Серия «Математика»
2025. Т. 53. С. 165—172

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Персоналии

УДК 012
MSC 01A70
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.165

Развитие методов решения линейно-квадратичных задач оптимального управления в трудах профессора В. А. Срочко (к 80-летию со дня рождения)

В. Г. Антоник[1], **А. В. Аргучинцев**[1]✉

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ arguch@math.isu.ru

Аннотация: Приведен краткий обзор некоторых результатов, полученных при исследовании линейно-квадратичных задач оптимального управления одним из основателей иркутской школы оптимального управления профессором В. А. Срочко.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейно-квадратичные задачи, параметризация, численные методы

Ссылка для цитирования: Антоник В. Г., Аргучинцев А. В. Развитие методов решения линейно-квадратичных задач оптимального управления в трудах профессора В. А. Срочко (к 80-летию со дня рождения) // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 53. С. 165–172.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.165

Personalia

Development of Methods for Solving Linear-Quadratic Optimal Control Problems in the Scholarly Works of Professor V. A. Srochko (to the 80th Anniversary of His Birth)

Vladimir G. Antonik[1], **Alexander V. Arguchintsev**[1]✉

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

✉ arguch@math.isu.ru

Abstract: The paper provides a brief review of some results obtained in the study of linear-quadratic optimal control problems by one of the founders of the Irkutsk school of optimal control Professor V. A. Srochko.

Keywords: optimal control, linear-quadratic problems, parameterization, computational methods

For citation: Antonik V. G., Arguchintsev A. V. Development of Methods for Solving Linear-Quadratic Optimal Control Problems in the Scholarly Works of Professor V. A. Srochko (to the 80th Anniversary of His Birth). *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 53, pp. 165–172. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.165

4 июня 2025 года 80-летний юбилей отметил один из самых известных математиков Иркутского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор Владимир Андреевич Срочко. Основные научные интересы Владимира Андреевича связаны с теорией и методами оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также отдельными классами уравнений с частными производными гиперболического типа. В этой области им опубликовано более 180 работ, успешно защищены кандидатская (Институт математики АН БССР, г. Минск, 1970 г.) и докторская (Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова, 1988 г.) диссертации. Достаточно подробный обзор жизненного пути и публикаций юбиляра приведен в [1]. В данной статье изложены некоторые результаты В. А. Срочко в области

линейно-квадратичных задач оптимального управления, получившие дальнейшее развитие в недавних исследованиях.

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи (линейная система дифференциальных уравнений, квадратичный функционал) традиционно занимают приоритетное место в силу своей теоретической и прикладной значимости. В частности, одним из распространенных методов решения обратных задач математической физики является их сведение к задачам оптимального управления с критериями качества типа квадрата нормы. Спектр возможных постановок и соответствующих результатов в этой области достаточно широк. На уровне иллюстрации основных идей выделим линейно-квадратичные задачи при наличии ограничений на управление с ориентировкой только на программное решение.

$$\begin{aligned}\Phi(u) =&\langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_T \langle x(t), Q(u(t),t)x(t)\rangle dt \to \min,\ u \in W,\\ \dot{x} =&A(u,t)x + b(u,t),\ x(t_0) = x^0,\\ W =&\Big\{u \in \mathrm{PC}(T):\ u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1]\Big\}.\end{aligned} \tag{P}$$

Здесь $\mathrm{PC}(T)$ – множество кусочно-непрерывных на отрезке T вектор-функций. Отметим, что линейный вариант этой задачи получается при нулевых матрицах квадратичных форм D и $Q(u,t)$: $D = 0$, $Q(u,t) \equiv 0$, $t \in T$. Задача (P) существенно отличается от классических постановок линейно-квадратичных задач оптимального управления. Во-первых, предполагается, что матрицы D и Q симметричны, но не обязательно знакоопределены. Во-вторых, даже в случае неотрицательной определенности этих матриц (P) не относится к классу линейно-выпуклых задач, в которых принцип максимума Л. С. Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием глобального минимума. Это объясняется тем, что матрица коэффициентов $A(u,t)$ в системе обыкновенных дифференциальных уравнений зависит от управляющего воздействия.

Прежде всего, выделим результаты В. А. Срочко, связанные с построением серии вычислительных методов, основанных на точных (без остаточных членов) формулах приращения целевого функционала, что позволяет говорить об их нелокальном характере, а именно при построении приближений не требуется решать дополнительных задач по варьированию и выбору соответствующих параметров [2–4; 6–8; 12–14].

Составим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(u,t)x + b(u,t)\rangle - \frac{1}{2}\langle x, Q(u,t)x\rangle.$$

Пусть на k-м шаге метода имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$, $k = 0, 1, \ldots$

Найдем решение $(\psi^k(t), \Psi^k(t))$, $t \in T$ векторно-матричной задачи Коши

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x^k(t), u^k(t), t),\ \psi(t_1) = -c - Dx^k(t_1),$$
$$\dot{\Psi} = -A(u^k(t), t)^T\Psi - \Psi A(u^k(t), t) + Q(u^k(t), t),\ \Psi(t_1) = -D.$$

Сформируем вспомогательное управление

$$w(x, t) = \arg\max_{v \in U} H(p^k(t, x), x, v, t),\ x \in R^n,\ t \in T,$$

где вектор-функция $p^k(t, x)$ вычисляется по правилу

$$p^k(t, x) = \psi^k(t) + \Psi^k(t, u)(x - x^k(t)),\ x \in R^n.$$

Найдем фазовую траекторию $x^{k+1}(t)$ через решение задачи Коши для фазовой системы с управлением $u = w(x, t)$ и вычислим следующее приближение:

$$u^{k+1}(t) = w(x^{k+1}(t), t),\ t \in T.$$

В силу точной формулы приращения

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) = -\int_T \Delta_{u^{k+1}(t)} H(p^k(t, x^{k+1}(t)), x^{k+1}(t), u^k(t), t)dt$$

справедливо свойство улучшения $\Phi(u^{k+1}) \leqslant \Phi(u^k)$. При этом равенство $u^{k+1}(t) = u^k(t)$, $t \in T$ означает, что управление $u^k(t)$ удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина (ПМ). Отметим, что улучшение достигается ценой решения двух векторных и одной матричной задачи Коши.

Для линейной задачи описанный механизм улучшения упрощается. Поскольку $\Psi^k(t) \equiv 0$, $t \in T$, то $p^k(t, x) = \psi^k(t)$. В результате трудоемкость улучшения составит только две векторных задач Коши для фазовой и сопряженной систем.

Узким местом этого метода является возможность стабилизации (т. е. отсутствие улучшения) управлений, удовлетворяющих ПМ. Причем при формулировке результатов, связанных со сходимостью, нужны достаточно жесткие условия, сужающие, вообще говоря, область применения метода.

Для преодоления этого недостатка проводится параметризация целевого функционала в задаче (P) по правилу [4; 8; 11]

$$\Phi_\alpha(u, u^k) = \Phi(u) + \alpha J(u, u^k)$$

с положительным параметром $\alpha > 0$, где

$$J(u, u^k) = \frac{1}{2}\|x(t_1, u) - x^k(t_1)\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_T \|x(t, u) - x^k(t)\|^2 dt.$$

Понятно, что задача (P) с функционалом $\Phi_\alpha(u, u^k)$ останется квадратичной. Отметим, что при реализации описанной итерационной схемы следует учесть, что матричная задача Коши здесь примет вид

$$\dot{\Psi} = -A(u^k(t), t)^T\Psi - \Psi A(u^k(t), t) + Q(u^k(t), t) + \alpha E,\ \Psi(t_1) = -D - \alpha E.$$

Результат указанного преобразования задачи состоит в том, что для приближения $u^{k+1}(t)$ справедлива оценка уменьшения функционала Φ:

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \leqslant -\alpha J(u^{k+1}, u^k).$$

Величина $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ в данной ситуации является невязкой ПМ для управления $u^k(t)$. Сходимость метода характеризуется свойством $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$.

В выпуклом варианте задачи (P), когда $D \geqslant 0, Q(u, t) = Q(t) \geqslant 0$, $A(u, t) = A(t),\ t \in T$, метод генерирует минимизирующую последовательность управлений $\{u^k\}$.

Еще одним достоинством проведенной параметризации задачи (P) является возможность сформулировать результат, усиливающий ПМ: для оптимальности управления $u^k(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы фазовая траектория $x^k(t)$ была единственным решением задачи Коши

$$\dot{x} = A(w(x, t), t)x + b(w(x, t), t),\ x(t_0) = x^0.$$

Это означает, что предложенный В. А. Срочко метод может улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума.

Идея параметризации целевого функционала нашла интересное развитие в недавних работах В. А. Срочко.

Здесь нужно отметить нестандартный вариант дискретизации задачи (P), основанный на решении матричной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. Этот подход был реализован сначала для кусочно-постоянных управлений [5; 10] и совсем недавно для кусочно-линейных управляющих воздействий. Классическим способом дискретизации задач оптимального управления является замена обыкновенных дифференциальных уравнений их конечно-разностными аналогами. При этом размерность возникающей задачи математического программирования катастрофически возрастает с уменьшением шага разностной схемы. Предложенный В. А. Срочко вариант дискретизации лишен указанного недостатка.

В статьях [5; 9; 10] рассмотрены параметрические семейства задач оптимального управления и вопросы параметрической трансформации невыпуклых задач оптимального управления. Параметры фигурируют в целевых функционалах. Например, в [10] критерий качества имеет следующий вид:

$$\Phi(u,x) = 1/2\ \alpha\langle x(T), Px(T)\rangle + 1/2 \int_{t_0}^{T} [\beta\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \gamma u^2(t)]dt.$$

Здесь управление $u(t)$ является скалярной функцией, параметры α, β, γ положительны, а матрицы P и $Q(t)$ симметричны.

В указанной выше серии работ В. А. Срочко получены условия на параметры, которые выделяют выпуклые задачи оптимального управления или их конечномерные аналоги. В результате строятся выпуклые оптимизационные задачи, которые обеспечивают возможность улучшения управлений в исходных невыпуклых задачах.

Данный подход нашел достаточно неожиданное применение в многокритериальных задачах оптимального управления. Параметры в целевом функционале могут интерпретироваться как коэффициенты линейной свертки, порождающей парето-оптимальные решения. При этом каждая из скалярных задач оптимального управления может являться невыпуклой, а линейная свертка приводит к линейно-выпуклой задаче, которую можно исследовать на глобальный минимум. В этом направлении исследования еще продолжаются.

Список источников

1. Антоник В. Г., Аргучинцев А. В. К 75-летию со дня рождения профессора В. А. Срочко // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 34. С. 126–134. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.126
2. Антоник В. Г., Срочко В. А. К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 32, № 7. С. 979–991.
3. Антоник В. Г., Срочко В. А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 4. С. 564–572.
4. Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.
5. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, вып. 1. С. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115

6. Срочко В.А. Метод фазовой линеаризации в задачах оптимального управления со свободным правым концом // Известия вузов. Математика. 1992. № 7. С. 70–77.
7. Срочко В. А. Метод квадратичной фазовой аппроксимации для решения задач оптимального управления // Известия вузов. Математика. 1993. № 12. С. 81–88.
8. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000. 160 с.
9. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметрическая трансформация невыпуклых задач оптимального управления // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры ВИНИТИ. 2025. Т. 241. С. 64–70. https://doi.org/10.36535/2782-4438-2025-241-64-70
10. Срочко В. А., Аргучинцев А. В. Параметрическая регуляризация функционала в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 32–44. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32
11. Срочко В. А., Душутина С. Н., Пудалова Е. И. Регуляризация принципа максимума и методов улучшения в квадратичных задачах оптимального управления // Известия вузов. Математика. 1998. № 12. С. 82–92.
12. Срочко В. А., Мамонова Н. В. Итерационные процедуры решения задач оптимального управления на основе квазиградиентных аппроксимаций // Известия вузов. Математика. 2001. № 12. С. 55–67.
13. Срочко В. А., Пудалова Е. И. Методы нелокального улучшения допустимых управлений в линейных задачах с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2000. № 12. С. 78–88.
14. Срочко В. А., Ушакова С. Н. Метод полной квадратичной аппроксимации в задачах оптимального управления // Известия вузов. Математика. 2004. № 1. С. 87–93.

References

1. Antonik V.G., Arguchintsev A.V. To the 75th anniversary of the birth of professor V. A. Srochko. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 126-134. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.126 (in Russian)
2. Antonik V.G., Srochko V.A. The solution of optimal control problems using linearization methods. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 7, pp. 859–871. (in Russian)
3. Antonik V.G., Srochko V.A. The projection method in linear-quadratic problems of optimal control. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 4, pp. 543–551. (in Russian)
4. Arguchintsev A.V., Dykhta V.A., Srochko V.A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum. *Russian Math.*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 1–35. https://doi.org/10.3103/S1066369X09010010 (in Russian)
5. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Procedure for regularization of bilinear optimalcontrol problems based on a finite-dimensional model. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115 (in Russian)

6. Srochko V.A. The phase linearization method in optimal control problems with a free right end. *Russian Math.*, 1992, vol. 36, no. 7, pp. 68–75. (in Russian)
7. Srochko V.A. The quadratic phase approximation method for solving optimal control problems. *Russian Math.*, 1993, vol. 37, no. 12, pp. 81–88. (in Russian)
8. Srochko V.A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2000, 160 p. (in Russian)
9. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. Parametric transformation of nonconvex optimal control problems *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Priljzheniya. Tematicheskie Obzory VINITU*, 2025, vol.241, pp. 64–70. https://doi.org/10.36535/2782-4438-2025-241-64-70 (in Russian)
10. Srochko V.A., Arguchintsev A.V. Parametric regularization of the functional in a linear-quadratic optimal control problem. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 32–44. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32 (in Russian)
11. Srochko V.A., Dushutina S.N., Pudalova E.I. Regularization of the maximum principle and of improvement methods in quadratic optimal control problems. *Russian Math.*, 1998, vol. 42, no. 12, pp. 77–87. (in Russian)
12. Srochko V.A., Mamonova N.V. Iterative procedures for solving optimal control problems based on quasigradient approximations. *Russian Math.*, 2001, vol. 45, no. 12, pp. 52–64. (in Russian)
13. Srochko V.A., Pudalova E.I. Methods for the nonlocal improvement of admissible controls in linear problems with delay. *Russian Math.*, 2000, vol. 44, no. 12, pp. 76–86. (in Russian)
14. Srochko V.A., Ushakova S.N. The method of complete quadratic approximation in optimal control problems. *Russian Math.*, 2004, vol. 48, no. 1, pp. 85–90. (in Russian)

Об авторах

Антоник Владимир Георгиевич, канд. физ.-мат. наук, доц., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, vga@math.isu.ru

Аргучинцев Александр Валерьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

About the authors

Vladimir G. Antonik, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, vga@math.isu.ru

Alexander V. Arguchintsev, Dr. Sci. (Phys.Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

Поступила в редакцию / Received 10.07.2025
Поступила после рецензирования / Revised 01.08.2025
Принята к публикации / Accepted 04.08.2025