Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 31—45

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.955
MSC 35A23, 35615, 35699
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.31

Дифференциальные уравнения составного типа с вырождением

А. И. Кожанов[1], **Б. В. Жигжитжапов**[2✉]

[1] Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация
[2] Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Российская Федерация
✉ zhbat120401@gmail.com

Аннотация: Исследуется разрешимость краевых задач для линейных дифференциальных уравнений составного типа четвертого порядка. Особенностью изучаемых уравнений является то, что операторный коэффициент при старшей производной по временной (выделенной) переменной может оказаться необратимым. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения составного типа, вырождение, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Ссылка для цитирования: Кожанов А. И., Жигжитжапов Б. В. Дифференциальные уравнения составного типа с вырождением // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 31–45.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.31

Research article

Composite-type Differential Equations with Degeneration

Alexander I. Kozhanov[1], **Bato V. Zhigzhitzhapov**[2✉]

[1] Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation
[2] Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation
✉ zhbat120401@gmail.com

Abstract: The paper is devoted to the study of the solvability of boundary value problems for fourth-order linear composite-type differential equations. A distinctive feature of the considered equations is that the operator coefficient at the highest derivative with respect to the time (distinguished) variable may be non-invertible. For the problems under study, theorems on the existence and uniqueness of regular solutions are proved—solutions that possess all generalized derivatives in the sense of S.L. Sobolev entering the corresponding equation.

Keywords: composite type differential equations, degeneracy, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness

Acknowledgements: The study was financially supported by the Mathematical Center in Academgorodok under the agreemend No 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Kozhanov A. I., Zhigzhitzhapov B. V. Composite-type Differential Equations with Degeneration. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 31–45. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.31

1. Введение

Целью работы является исследование разрешимости в пространствах Соболева краевых задач для дифференциальных уравнений вида

$$Au_{tt} + Bu_t + Cu = f(x,t) \tag{$*$}$$

с операторами A, B и C, действующими по пространственным переменным. Особенностью в изучаемых уравнениях будет то, что оператор A является необратимым.

Дифференциальные уравнения вида $(*)$ возникают при математическом моделировании некоторых процессов гидродинамики, физики плазмы, теории упругости; в случае $B = 0$ уравнения $(*)$ можно назвать обобщенными уравнениями Буссинеска – Лява [4; 5; 7; 9–12; 17]. Различные краевые задачи для подобных уравнений изучались во многих работах: кроме названных выше, выделим работы [1–3; 6; 8; 13–15; 18; 19] и особенно как наиболее близкие к настоящей работе — статьи [7; 9; 19]. В первых двух статьях изучались уравнения $(*)$ в случае $A = \lambda - \Delta$ с оператором Лапласа, действующим по пространственным переменным, и с числом λ, возможно, совпадающим с одним из собственных чисел оператора A (при однородных условиях Дирихле), и соответственно, в случае $A = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta$ также в ситуации, когда этот оператор необратим при некоторых значениях временной переменной t.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение [19].

Как и в [19], в настоящей работе будут получены теоремы существования и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение (определение обобщенных производных, описание их свойств можно найти в монографиях [16; 20])

2. Предварительные построения и вспомогательные утверждения

Пусть (x,t) есть точка цилиндрической области $Q=\Omega\times(0,T)$, образованной ограниченной областью Ω из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (можно считать бесконечно-дифференцируемой) границей Γ и интервалом $(0,T)$ конечной длины T. Далее, пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ есть заданные функции, и пусть A, B, C и L есть дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенствами

$$Av=(\alpha(t)-\Delta)v,\ Bv=(\beta(t)-\Delta)v,$$
$$Cv=(\gamma(t)-\Delta)v,\ Lv=Av_{tt}+Bv_t+Cv.$$

Всюду ниже в изучаемых задачах на боковой поверхности $S=\Gamma\times(0,T)$ цилиндра Q будет задаваться однородное условие Дирихле. Пусть $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательности собственных функций и собственных чисел задачи

$$\Delta\omega(x)=\lambda\omega(x),$$
$$\omega(x)|_{\Gamma}=0,$$

причём $\omega_k(x)$ есть такие функции, что выполняется

$$\int_{\Omega}\omega_k^2(x)dx=1,\quad k=1,2,\ldots$$

Существование таких функций $\omega_k(x)$ и чисел λ_k известно (см., например, [20]); более того, известно, что функции $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и что λ_k отрицательны, образуют монотонную последовательность и имеют единственную предельную точку $-\infty$.

Для изучаемых ниже задач решение $u(x,t)$ будет представляться в виде ряда Фурье:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)\omega_k(x),$$

и при этом функции $c_k(t)$ будут определяться как решение дифференциального уравнения

$$(\alpha(t)-\lambda_k)c_k''(t)+(\beta(t)-\lambda_k)c_k'(t)+(\gamma(t)-\lambda_k)c_k(t)=f_k(t),\quad k=1,2,\ldots \tag{2.1}$$

$\Big($функции $f_k(t)$ определяются равенствами $f_k(t) = \int_\Omega f(x,t)\omega_k(x)dx\Big)$. Уравнение (2.1) может быть уравнением с вырождением и может быть уравнением со знакопеременным старшим коэффициентом. Именно два этих случая и будут изучаться ниже.

С другой стороны, вследствие монотонности последовательности λ_k и отрицательности всех чисел λ_k существует минимальное натуральное число k_0 такое, что выполняется

$$\alpha(t) - \lambda_k > 0 \quad \text{при} \quad k = k_0,\ k_0 + 1,\ \ldots \tag{2.2}$$

Поскольку вырождение и знакопеременность будут иметь место, если $k_0 > 1$, то именно такой случай и будет изучаться ниже.

Определим линейное пространство V и норму в нём:

$$V = \{v(x,t) : \frac{\partial^k v(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), k = 0,1,2\},$$

$$||v||_V = \left(\sum_{k=0}^{2} \Big|\Big|\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\Big|\Big|_{L_2(Q,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

Положим $L_k\varphi(t) = (\alpha(t)-\lambda_k)\varphi''(t)+(\beta(t)-\lambda_k)\varphi'(t)+(\gamma(t)-\lambda_k)\varphi(t)$.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha(t) \in C^1([0,T]), \beta(t) \in C^1([0,T]), \gamma(t) \in C^1([0,T]); \tag{2.3}$$

$$\beta(t) - \frac{1}{2}\alpha'(t) - \lambda_k \geq \beta_0 > 0, \beta(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t) - \lambda_k \geq \beta_1 > 0,\ t \in [0,T]; \tag{2.4}$$

$$\gamma'(t) \leq 0, t \in [0,T]; \tag{2.5}$$

$$\alpha(0) - \lambda_k > 0,\ \alpha(T) - \lambda_k \geq 0,\ \gamma(0) - \lambda_k > 0,\ \gamma(T) - \lambda_k \geq 0. \tag{2.6}$$

Тогда если $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, то задача Коши

$$L_k c_k = f_k,\ c_k(0) = c_k'(0) = 0$$

имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим задачу: найти функцию $c_k(t)$, являющуюся на интервале $(0,T)$ решением уравнения

$$-\varepsilon c_k'''(t) + L_k c_k(t) = f_k(t), \tag{2.7}$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$c_k(0) = c_k'(0) = c_k''(T) = 0. \tag{2.8}$$

При фиксированном ε и при принадлежности функции $f_k(t)$ пространству $L_2([0,T])$ краевая задача (2.7), (2.8) имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^3([0,T])$, — это следует из того, что уравнение (2.7) не вырождается. Покажем, что для функций $c_k(t)$ имеют место равномерные по ε априорные оценки, с помощью которых в дальнейшем можно будет осуществить процедуру предельного перехода.

Умножим уравнение (2.7) на функцию $c_k'(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок с использованием условий утверждения и краевых условий (2.8) получим, что выполняется оценка

$$\varepsilon\int_0^T (c_k''(t))^2dt + \int_0^T (c_k'(t))^2dt \leq M_1\int_0^T f_k^2(t)dt, \tag{2.9}$$

постоянная M_1 в которой определяется лишь функциями $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

На следующем шаге умножим уравнение (2.7) на функцию $-c_k'''(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\varepsilon\int_0^T (c_k'''(t))^2dt+\int_0^T[\beta(t)-\lambda_k+\frac{1}{2}\alpha'(t)](c_k''(t))^2dt+\frac{1}{2}[\alpha(0)-\lambda_k](c_k''(0))^2 =$$
$$= -\int_0^T \beta'(t)c_k'(t)c_k''(t)dt-\int_0^T[\gamma(t)-\lambda_k]c_k'(t)c_k''(t)dt-\int_0^T \gamma'(t)c_k(t)c_k''(t)dt$$
$$-\int_0^T f_k'(t)c_k'(t)dt - f_k(0)c_k''(0). \tag{2.10}$$

Используя условия утверждения, учитывая оценку (2.9) и применяя неравенство Юнга, нетрудно показать, что следствием равенства (2.10) будет вторая априорная оценка

$$\varepsilon\int_0^T (c_k'''(t))^2dt+\int_0^T (c_k''(t))^2dt+c_k''^2(0) \leq M_2\int_0^T [f_k^2(t)+{f_k'}^2(t)]dt. \tag{2.11}$$

Оценок (2.9) и (2.11) уже вполне достаточно для доказательства существования последовательности $\{c_{k,m}(t)\}_{m=1}^\infty$ решений задач Коши для уравнений вида $-\varepsilon_m c_{k,m}'''(t) + L_k c_{k,m}(t) = f_k(t)$ такой, что

$$\varepsilon_m c_{k,m}'''(t) \to 0 \quad \text{слабо в} \quad L_2([0,T]) \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

$$c_{k,m}(t) \to c_k(t) \quad \text{слабо в} \quad W_2^2([0,T]) \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Это следует из свойства рефлексивности гильбертова пространства.

Предельная функция $c_k(t)$ и будет требуемым решением изучаемой задачи Коши. Единственность решений изучаемой задачи Коши очевидна: она следует из оценки (2.9), справедливой и при $\varepsilon = 0$. Утверждение полностью доказано. $\square$

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), а также условия*

$$\alpha(0)-\lambda_k>0, \alpha(T)-\lambda_k<0, \gamma(0)-\lambda_k>0, \gamma(T)-\lambda_k\geq 0. \tag{2.12}$$

Тогда, если $f_k(t)\in W_2^1([0,T])$, то задача

$$L_kc_k=f_k,\ c_k(0)=c_k'(0)=c_k'(T)=0$$

имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Доказательство. Для положительного числа ε рассмотрим задачу: найти функцию $c_k(t)$, являющуюся на интервале $(0,T)$ решением уравнения (2.7) и такую, что для неё выполняется условие

$$c_k(0)=c_k'(0)=c_k'(T)=0,. \tag{2.8'}$$

Повторяя действия, выполненные при доказательстве Утверждения 1, получим, что для функций $c_k(t)$ выполняются оценка (2.9), а также

$$\varepsilon\int_0^T(c_k'''(t))^2dt+\int_0^T(c_k''(t))^2dt\leq M_2'\int_0^T[f_k^2(t)+f_k'^2(t)]dt \tag{2.13}$$

с постоянной M_2', определяемой функциями $\alpha(t),\beta(t)$ и $\gamma(t)$. Этих оценок достаточно для доказательства существования такого семейства $\{c_{k,m}(t)\}_{m=1}^\infty$, что при $m\to\infty$ это семейство сходится к искомому решению $c_k(t)$ задачи $L_kc_k=f_k, c_k(0)=c_k'(0)=c_k'(T)=0$.

Единственность решений очевидна.

Утверждение доказано. □

Утверждение 3. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), а также условие*

$$\alpha(0)-\lambda_k>0, \alpha(T)-\lambda_k>0, \gamma(0)-\lambda_k>0, \gamma(T)-\lambda_k<0. \tag{2.14}$$

Тогда если $f_k(t)\in W_2^1([0,T])$, то задача

$$L_kc_k=f_k, c_k(0)=c_k'(0)=c_k(T)=0$$

имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Доказательство. Доказательство этого Утверждения проводится вполне аналогично доказательству Утверждения 2, лишь вместо условия (2.8') используется условие

$$c_k(0)=c_k'(0)=c_k(T)=0,$$

и дополнительно используется неравенство

$$c_k'^2(T) \leq \delta \int_0^T (c_k''(t))^2 dt + C(\delta) \int_0^T c_k'^2(t) dt,$$

в котором δ есть произвольное положительное число. □

Утверждение 4. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), а также условие*

$$\alpha(0) - \lambda_k = 0, \alpha(T) - \lambda_k \geq 0, \gamma(0) - \lambda_k > 0, \gamma(T) - \lambda_k \geq 0. \tag{2.15}$$

Тогда, если $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, то задача $L_k c_k = f_k$, $c_k(0) = 0$ имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Расмотрим задачу: найти функцию $c_k(t)$, являющуюся на интервале $(0,T)$ решением уравнения

$$-\varepsilon c_k''' + [\alpha(t) - \lambda_k + \varepsilon] c_k'' + [\beta(t) - \lambda_k] c_k' + [\gamma(t) - \lambda_k] c_k = f_k(t) \tag{1.7'}$$

и такую, что для неё выполняется условие (2.8).

Для решения $c_k(t)$ этой задачи из пространства $W_2^3([0,T])$ выполняются оценки (2.9) и (2.11). Как показано при доказательстве Утверждения 1, этих оценок вполне достаточно для доказательства существования последовательности $\{c_{k,m}(t)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящейся к точному решению $c_k(t)$ из требуемого класса изучаемой задачи.

Единственность решений очевидна. □

Утверждение 5. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), а также условия*

$$\alpha(0) - \lambda_k = 0, \alpha(T) - \lambda_k \geq 0, \gamma(0) - \lambda_k > 0, \gamma(T) - \lambda_k < 0; \tag{2.16}$$

$$4\beta_0 - T^2 \max_{[0,T]} |\gamma'(t)| > 0. \tag{2.17}$$

Тогда если $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, то задача

$$L_k c_k = f_k,\ c_k(0) = c_k(T) = 0$$

имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Доказательство этого Утверждения проводится вполне аналогично доказательству предыдущего Утверждения и отличается лишь тем, что при получении первой оценки используется неравенство

$$\int_0^T c_k^2(t)dt \leq \frac{T^2}{2}\int_0^T c_k'^2(t)dt,$$

а также условие (2.17).

Утверждение 6. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), а также условие*

$$\alpha(0) - \lambda_k = 0,\ \alpha(T) - \lambda_k < 0,\ \gamma(0) - \lambda_k > 0,\ \gamma(T) - \lambda_k \geq 0. \tag{2.18}$$

Тогда, если $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, то задача $L_k c_k = f_k,\ c_k(0) = c_k'(T) = 0$ имеет решение $c_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, причем ровно одно.

Утверждение 7. *Пусть выполняются условия (2.3)-(2.5), а также условие*

$$\alpha(0) - \lambda_k \leq 0,\ \alpha(T) - \lambda_k < 0,\ \gamma(0) - \lambda_k > 0,\ \gamma(T) - \lambda_k < 0. \tag{2.19}$$

Тогда, если $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, то задача $L_k c_k = f_k,\ c_k(0) = c_k(T) = c_k'(T) = 0$ имеет решение, причем ровно одно.

Доказательство Утверждений 6 и 7 очевидно.

Замечание 1. Существование и единственность решений краевых задач для уравнений $L_k c_k = f_k$, принадлежащих пространству $W_2^2([0,T])$, нетрудно установить и в некоторых других случаях, отличных от случаев, представленных в Утверждениях 1–7. Например, при выполнении условий

$$\alpha(0) - \lambda_k > 0,\ \alpha(T) - \lambda_k \geq 0,\ \gamma(0) = \lambda_k,\ \gamma(T) - \lambda_k \geq 0$$

разрешимой в пространстве $W_2^2([0,T])$ будет задача $L_k c_k = f_k,\ c_k'(0) = 0$, в случае $\alpha(0) - \lambda_k = 0,\ \alpha(T) - \lambda_k \geq 0,\ \gamma(0) - \lambda_k = 0,\ \gamma(T) - \lambda_k \geq 0$ имеет место существование и единственность решений $c_k(t)$, принадлежащих пространству $W_2^2([0,T])$, для уравнения $L_k c_k = f_k$ (т. е. в этом случае вообще не требуются какие-либо краевые условия!). Можно привести и другие задачи, разрешимые (причем единственным образом) в пространстве $W_2^2([0,T])$; соответствующие условия на функции $\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t)$ и $f_k(t)$ легко определяются. Но вместе с тем заметим, что для исследования разрешимости краевых задач для уравнений $(*)$ далее нам понадобятся лишь Утверждения 1–7.

Замечание 2. Как при выполнении условий Утверждений 1-7, так и при наличии иных условий, обеспечивающих разрешимость в пространстве $W_2^2([0,T])$ соответствующих краевых задач для уравнений $L_k c_k = f_k$, функция $\alpha(t) - \lambda_k$ может произвольно менять знак на интервале $(0,T)$.

3. Разрешимость краевых задач для обобщенного уравнения Буссинеска – Лява

Доказанные в предыдущем пункте Утверждения позволят изучить разрешимость краевых задач для обобщенного уравнения Буссинеска – Лява.

Всюду ниже k_0 есть минимальное натуральное число, определенное условием (2.2).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (2.3) и (2.5), а также условия (2.4) и (2.6) при $k = 1$. Тогда, если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_k'(t) \in W_2^1([0,T])$, $k = 1, \ldots, k_0 - 1$, то начально-краевая задача*

$$Lu = f(x,t), \tag{3.1}$$

$$u(x,0)|_S = 0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ x \in \Omega \tag{3.3}$$

имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем только одно.

Доказательство. Искомое решение $u(x,t)$ ищем в виде ряда Фурье $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)$ с функциями $c_k(t)$, являющимися решениями задачи

$$L_k c_k = f_k(t), \tag{3.4}$$

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0. \tag{3.5}$$

Согласно Утверждению 1, функции $c_k(t)$ при $k = 1, \ \ldots, \ k_0 - 1$ будут корректно определены как элементы пространства $W_2^2([0,T])$. Если же $k \geq k_0$, то соответствующие уравнения $L_k c_k = f_k$ не будут вырождаться, и тем самым все функции $c_k(t)$ как решения задач (3.4), (3.5) также будут корректно определены.

Положим

$$u_1(x,t) = \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k(t)\omega_k(x), \ u_2(x,t) = \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x).$$

Используя элементарные оценки для решений задачи Коши для невырождающихся уравнений второго порядка, а также неравенство Бесселя, нетрудно показать, что функция $u_2(x,t)$ является элементом пространства V.

Принадлежность же функции $u_1(x,t)$ пространству V очевидна. Следовательно, и функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V, и тем самым функция $u(x,t)$ и будет искомым решением начально-краевой задачи (3.1)–(3.3).

Единственность решений очевидна. □

Теорема 2. *Пусть $k_0 = 2$, выполняются условия (2.3) и (2.5), а также условия (2.4) и (2.6) при $k = 1$.*

Тогда если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $f_1(0) = 0$, то начально-краевая задача (3.1)-(3.3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем ровно одно.

Доказательство. Искомое решение будем искать в виде

$$u(x,t) = c_1(t)\omega_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)$$

с функцией $c_1(t)$, являющейся решением задачи

$$L_1 c_1 = f_1(t),\ c_1(0) = 0,$$

и функциями $c_k(t)$, $k = 2, 3, \dots$, являющимися решениями задачи Коши (3.4), (3.5). Существование функции $c_1(t)$, её принадлежность пространству $W_2^2([0,T])$ установлены в Утверждении 4, существование же функций $c_k(t)$, $k = 2, 3, \dots$, и их принадлежность пространству $W_2^2([0,T])$ очевидны. Также очевидна принадлежность функции

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)$$

пространству V. Далее, вследствие условий $f_1(0) = 0$, $\alpha(0) - \lambda_1 = 0$, $\gamma(0) - \lambda_1 > 0$, а также условия (2.4) уравнение $L_1 c_1 = f_1$ влечет равенство $c_1'(0) = 0$. Но тогда функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи (3.1)–(3.3).

Единственность решений очевидна. □

Следующие результаты показывают, что начально-краевая задача (3.1)–(3.3) может оказаться некорректной и что корректность имеет место при задании некоторых дополнительных условий (другими словами, что задача (3.1)–(3.3) может оказаться недоопределенной).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (2.3)–(2.5), (2.12) для $k = 1, \dots, k_0 - 1$, а также условия (2.4) при $k = 1$. Тогда если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_k(t) \in W_2^1([0,T])$, $k = 1, \dots, k_0 - 1$, то краевая задача для уравнения (3.1) с условиями (3.2) и (3.3), а также с дополнительными условиями*

$$\int_\Omega u_t(x,T)\omega_k(x)\,dx = 0,\ k = 1, \dots, k_0 - 1 \tag{3.6}$$

имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем только одно.

Доказательство. Решение $u(x,t)$ краевой задачи (3.1)–(3.3) с дополнительными условиями (3.6) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k(t)\omega_k(x) + \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x) \tag{3.7}$$

с функциями $c_k(t)$, определенными при $k = 1,\dots,k_0-1$ как решения задачи

$$Lc_k(t) = f_k(t),\ c_k(0) = c_k'(0) = c_k'(T) = 0,$$

(см. Утверждение 2), и при $k = k_0,\ k_0+1,\dots$ — как решения задачи Коши (3.4), (3.5). Очевидно, что и функция, являющаяся суммой первых k_0 слагаемых, и функция, являющаяся второй суммой в равенстве (3.7), принадлежат пространству V. Тем самым равенство (3.7) действительно будет определять решение краевой задачи (3.1)–(3.3), (3.6).

Единственность решений очевидна. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (2.3), (2.5) и (2.14) при $k = 1,\dots,k_0-1$, а также условие (2.4) при $k = 1$. Тогда если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_k(t) \in W_2^1(0,T)$, $k = 1,\dots,k_0-1$, то краевая задача для уравнения (3.1) с условиями (3.2) и (3.3), а также с дополнительными условиями*

$$\int_\Omega u(x,T)\omega_k(x)\,dx = 0,\ k = 1,\dots,k_0-1$$

имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем ровно одно.

Доказательство этой теоремы проводится вполне аналогично доказательству Теоремы 3. Уточним лишь, что используется Утверждение 3.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия (2.3), (2.5) и (2.17), а также условия (2.4) и (2.17) при $k = 1$. Тогда если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $f_1(0) = 0$, то краевая задача для уравнения (3.1) с условиями (3.2) и (3.3), а также дополнительным условием*

$$\int_\Omega u(x,T)\omega_1(x)\,dx = 0$$

имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем ровно одно.

Доказательство. Решение $u(x,t)$ в данном случае представим в виде

$$u(x,t) = c_1(t)\omega_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x).$$

Функция $c_1(t)$ здесь определяется с помощью Утверждения 5, функции же $c_k(t),\ k = 2,\ 3\ldots$ — как решение задачи Коши (3.4), (3.5).

Очевидно, что функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V. Далее, вследствие условия (2.16) и условия $f_1(0) = 0$ для функции $c_1(t)$ будет выполняться равенство $c_1'(0) = 0$. Следовательно, и для функции $u(x,t)$ в целом будут выполняться условия (3.2) и (3.3).

Единственность решений очевидна. □

Теорема 6. *Пусть выполняются условия (2.3) и (2.5), а также условия (2.4) и (2.18) при* $k = 1$. *Тогда, если* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $f_1(0) = 0$, *то краевая задача для уравнения (3.1) с условиями (3.2) и (3.3), а также с дополнительным условием*

$$\int_\Omega u_t(x,T)\omega_1(x)\,dx = 0$$

имеет решение $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V, *причем ровно одно.*

Теорема 7. *Пусть выполняются условия (2.3) и (2.5), условие (2.4) при* $k = 1$, *а также условие*

$$\alpha(0) - \lambda_1 = 0,\ \alpha(T) - \lambda_1 < 0,\ \gamma(0) - \lambda_1 > 0,\ \gamma(T) - \lambda_1 < 0.$$

Тогда, если $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_1(t) \in W_2^1([0,T])$, $f_1(0) = 0$, *то краевая задача для уравнения (3.1) с условиями (3.2) и (3.3), а также дополнительным условием*

$$\int_\Omega u(x,T)\omega_1(x)\,dx = \int_\Omega u_t(x,T)\omega_1(x)\,dx = 0$$

имеет решение, принадлежащее пространству V, *причем ровно одно.*

Доказательство теорем 6 и 7 очевидно.

Список источников

1. Алсыкова А. А. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 3–11.
2. Амиров Ш., Кожанов А. И. Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска // Математические заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 171–180. https://doi.org/10.4213/mzm10617.

3. Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 214–230. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230
4. Габов С. А., Свешников Г. А. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М. : Наука, 1990. 344 с.
5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск : Научная книга, 1998. 438 с.
6. Джураев Т. Д., Сопуев А. К. Теория дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент : Фан, 2000. 144 с.
7. Замышляева А. А., Бычков Е. В. Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 8. С. 1076–1085. https://doi.org/10.31857/S0374064124080067.
8. Замышляева А. А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 37 (254). С. 22–29.
9. Замышляева А. А., Юзеева А. В. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2010. № 16 (192). С. 23–31.
10. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014. 385 с.
11. Жегалов В. И. Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска – Лява // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 771–776. https://doi.org/10.14498/vsgtu1720.
12. Икези Х. Экспериментальное исследование солитонов в плазме // Солитоны в действии / под ред. К. Лонгрена. М. : Мир, 1981. С. 163–184.
13. Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Исследование влияния параметров на корректность задачи сопряжения для дифференциального уравнения Буссинеска – Лява // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, № 1. С. 30–42. https://doi.org/10.47475/2525-0101-2022-17103.
14. Корпусов М. О. Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М. : ЛИБРОКОМ, 2012. 256 с.
15. Пулькина Л. С. Задача с нелокальными интегральными условиями I рода для уравнения в частных производных четвертого порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2024. Т. 30, № 2. С. 30–44. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44.
16. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 336 с.
17. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М. : Мир, 1977. 622 с.
18. Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 3. С. 424–433.
19. Kozhanov A. I. Boundary-Value Problems for Sobolev-Type Equations with Irreversible Operator Coefficient of the Highest Derivatives // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 260, N 3. P. 307–314. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05695-1.
20. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / ed. H. Triebel. Amsterdam : North-Holland Publ., 1978. 528 p.

References

1. Alsyikova A.A. Nonlocal Problems with Integral Conditions for the Bussinesq Equation. *Matematicheskie Zametki SVFU*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 3–11 (in Russian)
2. Amirov Sh., Kozhanov A.I. *Global solvability of initial boundary-value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation Mathematical notes*, 2016, vol. 99, no. 2, pp. 183–191. https://doi.org/10.1134/s0001434616010211
3. Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. A Problem with a Nonlocal Condition for a Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics. *Vestnik Rossiiskikh Universitetov. Matematika*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. http://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. (in Russian)
4. Gabov S., Sveshnikov A. *Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear Problems in the Theory of Non-Steady-State Internal Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 344 p. (in Russian)
5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations And Systems Not Solvable With Respect To The Highest-Order Derivative. Boca Raton, CRC Press, 2003, 632 p. https://doi.org/10.1201/9780203911433
6. Dzhuraev T.D., Sopuev A.K. *Teoriia differentsialnykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka* [Theory of partial differential equations of even order]. Tashkent, Fan Publ., 2000, 144 p. (in Russian)
7. Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with a dominating higher partial derivative]. Kazan, Kazan University Press, 2014, 385 p. (in Russian)
8. Zhegalov V.I. On a Problem for the Generalized Bussinesq–Love Equation. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 771–776. https://doi.org/10.14498/vsgtu1720 (in Russian)
9. Zamyshliaeva A.A., Bychkov E.V. The Initial-Boundary Value Problem for a Nonlinear Modified Bussinesq Equation. *Differentsialnye Uravneniia*, 2024, vol. 60, no. 8, pp. 1076–1085. https://doi.org/10.31857/S0374064124080067 (in Russian)
10. Zamyshliaeva A.A. The Initial-Final Value Problem for the Inhomogeneous Bussinesq–Love Equation. *Vestnik Iuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriia: Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2011, no. 37 (254), pp. 22–29 (in Russian)
11. Zamyshliaeva A.A., Iuzeeva A.V. The Initial-Final Value Problem for the Bussinesq–Love Equation. *Vestnik Iuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriia: Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2010, no. 16 (192), pp. 23–31 (in Russian)
12. Ikezi H. Experiments on Solitons in Plasmas. *Solitons in Action.* Ed. by Longren K. New York, Academic Press, 1978, pp. 153–172.
13. Kozhanov A.I. Boundary-Value Problems for Sobolev-Type Equations with Irreversible Operator Coefficient of the Highest Derivatives. *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 260, no. 3, pp. 307–314. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05695-1
14. Korpusov M.O. *Razrushenie v nelineinykh volnovykh uravneniiakh s polozhitel'noi energiei* [Blow-up in Nonlinear Wave Equations with Positive Energy]. Moscow, Librokom Publ., 2012, 256 p. (in Russian)
15. Pulkina L.S. A problem with nonlocal integral 1st kind conditions for 4th order partial differential equation. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaia Seriia*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 30–44. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44. (in Russian)

16. Sobolev S.L. Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Rhode Island, AMS, 1969, 256 p.
17. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. New York, Wiley, 1974, 664 p.
18. Yuldashev T.K. On the Boundary Value Problem for a Three-Dimensional Analogue of the Boussinesq Differential Equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriia: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 424–433 (in Russian)
19. Kozhanov A.I., Shadrina N.N. Investigation Of The Influence Of Parameters On The Correctness Of The Conjugation Problem For The Boussinesq-Love Differential Equation. *Cheliabinskii Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 2022, vol. 7, no. 1, pp. 30–42. https://doi.org/10.47475/2525-0101-2022-17103 (in Russian)
20. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1978, 528 p.

Об авторах

Кожанов Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Российская Федерация, kozhanov@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Жигжитжапов Бато Валерьевич, Бурятский государственный университет, 670000, Российская Федерация, Улан-Удэ, zhbat120401@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-7027-2705

About the authors

Alexander I. Kozhanov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, kozhanov@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Bato V. Zhigzhitzhapov, Buryat State University, Ulan-Ude, 670000, Russian Federation, zhbat120401@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-7027-2705

Поступила в редакцию / Received 16.09.2025
Поступила после рецензирования / Revised 20.11.2025
Принята к публикации / Accepted 24.11.2025