Серия «Математика»
2025. Т. 53. С. 102—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.95
MSC 35Q30, 35A20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.102

О существовании и единственности R_ν-обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в весовых множествах

А. В. Рукавишников[1]✉

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Российская Федерация
✉ 78321a@mail.ru

Аннотация: Определено понятие R_ν-обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в весовых множествах в многоугольной двумерной области с входящим углом на границе. Благодаря введённому решению задачи возможно построение весового метода конечных элементов — метода для нахождения приближённого решения задачи без потери в точности. При этом получен порядок сходимости приближённого решения к точному решению задачи, независящий от величины входящего угла на границе области. Установлены соотношения, связывающие нормы функций в специальных множествах с билинейными формами в несимметричной вариационной постановке задачи с угловой сингулярностью. Доказано существование и единственность R_ν-обобщённого решения в весовых множествах.

Ключевые слова: угловая сингулярность, задача Озеена в кососимметричной форме, R_ν-обобщённое решение

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

Ссылка для цитирования: Рукавишников А. В. О существовании и единственности R_ν-обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в весовых множествах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 53. С. 102–117.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.102

Research article

On Existence and Uniqueness of R_ν-generalized Solution of Oseen Problem in Skew-symmetric Form in Weighted Sets

Alexey V. Rukavishnikov[1]✉

[1] Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk, Russian Federation
✉ 78321a@mail.ru

Abstract: The concept of an R_ν-generalized solution of the Oseen problem in a skew-symmetric form in weighted sets in a polygonal two-dimensional domain with an incoming angle on the boundary is defined. Thanks to such a solution definition of the problem, it is possible to construct a weighted finite element method. A method for finding an approximate solution to the problem without loss of accuracy. In this case, it is possible to obtain the convergence rate of an approximate solution to the exact one of the problem that is independent of the magnitude of the incoming angle on the boundary of the domain. In the paper, relations that connect the norms of functions in special sets with bilinear forms in an asymmetric variational formulation of the problem with an angular singularity are established. The existence and uniqueness of the R_ν-generalized solution in weighted sets is proved.

Keywords: angular singularity, Oseen problem in skew-symmetric form, R_ν-generalized solution

Acknowledgements: The research was carried out within the state assignment for IAM FEB RAS (N 075-00459-24-00).

For citation: Rukavishnikov A. V. On Existence and Uniqueness of the R_ν-generalized Solution of Oseen Problem in Skew-symmetric Form in Weighted Sets. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 53, pp. 102–117. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.102

1. Введение

Хорошо известно, что уравнения Навье – Стокса моделируют эволюцию потока воздуха, нефти или воды, вследствие чего решение такой задачи важно в большом диапазоне прикладных инженерных задач. Поиск аналитического решения задачи чрезвычайно затруднен. Поэтому на практике используют численные методы для нахождения приближённого решения задачи. Рассмотрим уравнения Озеена, которые являются вспомогательными при численном решении уравнений Навье – Стокса. Они возникают при применении неявного метода по времени для нелинейных уравнений в каждый момент времени. Также они возникают и при численном решении стационарных уравнений Навье – Стокса. Как в первом, так и во втором случае, применяя процедуру Пикара (итерации с фиксированной точкой) [2;6], приходим к задаче Озеена. Разносторонний анализ которых представляет фундаментальный интерес при решении нелинейных уравнений Навье – Стокса.

В качестве метода Галёркина, применяя метод конечных элементов (МКЭ), в частности элементы Тейлора – Худа, приходим к дискретизации, для которой закон сохранения массы выполняется лишь в слабом (интегральном) смысле (см. [1]). С потерей сохранения массы оказывается, что другие важные законы сохранения не выполняются, в частности теряется закон сохранения энергии. Факт потери сохранения энергии поправим при использовании не конвективной формы уравнений, а кососимметричной [23]. В настоящей работе нами будет теоретически изучена задача Озеена, полученная в результате линеаризации уравнений Навье – Стокса в кососимметричной форме. Особенностью рассмотрения задачи будет исследование свойств R_ν-обобщённого решения в многоугольной области с входящим углом на границе. Докажем его существование и единственность в множествах весовых пространств.

Впервые течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности входящего угла было изучено в [9]. Если вершина входящего угла ω, т. е. угла с величиной из интервала $(\pi, 2\pi)$, совпадает с началом координат, то решение задачи Озеена в кососимметрической форме с граничными условиями Дирихле (см. далее (2.1)–(2.3)) — компоненты вектора скоростей u_i и давления p в полярных координатах (r, φ) ведут себя как r^λ и $r^{\lambda-1}$ соответственно. При этом показатель λ есть наименьшее положительное решение уравнения $\sin(\lambda\omega) + \lambda \sin\omega = 0$, которое принимает значение меньшее 1 и уменьшается с увеличением величины угла ω от π до 2π. Это означает, что $u_i \notin W_2^2(\Omega)$ и $p \notin W_2^1(\Omega)$, а принадлежат меньшим пространствам. Например, компоненты вектора скоростей принадлежат лишь пространству $W_2^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega)$. Если рассмотреть угол $\frac{3\pi}{2}$, то показатель λ приблизительно равен $0,5445$. Более подробно (см. [5;8;10]). Этот факт принадлежности решения лишь пространству $W_2^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega)$ влечет за собой то, что любой классический приближённый метод будет сходиться не быстрее, чем $\mathcal{O}(h^\lambda)$, а значит, теряет в своём порядке точности по отношению к случаю выпуклой области [7]. Причём потеря порядка точности тем больше, чем больше величина входящего угла. Для того чтобы не происходило такой потери в точности приближённого метода, предложено определять решение как R_ν-обобщённое в весовых пространствах или множествах (см. [14; 20]). На основании его определения построен весовой МКЭ для различных дифференциальных задач: для эллиптических задач [21], в частности для задач теории упругости [12], включая задачу о трещине [13], задач гидродинамики [15;16]. Экспериментально определено, что порядок сходимости приближённого решения к точному решению не зависит от величины входящего угла. Для задачи теории упругости получены априорные оценки скорости сходимости, согласованные с результатами численных экспериментов [22].

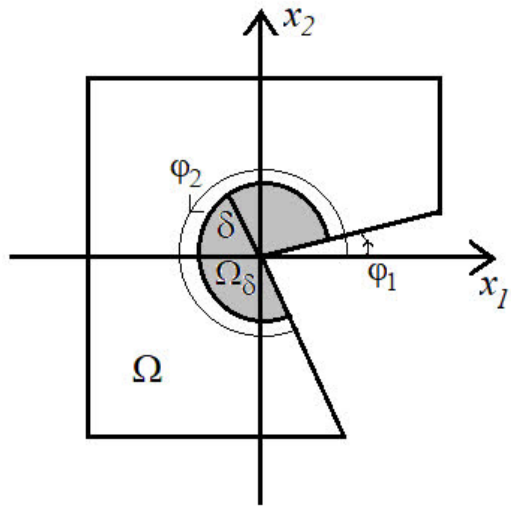

Рис. 1. Вид области Ω с входящим углом.

2. Постановка задачи Озеена в кососимметричной форме

Пусть область Ω — ограниченный невыпуклый многоугольник с границей $\partial\Omega$, содержащей входящий угол $\omega, \omega \in (\pi, 2\pi)$ с вершиной в начале координат $\mathcal{O} = (0,0), \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — элемент $\mathcal{R}^2, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ — его норма и мера соответственно.

Задача Озеена в кососимметричной форме состоит в том, чтобы для заданных функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ и $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ найти вектор скоростей $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и кинематическое давление p, удовлетворяющие системе уравнений и граничных условий:

$$\alpha\mathbf{u} - \theta\triangle\mathbf{u} + \big(\mathbf{W}\cdot\nabla\big)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\big(\text{ div } \mathbf{W}\big)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{2.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega, \tag{2.3}$$

где α и θ — известные положительные параметры.

Через Ω_δ обозначим пересечение круга с центром в начале координат и радиусом δ с $\bar{\Omega}, 0 < \delta \ll 1$ и определим в $\bar{\Omega}$ функцию $\rho(\mathbf{x})$, которую назовём весовой, $\rho(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in \Omega_\delta$ и $\rho(\mathbf{x}) = \delta, \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_\delta$. Пусть $D^l z(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|l|} z(\mathbf{x})}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}$, $l = (l_1, l_2)$, $|l| = \sum\limits_{i=1}^{2} l_i$, где $l_i \geq 0$ — целое. Пусть $W^k_{2,\beta}(\Omega)\,(\beta \geq 0)$ — пространство функций $z(\mathbf{x})$ с ограниченной нормой $\|z\|_{W^k_{2,\beta}(\Omega)} = \Big(\sum\limits_{0\leq|l|\leq k} \|\rho^\beta(\mathbf{x})|D^l z(\mathbf{x})|\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$, $|z|_{W^k_{2,\beta}(\Omega)} :=$

$\Big(\sum\limits_{|l|=k} \|\rho^{\beta}(\mathbf{x})|D^l z(\mathbf{x})|\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$ есть полунорма $z(\mathbf{x})$ в $W^k_{2,\beta}(\Omega)$. Если $k = 0$, то $W^0_{2,\beta}(\Omega)$ будем обозначать через $L_{2,\beta}(\Omega)$, норму $z(\mathbf{x})$ через $\|z\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}$. В $W^1_{2,\beta}(\Omega)$ введём энергетическую норму, зависящую от параметров α и θ задачи (2.1)–(2.3): $|||z|||_{\alpha,\theta,\beta(\Omega)} = \Big(\alpha\|z\|^2_{L_{2,\beta}(\Omega)} + \theta|z|^2_{W^1_{2,\beta}(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Далее определим пространство $\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\beta}(\Omega) = \{z \in W^k_{2,\beta}(\Omega) : D^l z|_{\partial\Omega} = 0, l = 0, ..., k-1\}$ с ограниченной нормой $W^k_{2,\beta}(\Omega)$.

Для функции $z(\mathbf{x})$ рассмотрим следующие условия:

$$0 < C_1 \le \|z\|_{L_{2,\beta}(\Omega\setminus\Omega_\delta)}, \tag{2.4}$$

$$|D^m z(\mathbf{x})| \le C_2\delta^{\beta-\tau}\rho^{\tau-\beta-m}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, m = 0, 1, \tag{2.5}$$

константа C_2 не зависит от m, а малый параметр τ не зависит от δ, β и $z(\mathbf{x})$. Через $L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ обозначим множество $z \in L_{2,\beta}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.4) и (2.5) при $m = 0$, с ограниченной нормой $L_{2,\beta}(\Omega)$. Пусть $L^0_{2,\beta}(\Omega, \delta) = \{z \in L_{2,\beta}(\Omega) : \|\rho^{\beta} z\|_{L_1(\Omega)} = 0\}$. Через $W^1_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ обозначим множества функций из $W^1_{2,\beta}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\beta}(\Omega)$ соответственно, удовлетворяющих (2.4) и (2.5). Определим пространство $W^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$ такое, что $z \in W^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$, если $\|z\|_{W^1_{\infty,\gamma}(\Omega,C_3)} = \max\Big\{\operatorname{vrai}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega}|\rho^{\gamma}(\mathbf{x})z(\mathbf{x})|, \operatorname{vrai}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega}\Big|\rho^{\gamma+1}(\mathbf{x})D^1 z(\mathbf{x})\Big|\Big\} \le C_3$, где константа C_3 не зависит от $z(\mathbf{x})$. Жирным шрифтом выделим пространства и множества вектор-функций, например $\mathbf{W}^1_{2,\beta}(\Omega) = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2) : z_i \in W^1_{2,\beta}(\Omega)\}$ с ограниченной нормой $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\beta}(\Omega)} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{2}\|z_i\|^2_{W^1_{2,\beta}(\Omega)}\Big)^{1/2}$.

Определим билинейные и линейную формы:

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \alpha a_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \theta a_2(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + a_3(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + a_4(\mathbf{z}, \mathbf{v}),$$

$$a_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \mathbf{z}\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},\ a_2(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{z} : \nabla(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},$$

$$a_3(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \big((\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{z}\big)\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},$$

$$a_4(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \big((\ \operatorname{div}\ \mathbf{W})\mathbf{z}\big)\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},\ l(\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},$$

$$b_1(\mathbf{v}, s) = -\int\limits_\Omega s\ \operatorname{div}\ (\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x},\ b_2(\mathbf{z}, q) = -\int\limits_\Omega (\rho^{2\nu}\, q)\ \operatorname{div}\ \mathbf{z}\, d\mathbf{x}.$$

Определение 1. *Пару функций* $(\mathbf{u}_\nu,\, p_\nu) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta) \times L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ *назовём* R_ν*-обобщённым решением задачи Озеена (2.1)–(2.3), что для всех пар* $(\mathbf{v}, q) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta) \times L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ *справедливы тождества*

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p_\nu) = l(\mathbf{v}), \tag{2.6}$$

$$b_2(\mathbf{u}_\nu, q) = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega), 0 \le \mu \le \nu$ *и* $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \le 1$.

3. Вспомогательные утверждения

В полном соответствии с Леммой 2.3 из [11] доказывается следующее.

Лемма 1. *Если* $z \in W^1_{2,\nu}(\Omega,\delta), \beta \le 1$, *то*

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \rho^{2(\nu-\beta)} z^2 d\mathbf{x} \le C_4^2(\beta)\delta^{2\nu+2-2\beta}\|z\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{3.1}$$

$C_4(\beta) = \frac{C_2}{C_1}\sqrt{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\tau+2-2\beta}}$, $(\varphi_2-\varphi_1)$ – *величина изменения* ω *(см. рис. 1).*

По аналогии с Леммой 1 устанавливается соответствие.

Лемма 2. *Если* $z \in W^2_{2,\beta}(\Omega), \beta \le 1$ *и выполнены условия:* $0 \le C_1 \le \|z\|_{L_{2,\nu}(\Omega\setminus\Omega_\delta)}, |z(\mathbf{x})| \le C_2\delta^{\nu-\tau}\rho^{\tau-\nu+1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta$, *то*

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \rho^{2(\nu-2-\beta)} x_i^2 z^2 d\mathbf{x} \le C_4^2(\beta)\delta^{2\nu+2-2\beta}\|z\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{3.2}$$

где $C_4(\beta)$ – *константа из Леммы 1.*

Лемма 3. *(Лемма 4 [17]). Функция* $z \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ *тогда и только тогда, когда* $\rho^\nu z \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\Omega,\delta)$ *и справедливы соотношения*

$$\|\nabla(\rho^\nu z)\|^2_{L_{2,0}(\Omega)} \le 2\|\nabla z\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} + 2\nu^2 C_4^2(1)\delta^{2\nu}\|z\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{3.3}$$

$$|z|^2_{W^1_{2,\nu}(\Omega)} \le 2\|\nabla(\rho^\nu z)\|^2_{L_{2,0}(\Omega)} + 2\nu^2 C_4^2(1)\delta^{2\nu}\|\rho^\nu z\|^2_{L_{2,0}(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Лемма 4. *(неравенство Фридрихса). Пусть* $z \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\Omega,\delta)$, *тогда*

$$\|z\|_{L_{2,0}(\Omega)} \le C_F\|\nabla z\|_{L_{2,0}(\Omega)}, \tag{3.5}$$

где C_F — *положительная константа, независящая от функции* z.

Лемма 5. *[17] (весовой аналог неравенства Фридрихса). Пусть $\nu > 0$. Тогда существует $\delta_0 = \delta_0(\nu) > 0$, что для произвольных $\delta \in (0, \delta_0]$ и $z \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta)$ справедлива оценка*

$$\|z\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} \le 2C_F \|\nabla z\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{3.6}$$

где $\delta_0 = \delta_0(\nu)$ такова, что $\nu^2 C_F^2 C_4^2(1)\delta_0^{2\nu} = \frac{1}{4}$ и C_F из Леммы 4.

Лемма 6. *Пусть $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$ и $\mathbf{z} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta)$, тогда*

$$a_3(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + a_4(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \Big(\big((\mathbf{W} \cdot \nabla)\rho^{2\nu} \big)\mathbf{z} \Big) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$ и $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta)$, для $i, j, k = 1, 2$:

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big) W_j z_k d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega} v_i \Big(\frac{\partial (\rho^{2\nu} W_j z_k)}{\partial x_j} \Big) d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega} v_i \Big(\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_j} \Big) W_j z_k d\mathbf{x} -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \Big(\frac{\partial W_j}{\partial x_j} \Big) v_i z_k d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \Big(\frac{\partial z_k}{\partial x_j} \Big) v_i W_j d\mathbf{x}. \tag{3.8}$$

Если сложить (3.8) при $(j, i, k) = (1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 2, 2)$, то

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \big((\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{v} \big) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \big((\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{z} \big) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu} \big((\text{ div } \mathbf{W})\mathbf{v} \big) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega} \Big(\big((\mathbf{W} \cdot \nabla)\rho^{2\nu} \big)\mathbf{v} \Big) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x}. \tag{3.9}$$

Если в (3.9) положить $\mathbf{v} = \mathbf{z}$, то получим тождество (3.7). □

Далее введём следующие множества:

$$K_1 = \{ \mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta) : \int\limits_{\Omega} s \text{ div } (\rho^{2\nu}\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0 \ \forall s \in L^0_{2,\nu}(\Omega, \delta) \},$$

$$K_2 = \{ \mathbf{z} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta) : \int\limits_{\Omega} (\rho^{2\nu} q) \text{ div } \mathbf{z} \, d\mathbf{x} = 0 \ \forall q \in L^0_{2,\nu}(\Omega, \delta) \}.$$

Замечание 1. Под множествами K_1 и K_2 можно понимать подмножества функций $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega, \delta)$, для которых выполнены равенства $\mathrm{div}(\rho^{2\nu}\mathbf{v}) = 0$ и $\mathrm{div}\mathbf{z} = 0$ соответственно в обобщенном смысле (см. [3]).

Пусть $\nu > 0$. Для любой $\mathbf{u} \in K_2$ найдется $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,\nu}(\Omega)$ (см. [7]), что

$$\mathbf{u} = \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big) \tag{3.10}$$

и $0 < C_1 \le \|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega\setminus\Omega_\delta)}$, $|D^k\psi(\mathbf{x})| \le C_2\delta^{\nu-\tau}\rho^{\tau-\nu-k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, k = 0, 1, 2$. Определим для $\mathbf{u} \in K_2$ соответствующую ей функцию

$$\mathbf{v} = \Big(\rho^{-2\nu}\frac{\partial(\rho^{2\nu}\psi)}{\partial x_2}, -\rho^{-2\nu}\frac{\partial(\rho^{2\nu}\psi)}{\partial x_1}\Big). \tag{3.11}$$

При этом $\mathbf{v} \in K_1$ (см. Теорему 1 [17]) и

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{cases} \Big(2\nu\rho^{-2}x_2\psi, -2\nu\rho^{-2}x_1\psi\Big), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \\ (0,0), \mathbf{x} \in \bar\Omega \setminus \Omega_\delta. \end{cases} \tag{3.12}$$

Лемма 7. *Пусть $\nu > 0$. Для $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10) и соответствующей ей $\mathbf{v} \in K_1$ вида (3.11) имеет место соотношение*

$$\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \le a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + 2\sqrt{2}\nu C_4^2(0)\delta^{2\nu+2}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Имеем $\rho^\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \rho^{-\nu}\frac{\partial(\rho^{2\nu}\psi)}{\partial x_i} - \rho^{-\nu}\Big(\frac{\partial\rho^{2\nu}}{\partial x_i}\Big)\psi$ и $\Big(\rho^\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial(\rho^{2\nu}\psi)}{\partial x_i}\Big) - \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial\rho^{2\nu}}{\partial x_i}\Big)\psi$, $i = 1, 2$, тогда

$$\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} = a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\rho^{2\nu}}{\partial x_i}\psi d\mathbf{x} = a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{i=1}^{2} I_i. \tag{3.14}$$

Оценим величину $|-I_1|$. Используя неравенство Коши – Шварца, Лемму 1 её оценку (3.1) и Лемму 2 — (3.2), обе при $\beta = 0$, выводим

$$|-I_1| \le 2\nu C_4^2(0)\delta^{2\nu+2}\|u_2\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$|-I_2| \le 2\nu C_4^2(0)\delta^{2\nu+2}\|u_1\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Складываем (3.15) и (3.16) и подставляем для оценки (3.14). □

Лемма 8. *(Лемма 6 [19]). Пусть $\varepsilon_1 > 0$ и $\nu > 0$. Пусть $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10) и соответствующая ей $\mathbf{v} \in K_1$ вида (3.11), тогда*
$\|\nabla(\rho^\nu\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \le a_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) +$

$$+15\varepsilon_1|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} + \nu^2 C_4^2(1)C_5^2\delta^{2\nu}\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{3.17}$$

где константа $C_5 = C_5(\nu, \varepsilon_1) > 0$ не зависит от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Лемма 9. *Пусть* $\nu > 0, \mathbf{z} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega, \delta), \mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \le 1$, *то*

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \Big(\big((\mathbf{W} \cdot \nabla) \rho^{2\nu} \big) \mathbf{z} \Big) \cdot \mathbf{z} d\mathbf{x} \Big| \le 4\nu C_3 C_4^2(\gamma) \delta^{2\nu+2-2\gamma} \|\mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}. \quad (3.18)$$

Доказательство. Если применить (3.1) при $\beta = \gamma \le 1$ в сочетании с $x_k \le \delta$ и (3.5) для $\rho^\nu u_i \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,0}(\Omega, \delta)$. Тогда для $k, i = 1, 2$, имеем

$$\Big| \int\limits_{\Omega} W_k \Big(\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_k} \Big) u_i^2 d\mathbf{x} \Big| = \Big| \int\limits_{\Omega} \Big(\rho^\gamma W_k \Big) \Big(\rho^{-\gamma} \Big(\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_k} \Big) u_i^2 \Big) d\mathbf{x} \Big| \le$$

$$\le 2\nu C_3 \Big| \int\limits_{\Omega_\delta} \rho^{2(\nu-1-\gamma)} x_k^2 u_i^2 d\mathbf{x} \Big| \le 2\nu C_3 C_4^2(\gamma) \delta^{2(\nu+1-\gamma)} \|u_i\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}.$$

Складывая по всем $i, k = 1, 2$, получаем неравенство (3.18). □

Лемма 10. *Пусть* $\nu > 0, \varepsilon_2 > 0$ *и* $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \le 1$, $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$ *определены с помощью (3.10) и (3.12) соответственно, тогда*

$$|a_3(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \le C_3 \varepsilon_2 |\mathbf{u}|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} + \frac{8}{\varepsilon_2} \nu^2 C_3 C_4^2(\gamma) \delta^{2\nu+2-2\gamma} \|\psi\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \quad (3.19)$$

Доказательство. Применим ε_2-неравенство, $x_j \le \delta, \mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$, $\gamma \le 1$, (3.2) при $\beta = \gamma$, представление $\mathbf{w}$ — (3.12), тогда для $i, k = 1, 2$: $\Big| \int\limits_{\Omega} W_k \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Big) \big(\rho^{2\nu} w_i \big) d\mathbf{x} \Big| \le$

$$\le C_3 \big(\frac{\varepsilon_2}{2} |u_i|^2_{W^1_{2,\nu}(\Omega)} + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_2} C_4^2(\gamma) \delta^{2\nu+4-2\gamma} \|\psi\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} \big). \quad (3.20)$$

Осталось просуммировать (3.20) по всем $i, k = 1, 2$. Получаем (3.19). □

Лемма 11. *Пусть* $\nu > 0, \varepsilon_3 > 0$ *и* $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \le 1$, $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$ *определены с помощью (3.10) и (3.12) соответственно, тогда* $|a_4(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \le$

$$\le \frac{\varepsilon_3}{2} C_3 C_4^2(1) \delta^{2\nu} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)} + \frac{4}{\varepsilon_3} \nu^2 C_3 C_4^2(\gamma) \delta^{2\nu+2-2\gamma} \|\psi\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Применим ε_3-неравенство, $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3)$, $\gamma \le 1$, оценку (3.1) при $\beta = \gamma$. Тогда для $i = 1, 2$, имеем $\Big| \int\limits_{\Omega} \big(\operatorname{div} \mathbf{W} \big) u_i \big(\rho^{2\nu} w_i \big) d\mathbf{x} \Big| \le$

$$\le C_3 \Big(\varepsilon_3 C_4^2(1) \delta^{2\nu} \|u_i\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} + \frac{4\nu^2}{\varepsilon_3} C_4^2(\gamma) \delta^{2\nu+2-2\gamma} \|\psi\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} \Big). \quad (3.22)$$

Суммируя соотношения (3.22) по $i = 1, 2$, получаем оценку (3.21). □

4. Существование и единственность R_ν-обобщённого решения

Теорема 1. *(о существовании и единственности). Пусть $\nu > 0$ и справедливы следующие утверждения:*
1) Существует $\delta_1 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_1]$:

$$\forall \mathbf{u} \in K_2 \qquad \sup_{\mathbf{v}\in K_1} \frac{a(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}} \geq \kappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.1}$$

$$\forall \mathbf{v} \in K_1 \qquad \sup_{\mathbf{u}\in K_2} \frac{a(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}} \geq \kappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.2}$$

$$\forall s \in L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta) \quad \sup_{\mathbf{v}\in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta)} \frac{b_i(\mathbf{v},s)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|s\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}} \geq \beta_i > 0; \tag{4.3}$$

2) Для любых $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta)$, $s, q \in L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta), \mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega), \gamma \leq 1, 0 \leq \mu \leq \nu$:

$$a(\mathbf{z},\mathbf{v}) \leq C_6 \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.4}$$

$$b_1(\mathbf{v},s) \leq C_7 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|s\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.5}$$

$$b_2(\mathbf{z},q) \leq C_8 \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|q\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.6}$$

$$l(\mathbf{v}) \leq C_9 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega)}, \tag{4.7}$$

где $\kappa, C_6, C_7, C_8, C_9$ — положительные постоянные.

Тогда существует единственное R_ν-обобщённое решение $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta) \times L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ задачи (2.1)–(2.3) в постановке (2.6), (2.7). Существует постоянная C_{10}, равная $\frac{C_9}{\kappa}\left(1 + \frac{\kappa + C_6}{\beta_1}\right)$, что

$$\|\mathbf{u}_\nu\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} + \|p_\nu\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} \leq C_{10} \|\mathbf{f}\|_{L_{2,\mu}(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Для доказательства Теоремы 1 нам потребуются следующие утверждения.

Теорема 2. *Существует $\varepsilon_1 > 0$, что для $\nu > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1, \nu, \alpha, \theta) > 0$, что для любого $\delta \in (0, \min\{\delta_0, \delta_2\}]$ и произвольной $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10) и соответствующей ей $\mathbf{v} \in K_1$ вида (3.11), для $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \leq 1$, справедливо соотношение*

$$\frac{1}{2} |||\rho^\nu \mathbf{u}|||^2_{\alpha,\theta,\mathbf{0}(\Omega)} \leq a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{4.9}$$

и для произвольной $\mathbf{u} \in K_2$ выполняется неравенство

$$\kappa_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v}\in K_1} \frac{a(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}}, \tag{4.10}$$

где $\kappa_1 = \frac{\min\{\alpha,\theta\}}{2C_{12}\max\{1+\frac{\theta}{2\alpha C_F^2},2\}}$ *и константа* C_{12} *из Теоремы 1 [17].*

Доказательство. 1. Пусть $\nu > 0$. Рассмотрим $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10) и соответствующую ей $\mathbf{v} \in K_1$ вида (3.11). Используя Леммы 9–11 — (3.18), (3.19) и (3.21) соответственно, в сочетании с (3.7) при $\mathbf{z} = \mathbf{u}$:

$$|a_3(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_4(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le C_3\varepsilon_2|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} + C_3\Big(2\nu C_4^2(\gamma)\delta^{2-2\gamma} + \frac{\varepsilon_3 C_4^2(1)}{2}\Big)\times$$

$$\times\delta^{2\nu}\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)} + 4\nu^2 C_3 C_4^2(\gamma)\Big(\frac{2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\Big)\delta^{2\nu+2-2\gamma}\|\psi\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \quad (4.11)$$

Применяя Леммы 7 и 8 — (3.13) и (3.17) соответственно, выводим

$$\alpha\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} + \theta\|\nabla(\rho^\nu\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \le a(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \Big[a_3(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a_4(\mathbf{u},\mathbf{v})\Big] +$$

$$+2\sqrt{2}\alpha\nu C_4^2(0)\delta^{2\nu+2}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}\cdot\|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} +$$

$$+15\varepsilon_1\theta|\mathbf{u}|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} + \theta\nu^2 C_4^2(1)C_5^2\delta^{2\nu}\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}. \quad (4.12)$$

Используя определение $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10), Лемму 4 — (3.5), имеем

$$\|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} \le C_F\|\rho^\nu\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Следовательно, применяя (4.11) и (4.13) для оценки слагаемых правой части (4.12) в сочетании с (3.4) Леммы 3, заключаем

$$\Big(\alpha - C_{11}\delta^{2\nu}\Big)\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} +$$

$$+\Big(\theta - (30\varepsilon_1\theta + 2C_3\varepsilon_2)\Big)\|\nabla(\rho^\nu\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \le a(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad (4.14)$$

где $C_{11} = C_{11}(\theta,\alpha,\gamma,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = C_4^2(1)\Big[\nu^2\big(30\varepsilon_1\theta + 2\varepsilon_2 C_3 + \theta C_5^2\big) + \frac{\varepsilon_3 C_3}{2}\Big] + 2\nu C_4^2(\gamma)C_3\Big[1 + 4\nu C_F^2\Big(\frac{2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\Big)\Big]\delta^{2-2\gamma} + 2\sqrt{2}\alpha\nu C_4^2(0)C_F\delta^2$.

Если в (4.14) положить $\varepsilon_1 = \frac{1}{120}, \varepsilon_2 = \frac{\theta}{8C_3}$ и $\varepsilon_3 = 1$, тогда существует величина $\delta_2 > 0$, что $C_{11}\delta_2^{2\nu} \le \frac{\alpha}{2}$ и для любого $\delta \in (0, \min\{\delta_0, \delta_2\}]$:

$$\frac{1}{2}\Big(\alpha\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} + \theta\|\nabla(\rho^\nu\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)}\Big) \le \Big(\alpha - C_{11}\delta^{2\nu}\Big)\|\rho^\nu\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} +$$

$$+\Big(\theta - (30\varepsilon_1\theta + 2C_3\varepsilon_2)\Big)\|\nabla(\rho^\nu\mathbf{u})\|^2_{\mathbf{L}_{2,0}(\Omega)} \le a(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

2. Применяя Лемму 3 — (3.4) и соотношение $2\nu^2 C_4^2(1)\delta_0^{2\nu} = \frac{1}{2C_F^2}$ из Леммы 5 для произвольного $\delta \in (0, \min\{\delta_0, \delta_2\}]$, имеем

$$|||\mathbf{u}|||^2_{\alpha,\theta,\nu(\Omega)} \le \max\{1 + \frac{\theta}{2\alpha C_F^2}, 2\}|||\rho^\nu \mathbf{u}|||^2_{\alpha,\theta,\mathbf{0}(\Omega)}. \tag{4.15}$$

В Теореме 1 [17] показано, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$, любой $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10), соответствующая ей $\mathbf{v}$ вида (3.11) принадлежит K_1 и

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \le C_{12}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}.$$

Из этого немедленно следует, что

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \le C_{12} \max\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\theta}\}|||\mathbf{u}|||^2_{\alpha,\theta,\nu(\Omega)}. \tag{4.16}$$

Применяя последовательно оценки (4.16), (4.15) и (4.9), заключаем $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \le$

$$\le 2C_{12} \max\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\theta}\} \max\{\frac{2\alpha C_F^2 + \theta}{2\alpha C_F^2}, 2\} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{4.17}$$

Поделим обе части (4.17) на $2C_{12} \max\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\theta}\} \max\{\frac{2\alpha C_F^2+\theta}{2\alpha C_F^2}, 2\}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}$ и определим точную верхнюю грань по всем $\mathbf{v} \in K_1$. □

Пусть $\nu > 0$. Рассмотрим $\mathbf{v} \in K_1$ такую, что существует $\varpi = \rho^{2\nu}\psi$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,\nu}(\Omega)\Big(0 < C_1 \le \|\psi\|_{L_{2,\nu}(\Omega\setminus\Omega_\delta)}, |D^m\psi(\mathbf{x})| \le C_2\delta^{\nu-\tau}\rho^{\tau-\nu-m+1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, m = 0, 1, 2\Big)$, что $\mathbf{v}$ имеет вид (3.11), а ей соответствующая $\mathbf{u} \in K_2$ — (3.10) (см. [17]). По аналогии с Теоремой 2 доказывается

Теорема 3. *Существует $\epsilon_1 > 0$, что для $\nu > 0$ существует $\delta_3 = \delta_3(\epsilon_1, \nu, \alpha, \theta) > 0$, что для любого $\delta \in (0, \min\{\delta_3, \delta_4\}]$ и произвольной $\mathbf{v} \in K_1$ вида (3.11) и соответствующей ей $\mathbf{u} \in K_2$ вида (3.10), для $\mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_3), \gamma \le 1$:*

$$\frac{1}{2}|||\rho^\nu \mathbf{v}|||^2_{\alpha,\theta,\mathbf{0}(\Omega)} \le a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{4.18}$$

и для произвольной $\mathbf{v} \in K_1$ выполняется неравенство

$$\kappa_2\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \le \sup_{\mathbf{u}\in K_2} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}}, \tag{4.19}$$

где $\kappa_2 = \frac{\min\{\alpha,\theta\}}{2C_{13}\max\{1+\frac{\theta}{2\alpha C_F^2},2\}}$, C_{13} и $\delta_4 = \min\{\delta_0, \sqrt{\frac{1+\tau}{8}}\}$ из Теоремы 3 [17].

Сформулируем утверждение относительно непрерывности билинейных $a(\cdot,\cdot)$, $b_1(\cdot,\cdot), b_2(\cdot,\cdot)$ и линейной $l(\cdot)$ форм.

Теорема 4. *Для $\nu > 0$ справедливы следующие оценки.*
Для любых $\mathbf{z},\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega,\delta), s,q \in L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta), \mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega,C_3), \mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega), \gamma \le 1, 0 \le \mu \le \nu$:

$$a(\mathbf{z},\mathbf{v}) \le C_6 \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.20}$$

$$b_1(\mathbf{v},s) \le C_7 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|s\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.21}$$

$$b_2(\mathbf{z},q) \le C_8 \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|q\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.22}$$

$$l(\mathbf{v}) \le C_9 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega)}, \tag{4.23}$$

$C_6 = \sqrt{8\Big(\alpha^2 + 32\theta^2 C_{15}^2 + C_3^2\Big[2C_{14}^2(\gamma) + C_{14}^4(\frac{\gamma+1}{2})\Big]\Big)}$,
$C_7 = 2\sqrt{2 + 3\nu^2 C_4^2(1)\delta^{2\nu}}, C_8 = \sqrt{2},\ C_9 = \sqrt{2}C_{16},\ C_{14}(\beta) = \sqrt{\frac{1+C_4^2(\beta)\delta^{2\nu+2}}{\delta^{2\beta}}}$,
$C_{15} = \Big(1 + \nu^2 C_F^2 C_4^2(1)\delta^{2\nu}\Big)\Big(1 + \nu^2 C_4^2(1)\delta^{2\nu}\Big)$ *и* C_{16} *константа в оценке норм вложения* $\mathbf{L}_{2,\mu}(\Omega)$ *в* $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$.

Доказательство. Оценки (4.21)–(4.23) установлены в Теореме 7 [18]. Получим (4.20). Пусть $\mathbf{z},\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega,\delta), \mathbf{W} \in \mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega,C_3), \gamma \le 1$:

$$[a(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 4(\alpha^2[a_1(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 + \theta^2[a_2(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 + [a_3(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 + [a_4(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2). \tag{4.24}$$

1. Оценим $[a_1(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2$ с помощью неравенства Коши – Шварца и соотношения $a_1b_1 + a_2b_2 \le \big(a_1 + a_2\big)\big(b_1 + b_2\big)$ для $a_j, b_j \ge 0$:

$$[a_1(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 2\|\mathbf{z}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.25}$$

2. Величина $[a_2(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2$ оценена в [18] и получено неравенство

$$[a_2(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 64C_{15}^2\|\mathbf{z}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.26}$$

3. Оценим $[a_3(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2$. Пусть $J_{k,i}(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega \Big(W_k \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\Big)\big(\rho^{2\nu} v_i\big)d\mathbf{x}, k,i = 1,2$. Применяя неравенство Коши – Шварца, имеем

$$[J_{k,i}(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le C_3^2\Big\|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\Big\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} \cdot K(v_i,\gamma,\Omega), \tag{4.27}$$

где $K(g,\beta,\Omega) = \int\limits_\Omega \rho^{2(\nu-\beta)} g^2 d\mathbf{x},\ g \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\nu}(\Omega,\delta), \beta \le 1$.

Оценим $K(g,\beta,\Omega)$. Очевидно $\|g\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} = \delta^{2\nu}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\delta} g^2 d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_\delta}\rho^{2\nu}g^2 d\mathbf{x}$ и $\delta^{2\nu}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\delta} g^2 d\mathbf{x} \le \|g\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}$, следовательно,

$$\delta^{2\gamma}K(g,\beta,\Omega) \le \|g\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)} + \delta^{2\beta}K(g,\beta,\Omega_\delta). \tag{4.28}$$

Используя (3.1) для $\beta \le 1$, имеем $K(g,\beta,\Omega_\delta) \le C_4^2(\beta)\delta^{2\nu+2-2\beta}\|g\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}$ и, подставляя соотношение для оценки правой части (4.28), выводим

$$K(g,\beta,\Omega) \le C_{14}^2(\beta)\|g\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}, \tag{4.29}$$

где $C_{14}(\beta) = \sqrt{\frac{1+C_4^2(\beta)\delta^{2\nu+2}}{\delta^{2\beta}}}$. Благодаря (4.29) оценка (4.27) примет вид

$$[J_{k,i}(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le C_3^2C_{14}^2(\gamma)\Big\|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\Big\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}\cdot\|v_i\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.30}$$

Суммируя (4.30) по $i,k=1,2$, и применяя оценку при выводе (4.25):

$$[a_3(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 4C_3^2C_{14}^2(\gamma)\|\mathbf{z}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}\cdot\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.31}$$

4. Оценим $[a_4(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2$. Пусть $L_i(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega\Big(\big(\text{ div }\mathbf{W}\big)z_i\Big)\big(\rho^{2\nu}v_i\big)d\mathbf{x}$, $i=1,2$. Используя неравенство Коши – Шварца, выводим

$$[L_i(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 4C_3^2K(z_i,\frac{\gamma+1}{2},\Omega)\cdot K(v_i,\frac{\gamma+1}{2},\Omega). \tag{4.32}$$

Применяя оценку (4.29) при $\beta = \frac{\gamma+1}{2} \le 1(\gamma\le 1)$, заключаем

$$[L_i(\mathbf{W},\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le C_3^2C_{14}^4(\frac{\gamma+1}{2})\|z_i\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}\cdot\|v_i\|^2_{L_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.33}$$

Используя (4.33) для каждого $i=1,2$, имеем

$$[a_4(\mathbf{z},\mathbf{v})]^2 \le 2C_3^2C_{14}^4(\frac{\gamma+1}{2})\|\mathbf{z}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}\cdot\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega)}. \tag{4.34}$$

Подставляя (4.25), (4.26), (4.31) и (4.34) в (4.24), получаем оценку (4.20). □

Доказательство. Теоремы 1. Пусть $\nu > 0$. Существует $\delta_5 > 0$, что выполняются оценки (4.3) (см. Теорему 2.2 [11]). Неравенства (4.1) и (4.2) непосредственно вытекают из (4.10) и (4.19) для $\kappa = \min\{\kappa_1,\kappa_2\}$ и всех $\delta \in (0,\min\{\delta_0,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}]$. Для доказательства существования и единственности R_ν-обобщённого решения для всех $\delta\in(0,\delta_1], \delta_1 = \min\{\delta_0,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5\}$, при выполнении (4.4)–(4.7), воспользуемся Теоремой 2.1 в сочетании с Замечанием 2.1 работы [3]. Оценка (4.8) устанавливается стандартными приёмами (см. [4]). □

5. Заключение

В работе доказано существование единственного R_ν-обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в многоугольной невыпуклой области с входящим углом на границе в весовых множествах.

В дальнейшем на основании определённого R_ν-обобщённого решения в несимметричной вариационной постановке построим весовой МКЭ. Реализуем численный подход и проведём анализ численных результатов.

References

1. Belenli M.A., Rebholz L.G., Tone F. A note on the importance of mass conservation in lone-time stability of Navier-Stokes simulations using finite elements. *Applied Mathematics Letters*, 2015, vol. 45, pp. 98–102. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.01.018.
2. Benzi M., Golub G.H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 2005, vol. 14, pp. 1–137. https://doi.org/10.1017/S0962492904000212.
3. Bernardi S., Canuto C., Maday Y. Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1988, vol. 25, no. 6, pp. 1237–1271. https://doi.org/10.1137/0725070.
4. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. *Mixed finite element methods and applications*. Berlin/Heidelberg, Springer, 2013, 685 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5.
5. Dauge M. Stationary Stokes and Navier–Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1989, vol. 20, pp. 74–97. https://doi.org/10.1137/0520006.
6. Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford, Oxford University Press, 2005, 416 p.
7. Girault V., Raviart P.A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Berlin, Springer-Verlag, 1986, 374 p.
8. Guo B., Schwab C. Analytic regularity of Stokes flow on polygonal domains in countably weigted Sobolev spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, vol. 190, pp. 487–519. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.02.018.
9. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, vol. 18, no. 1, pp. 1–18. https://doi.org/10.1017/S0022112064000015.
10. Orlt M., Sändig A.M. Regularity of viscous Navier-Stokes flows in nonsmooth domains. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 1995, pp. 185–201.
11. Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A. New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. *International Journal of Computational Methods*, 2022, vol. 19, no. 9, 2250012. https://doi.org/10.1142/S0219876222500128.
12. Rukavishnikov V.A. Weighted FEM for two-dimensional elasticity problem with corner singularity. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 2016, vol. 112, pp. 411–419. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39929-4_39.

13. Rukavishnikov V.A. Body of optimal parameters in the weighted finite element method for the crack problem. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 4, pp. 2159–2170. https://doi.org/10.22055/jacm.2021.38041.3142.
14. Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G. On the R_ν-generalized solution of the Lamé system with corner singularity. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, pp. 421–423. https://doi.org/10.1134/S1064562415040080.
15. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 341, pp. 144–156. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.04.014.
16. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity. *Symmetry*, 2019, vol. 11, no. 1, 54. https://doi.org/10.3390/sym11010054.
17. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 6, 889. https://doi.org/10.3390/math10060889.
18. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the existence and uniqueness of an R_ν-generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 10, 1752. https://doi.org/10.3390/math10101752.
19. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023, vol. 429, 115218. https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115218.
20. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Dirichlet problem with corner singularity. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, 1870. https://doi.org/10.3390/math8111870.
21. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error estimate FEM for the Nikol'skij-Lizorkin problem with degeneracy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 403, 113841. https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113841.
22. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. *Computers & Mathematics with Applications*, 2023, vol. 151, pp. 408-–417. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.10.021.
23. Temam R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. Studies in mathematics and its applications.* Amsterdam, North-Holland, 1984, 526 p.

Об авторах

Рукавишников Алексей Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, 680030, Российская Федерация, 78321a@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7585-4559

About the authors

Alexey V. Rukavishnikov, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof., Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk, 680030, Russian Federation, 78321a@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7585-4559

Поступила в редакцию / Received 25.09.2024
Поступила после рецензирования / Revised 29.10.2024
Принята к публикации / Accepted 07.11.2024