f \in A$, либо верно одно из условий:

1) $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$, где $g \in P_k^{(n)}$ — суперпозиция функций из A, $n \geqslant 1$;

2) $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, где $g \in P_k^{(n)}$ — суперпозиция функций из A, $n \geqslant 1$ и $i_1, \dots, i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \dots, n$;

3) $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1})$, где $g \in P_k^{(n)}$ — суперпозиция функций из A, $n \geqslant 2$;

4) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m) = h(x_1, \dots, x_{n-1}, g(y_1, \dots, y_m))$, где $h \in P_k^{(n)}$, $g \in P_k^{(m)}$ — суперпозиции функций из A, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$.

Пусть $e_i^n \in P_k^{(n)}$ и $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, где $i = 1, \dots, n$, $n \geqslant 1$. Функции e_i^n называются функциями выбора, или селекторами. Пусть $J_k = \{e_i^n \mid i = 1, \dots, n, n \geqslant 1\}$ — множество всех селекторов. Пусть $A \subseteq P_k$. Несложно увидеть, что функция $f \in P_k$ является суперпозицией функций из A, если и только если либо $f \in A$, либо $f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, где $f_0 \in A^{(m)}$, $m \geqslant 1$, а $f_1, \dots, f_m \in P_k^{(n)}$ — функции из множества J_k или суперпозиции функций из A, $n \geqslant 1$.

Пусть $A \subseteq P_k$. Если функция $f \in P_k$ является суперпозицией функций из A, то говорим также, что f — суперпозиция над множеством A. Множество всех функций из P_k, являющихся суперпозициями над множеством A, называется замыканием множества A и обозначается $[A]$. При этом если $[A] = A$, то множество A называется замкнутым классом. Пусть $A \subseteq P_k$, A — замкнутый класс и $B \subseteq A$. Множество B называется базисом замкнутого класса A, если $[B] = A$ и для любой функции $f \in B$ верно $[B \setminus \{f\}] \neq A$.

Множество всех замкнутых классов в P_k образует решетку $\mathcal{L}_k$ по включению. Мощность решетки $\mathcal{L}_2$ счетна, при этом каждый замкнутый класс решетки $\mathcal{L}_2$ имеет конечный базис [12]. При каждом $k \geqslant 3$ мощность решетки $\mathcal{L}_k$ континуальна и в ней найдутся замкнутые классы без базиса и замкнутые классы со счетным базисом [11]. При $k \geqslant 3$ изучаются подрешетки решетки $\mathcal{L}_k$ (в силу континуальности всей решетки).

Множество Pol_k является замкнутым классом.Решетка $\mathcal{LP}_k$ всех замкнутых классов полиномов континуальна, если k — простое число, $k \geqslant 3$ (в силу $Pol_k = P_k$ при простых k). В настоящей работе устанавливается континуальность решетки $\mathcal{LP}_k$ при каждом составном числе k.

3. Случай числа k, равного степени простого числа

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, d — делитель числа k и $a, b \in E_k$. Говорим, что a и b сравнимы по модулю d и пишем $a = b (\mathrm{mod}\ d)$, если число $(a - b)$ делится нацело на число k. Пусть $n \geqslant 1$ и $\alpha, \beta \in E_k^n$. Говорим, что наборы α и β сравнимы по модулю d и пишем $\alpha = \beta (\mathrm{mod}\ d)$, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ верно $\alpha_i = \beta_i (\mathrm{mod}\ d)$.

Функцию $f \in P_k^{(n)}$ называем решеточной по модулю d, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_k^n$ из $\alpha = \beta (\mathrm{mod}\ d)$ следует $f(\alpha) = f(\beta) (\mathrm{mod}\ k)$ (см. также [6]).

Утверждение 1. *Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$ и $f \in P_k$. Если f — решеточная функция по модулю p, то $f \in Pol_k$.*

Доказательство. Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $g_0 \in P_k^{(1)}$, где $g_0(x) = 1 - x^{\varphi(k)}$ и $\varphi(z)$ — функция Эйлера, равная количеству целых чисел от 1 до z, взаимно простых с z. Тогда для любого $a \in E_k$ верно $g_0(a) = 1$ при $a = 0 (\mathrm{mod}\ p)$ и $g_0(a) = 0$ иначе. Другими словами, g_0 — решеточная функция по модулю p. Кроме того, из приведенного выше представления получаем, что $g_0 \in Pol_k$.

Затем для любого набора $\sigma \in E_k^n$ рассмотрим функцию $g_\sigma \in P_k^{(n)}$, где $g_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = g_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \ldots \cdot g_0(x_n - \sigma_n)$. Несложно увидеть, что для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $g_\sigma(\alpha) = 1$, если $\alpha = \sigma (\mathrm{mod}\ p)$, и

$g_\sigma(\alpha) = 0$ иначе. Значит, g_σ — решеточная функция по модулю p. Кроме того, $g_\sigma \in Pol_k$.

Теперь пусть $f \in P_k^{(n)}$ — произвольная решеточная функция по модулю p. Функцию f можно представить в следующем виде (см. [6]):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in E_p^n} f(\sigma) \cdot g_\sigma(x_1, \ldots, x_n).$$

В силу $g_\sigma \in Pol_k$, $\sigma \in E_p^n$, заключаем, что $f \in Pol_k$. Утверждение доказано. $\square$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 2$, то в Pol_k найдется замкнутый класс со счетным базисом.*

Доказательство. Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 2$. Применяя подход из [11], построим замкнутый класс A, $A \subseteq Pol_k$, со счетным базисом.

Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим множество $S_n \subseteq E_p^n$: $\sigma \in S_n$, если найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\sigma_j = 0$, и $\sigma_i = 1$ при всех $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Теперь пусть $f_n \in P_k^{(n)}$ и для любого $\alpha \in E_k^n$ верно $f(\alpha) = p$, если найдется некоторый набор $\sigma \in S_n$, что $\alpha = \sigma (\mathrm{mod}\ p)$, и $f(\alpha) = 0$ иначе. Несложно увидеть, что для каждого $n = 2, 3, \ldots$ функция f_n является решеточной по модулю p. По утверждению 1 верно $f_n \in Pol_k$, $n = 2, 3, \ldots$

Далее положим $B = \{f_2, f_3, \ldots\} \subseteq Pol_k$ и $A = [B]$. Ясно, что A — замкнутый класс в Pol_k. Покажем, что B — базис замкнутого класса A. По построению $[B] = A$. Поэтому осталось показать, что для любого n, где $n \geqslant 2$, функция f_n не является суперпозицией над множеством $B \setminus \{f_n\}$.

Предположим, что это не так: пусть

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_l(g_1, \ldots, g_l), \tag{1}$$

где $f_l \in B \setminus \{f_n\}$, а $g_1, \ldots, g_l \in Pol_k^{(n)}$ являются функциями из J_k или суперпозициями над $B \setminus \{f_n\}$. Возможны три случая.

Случай 1: $g_1, \ldots, g_l \in J_k$. В этом случае $l > n$, поэтому найдутся такие j_1, j_2, где $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n$, что $g_{j_1} = g_{j_2} = e_i^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Не ограничивая общности рассуждений, пусть $i = 1$. Тогда выражение (1) приводит к противоречию на наборе $\alpha = (0, 1, \ldots, 1) \in E_k^n$. Действительно, $f_n(\alpha) = p$, а $f_l(g_1(\alpha), \ldots, g_l(\alpha)) = 0$, так как $g_{j_1}(\alpha) = g_{j_2}(\alpha) = 0$.

Случай 2: из функций $g_1, \ldots, g_l$ в точности одна функция g_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, принадлежит множеству J_k. Пусть $g_j = e_i^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Не ограничивая общности рассуждений, пусть $i = 1$. Тогда выражение (1) приводит к противоречию на наборе $\alpha = (0, 1, \ldots, 1) \in E_k^n$. Действительно, $f_n(\alpha) = p$, а $f_l(g_1(\alpha), \ldots, g_l(\alpha)) = 0$, так как $g_j(\alpha) = 0$ и $g_1(\alpha), \ldots, g_{j-1}(\alpha), g_{j+1}(\alpha), \ldots, g_l(\alpha) \in \{0, p\}$.

Случай 3: все функции $g_1, \ldots, g_l$ не принадлежат множеству J_k. Тогда выражение (1) приводит к противоречию на наборе $\alpha = (0, 1, \ldots, 1) \in E_k^n$. Действительно, $f_n(\alpha) = p$, а $f_l(g_1(\alpha), \ldots, g_l(\alpha)) = 0$, т. к. $g_1(\alpha), \ldots, g_l(\alpha) \in \{0, p\}$.

Таким образом, предположение о том, что функция f_n является суперпозицией над множеством $B \setminus \{f_n\}$ приводит к противоречию. Значит B — неизбыточное порождающее множество замкнутого класса A, т. е. B — базис замкнутого класса A. Теорема доказана. □

Замечание 1. Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 2$. Рассмотрим функции $f_n \in Pol_k$, $n = 2, 3, \ldots$, из доказательства теоремы 1. Представим эти функции f_n, $n = 2, 3, \ldots$, в виде выражений, в которых встречаются только сложение и умножение по модулю k и константы из E_k. По доказательству утверждения 1 верно

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p \cdot g_\sigma(x_1, \ldots, x_n),$$

где $g_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - (x_i - \sigma_i)^{\varphi(k)}\right)$, $\sigma \in S_n$ и $\varphi(k)$ равно количеству целых чисел от 1 до k, взаимно простых с k.

Далее получаем

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = p \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(1 - x_j^{\varphi(k)}\right) \cdot \prod_{i \neq j} \left(1 - (x_i - 1)^{\varphi(k)}\right).$$

Пример 1. Пусть $k = 4 = 2^2$. Несложно увидеть, что $\varphi(4) = 2$. Находим функции $g_0(x)$, $g_1(x) = g_0(x-1)$ из доказательства утверждения 1:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 - x^2, \\ g_1(x) &= 1 - (x-1)^2 = x^2. \end{aligned}$$

Пусть $f_n \in Pol_4$ — функции из доказательства теоремы 1, где $n \geqslant 2$. С применением замечания 1 и равенства $2x^2 = 2x (\mathrm{mod}\ 4)$ получаем

$$f_2 = 2(1 - x^2)y^2 + 2x^2(1 - y^2) = 2x^2 + 2y^2 = 2x + 2y,$$

$$\begin{aligned} f_3 &= 2x^2y^2(1 - z^2) + 2x^2(1 - y^2)z^2 + 2(1 - x^2)y^2z^2 = \\ &= 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2z^2 = 2xy + 2xz + 2yz + 2xyz. \end{aligned}$$

В общем случае находим

$$f_n = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (1 - x_j^2) \cdot \prod_{i \neq j} x_i^2 = 2a x_1 \ldots x_n + 2 \sum_{j=1}^{n} x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_n,$$

где $a = 0$ при четных n и $a = 1$ при нечетных n.

Далее $B = \{f_2, f_3, \ldots\} \subseteq Pol_4$ и $A = [B]$ — замкнутый класс в Pol_4 со счетным базисом B.

Теперь установим континуальность решетки всех замкнутых классов в Pol_k при $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$.

Теорема 2. *Если $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 2$, то мощность решетки $\mathcal{LP}_k$ всех замкнутых классов в Pol_k равна континууму.*

Доказательство. Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 2$. Применим подход из [11]. Рассмотрим функции $f_2, f_3, \ldots \in Pol_k$ из доказательства теоремы 1. Для каждого бесконечного множества ν, $\nu = \{n_1, n_2, \ldots\}$, натуральных чисел, каждое из которых не меньше двух, пусть $A_\nu = [\{f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots\}]$. Ясно, что A_ν — замкнутый класс и $A_\nu \subseteq Pol_k$. По теореме 1 если множества ν_1 и ν_2 различны, то $A_{\nu_1} \neq A_{\nu_2}$. Значит, построен континуум различных замкнутых классов в Pol_k. Теорема доказана. $\square$

4. Случай произвольного составного числа k

Теперь установим континуальность решетки всех замкнутых классов в Pol_k при произвольном составном числе k.

Теорема 3. *Если k — составное число, то мощность решетки $\mathcal{LP}_k$ всех замкнутых классов в Pol_k равна континууму.*

Доказательство. Пусть k — составное число. Рассмотрим каноническое разложение числа k на простые множители: $k = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{s_t}$, где $p_1, \ldots, p_t$ — различные простые числа, $s_1, \ldots, s_t \geqslant 1$. Случай $t = 1$ рассмотрен в теореме 2. Поэтому далее считаем, что $t \geqslant 2$. Пусть $f \in Pol_k^{(n)}$. Известно (см., например, [7]), что для любых наборов $\alpha, \beta \in E_k^n$ из $\alpha = \beta (\mathrm{mod}\ p_j^{s_j})$ следует $f(\alpha) = f(\beta) (\mathrm{mod}\ p_j^{s_j})$ для всех $j = 1, \ldots, t$. В соответствии с этим каждой функции $f \in Pol_k^{(n)}$ можно однозначно сопоставить набор функций $(f_1, \ldots, f_t) \in Pol_{p_1^{s_1}}^{(n)} \times \ldots \times Pol_{p_t^{s_t}}^{(n)}$, где для каждого $j = 1, \ldots, t$ для любого набора $\alpha_j \in E_{p_j^{s_j}}^n$ верно $f_j(\alpha) = f(\alpha) (\mathrm{mod}\ p_j^{s_j})$. Верно и обратное, а именно, по китайской теореме об остатках любому набору функций $(f_1, \ldots, f_t) \in Pol_{p_1^{s_1}}^{(n)} \times \ldots \times Pol_{p_t^{s_t}}^{(n)}$ можно однозначно сопоставить функцию $f \in Pol_k^{(n)}$, где для любого набора $\alpha \in E_k^n$ верно $f(\alpha) = f_1(\beta_1) (\mathrm{mod}\ p_1^{s_1}), \ldots, f(\alpha) = f_t(\beta_t) (\mathrm{mod}\ p_t^{s_t})$ и $\beta_{j,i} = \alpha_i (\mathrm{mod}\ p_j^{s_j})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, t$ (подробнее см. [2; 8]). При таком сопоставлении будем писать $f = (f_1, \ldots, f_t)$.

Теперь пусть $\nu_1, \ldots, \nu_t$ — бесконечные множества натуральных чисел, причем в каждом множестве каждое из чисел не меньше двух, $A_{\nu_1} \subseteq Pol_{p_1^{s_1}}, \ldots, A_{\nu_t} \subseteq Pol_{p_t^{s_t}}$ соответствующие замкнутые классы, построеннные так же, как в теореме 2. Далее пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_t)$ — набор таких бесконечных множеств и $(A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_t})$ — набор соответствующих замкнутых классов. Рассмотрим множество

$$A_\nu = \{f \in Pol_k^{(n)} \mid f = (f_1, \ldots, f_t), f_1 \in A_{\nu_1}^{(n)}, \ldots, f_t \in A_{\nu_t}^{(n)}, n \geqslant 1\}.$$

В [7] показано, что таким образом построенное множество A_ν, $A_\nu \subseteq Pol_k$, является замкнутым классом. Далее заметим, что если наборы бесконечных множеств ν и ν' различны, то и замкнутые классы A_ν и $A_{\nu'}$ различны (следует из [11] или из теоремы 1). Значит, построен континуум различных замкнутых классов в Pol_k. Теорема доказана. $\square$

5. Заключение

В работе для каждого простого числа p и каждого числа $m \geqslant 2$ доказано существование замкнутого класса функций, представимых полиномами по модулю p^m, который не имеет базиса. Приведен пример такого замкнутого класса при $k = 4$. Кроме того, показана континуальность решетки всех замкнутых классов полиномов по модулю произвольного составного числа.

Список источников

1. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В. Некоторые критерии представимости функций k-значной логики полиномами по модулю k // Многоустойчивые элементы и их применение. М. : Сов. радио, 1971. С. 84–88.
2. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В., Циткин А. И. Мощность класса функций k-значной логики от n переменных, представимых полиномами по модулю k // Многоустойчивые элементы и их применение. М. : Сов. радио, 1971. С. 79–83.
3. Крохин А. А., Сафин К. Л., Суханов Е. В. О строении решетки замкнутых классов полиномов // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 2. С. 24–39. https://doi.org/10.4213/dm469
4. Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. М. : Физматлит, 2004. 104 с.
5. Мещанинов Д. Г. Замкнутые классы полиномов по модулю p^2 // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 3. С. 54–69. https://doi.org/10.4213/dm1452
6. Мещанинов Д. Г. Метод построения полиномов для функций k-значной логики // Дискретная математика. 1995. Т. 7, вып. 3. С. 48–60.
7. Ремизов А. Б. О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 3–15.
8. Селезнева С. Н. О числе полиномиальных функций k-значной логики по составному модулю k // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 81–91. https://doi.org/10.4213/dm1371

9. Черепов А. Н. Описание структуры замкнутых классов в P_k, содержащих класс полиномов // Проблемы кибернетики. Вып. 40. М. : Наука, 1983. С. 5–18.
10. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.
11. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127, вып. 1. С. 44–46.
12. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. Vol. 43, N 4. P. 163–185.

References

1. Ayzenberg N.N., Semyon I.V. Nekotorye kriterii predstavimosti funktsiy k-znachnoy logiki polinomami po modulyu k [Some Criteria for the Representability of k-Valued Logic Functions by Polynomials Modulo k]. *Mnogoustoychivye elementy i ikh primenenie* [Multi-Stable Elements and Their Application]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971, pp. 84–88. (in Russian)
2. Ayzenberg N.N., Semyon I.V., Tsitkin A.I. Moschnost klassa funktsiy k-znachnoy logiki ot n peremennykh, predstavimykh polinomami po modulyu k [The Cardinality of the Class of k-Valued Logic n Variables Functions which are Represented by Polynomials Modulo k]. *Mnogoustoychivye elementy i ikh primenenie* [Multi-Stable Elements and Their Application]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971, pp. 79–83. (in Russian)
3. Krokhin A.A., Safin K.L., Sukhanov E.V. The Structure of the Lattice of Closed Classes of Polynomials. *Discrete Math. Appl.*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 131–146. https://doi.org/10.1515/dma.1997.7.2.131
4. Marchenkov S.S. *Funktsionalnye sistemy s operatsiey superpositsii* [Functional Systems with a Superposition Operation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 104 p. (in Russian)
5. Meshchaninov D.G. Closed Classes of Polynomials Modulo p^2. *Discrete Math. Appl.*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 167–178. https://doi.org/10.1515/dma-2018-0016
6. Meshchaninov D.G. A method for Constructing Polynomials for Functions of k-Valued Logic. *Discrete Math. Appl.*, 1995, vol. 5, no. 4, pp. 333–346. https://doi.org/10.1515/dma.1995.5.4.333
7. Remizov A.B. The Overstructure of a Closed Class of Polynomials Modulo k. *Discrete Math. Appl.*, 1991, vol. 1, no. 1, pp. 9–22. https://doi.org/10.1515/dma.1991.1.1.9
8. Selezneva S.N. On the Number of Functions of k-Valued Logic which are Polynomials Modulo Composite k. *Discrete Math. Appl.*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 7–14. https://doi.org/10.1515/dma-2017-0002
9. Cherepov A.N. Description in P_k for Structure of Closed classes which contain the class of polynomial. *Problemy kibernetiki* [Problems of Cybernetics]. Moscow, Nauka Publ., vol. 40, 1983, pp. 5–18. (in Russian)
10. Yablonskiy S.V. Funktsionalnye postroeniya v k-znachnoy logike [Functional Constructions in k-Valued Logic]. *Trudy Mat. Inst. Steklov Acad. Sci. SSSR* [Proc. of Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences]. Moscow, 1958, vol. 51, pp. 5–142. (in Russian)
11. Yanov Yu.I., Muchnik A.A. O suschestvovanii k-znachnykh zamknutykh klassov, ne imeyuschikh konechnogo basisa [On Existing of k-Valued Closed Classes which Have not a Finite Basis]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1959, vol. 127, no. 1, pp. 44–46. (in Russian)

12. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.*, 1921, vol. 43, no. 4, pp. 163–185.

Об авторах

Селезнева Светлана Николаевна, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Российская Федерация, selezn@cs.msu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9918-5337.

About the authors

Svetlana N. Selezneva, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation, selezn@cs.msu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9918-5337.

Поступила в редакцию / Received 20.03.2025
Поступила после рецензирования / Revised 14.04.2025
Принята к публикации / Accepted 21.04.2025