



Серия «Математика»
2025. Т. 53. С. 69–84

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.911.5

MSC 34A60, 34K09

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.69>

О методе направляющих функций в задаче о существовании ограниченных решений дифференциальных включений

С. В. Корнев¹, П. С. Корнева¹, В. В. Обуховский^{1✉}

¹ Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж,
Российская Федерация
✉ valerio-ob2000@mail.ru

Аннотация: В конце XX — начале XXI в. в связи с открывшимися новыми возможностями приложений к актуальным задачам математики, механики, теории управления, физики и других наук, возникла необходимость в существенном расширении класса рассматриваемых направляющих функций, впервые введенного в рассмотрение М. А. Красносельским и А. И. Перовым. В частности, для дифференциальных уравнений были введены классы направляющих функций на заданном множестве и многолистных векторных направляющих функций, обобщенные в дальнейшем на случай дифференциальных включений.

В работе наряду с классическим методом направляющих функций применяются метод обобщенных направляющих функций на заданном множестве и метод многолистных векторных направляющих функций к задаче о существовании ограниченных решений в нелинейных объектах, описываемых дифференциальными включениями, правая часть которых имеет выпуклые компактные значения, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Ключевые слова: направляющая функция, ограниченное решение, дифференциальное включение, условия Каратеодори

Благодарности: Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках реализации Президентской программы исследовательских проектов (проект 22-71-10008), работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы ОТГЕ-2024-0002).

Ссылка для цитирования: Корнев С. В., Корнева П. С., Обуховский В. В. О методе направляющих функций в задаче о существовании ограниченных решений дифференциальных включений // Известия Иркутского государственного универ-

ситета. Серия Математика. 2025. Т. 53. С. 69–84.
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.69>

Research article

On the Method of Guiding Functions in the Problem of the Existence of Bounded Solutions for Differential Inclusions

Sergey V. Kornev¹, Polina S. Korneva¹, Valerii V. Obukhovskii¹✉

¹ Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation

✉ valerio-ob2000@mail.ru

Abstract: At the end of the 20th — beginning of the 21st centuries, in connection with the new opportunity of applications to current problems of mathematics, mechanics, control theory, physics and other sciences, the need arose for a significant expansion of the classes of guiding functions under consideration, first introduced by M. A. Krasnosel'skii and A. I. Perov. In particular, for differential equations, a class of guiding functions on a given set and a class of multivalent vector guiding functions were introduced, which were later generalized to the case of differential inclusions. In this paper, along with the classical method of guiding functions, the method of guiding functions on a given set and the method of multivalent vector guiding functions are applied to the problem of the existence of bounded solutions in nonlinear objects described by differential inclusions, the right-hand side of which has convex compact values, satisfies the upper Caratheodory conditions and the sublinear growth condition.

Keywords: guiding function, bounded solution, differential inclusion, Caratheodory conditions

Acknowledgements: The work of the second author was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation within the framework of the implementation of the Presidential program of research projects (project 22-71-10008), the work of the third author was carried out with the financial support of the Ministry of Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment in the field of science (topic number OTGE-2024-0002).

For citation: Kornev S. V., Korneva P. S., Obukhovskii V. V. On the Method of Guiding Functions in the Problem of the Existence of Bounded Solutions for Differential Inclusions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 53, pp. 69–84. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.69>

1. Введение

В середине XX в. М. А. Красносельским и А. И. Перовым был предложен эффективный и геометрически наглядный способ решения задачи о существовании периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений на основе понятия направляющей функции (см. [8]–[11], [22]).

В дальнейшем классический метод направляющих функций был развит в различных направлениях. Достаточно успешным оказалось его ис-

пользование в решении периодической задачи для дифференциальных включений (см. [2; 4; 14; 17; 25]).

Существенная модификация классического метода направляющих функций потребовалась для его применения к исследованию более сложных объектов, таких как функционально-дифференциальные уравнения (см. [16]) и включения (см. [5; 6; 25]), функционально-дифференциальные включения с каузальными операторами (см. [21]).

Заметим, что роль дифференциальных включений как математического аппарата, описывающего нелинейные управляемые системы, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики, хорошо известна (см., например, [1; 2; 13; 15; 17; 19; 20]).

В настоящей работе исследуется задача о существовании ограниченных решений дифференциальных включений. В качестве основного инструмента используется понятие классической направляющей функции, а также его модификации — понятия направляющей функции на заданном множестве (см. [4; 23; 24]) и многолистной направляющей функции (см. [3; 12; 27]).

2. Основные понятия и определения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [2; 15; 17; 19]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y . Если Y — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y .

Определение 1. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$, следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε -окрестность множества.

Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется замкнутым, если его график

$$\Gamma_F = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y, \quad y \in F(x)\}$$

есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

Определение 3. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется компактным, если область значений $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$ относительно компактна в Y , т. е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y .

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ будем называть просто компактным.

Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 4. Однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется сечением мультиотображения F , если

$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого } x \in X.$$

Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 5. Мультифункция $F : I \rightarrow K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

является измеримым подмножеством I .

Определение 6. Мультиотображение $F : I \times X \rightarrow K(Y)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, если:

- (i) для каждого $x \in X$ мультифункция $F(\cdot, x) : I \rightarrow K(Y)$ измерима;
- (ii) почти для каждого $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : X \rightarrow K(Y)$ пн. св.

Определение 7. Мультиотображение $F : I \times X \rightarrow K(Y)$ удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует положительная суммируемая по Лебегу на I функция $\alpha(\cdot)$, такая, что п. в. $t \in I$

$$\|F(t, x)\| := \max_{y \in F(t, x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

3. Основные результаты

Приведем аналог леммы Красносельского (см. [10], Лемма 8.1).

Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста на любом множестве $[a; b] \times \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Определение 8. Под решением включения (3.1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (3.1).

Лемма 1. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность решений дифференциального включения (3.1) такая, что

(i) каждое решение $x_n(t)$ определено на промежутке $[-t_n, t_n]$, причем $t_n \rightarrow \infty$;

(ii) существует ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $x_n(t) \in \Omega$, $t \in [-t_n, t_n]$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда дифференциальное включение (3.1) имеет по крайней мере одно решение $x(t)$, определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ и такое, что $x(t) \in \bar{\Omega}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для некоторого $p > 0$ рассмотрим последовательность решений $\{x_n(t)\}$ ($t_n > p$) только на промежутке $[-p, p]$. Из условий, наложенных на F , вытекает, что эта последовательность решений равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Следовательно, по теореме Арцелла – Асколи, из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_n^{(1)}(t)\}$, равномерно сходящуюся на $[-p, p]$. Из нее аналогичным образом можно выделить подпоследовательность $\{x_n^{(2)}(t)\}$, которая будет равномерно сходиться уже на промежутке $[-2p, 2p]$. Продолжая этот процесс так далее, построим последовательность подпоследовательностей $\{x_n^{(k)}(t)\}$ так, что каждая последовательность $\{x_n^{(k+1)}(t)\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n^{(k)}(t)\}$ и сходится равномерно на промежутке $[-(k+1)p, (k+1)p]$. Тогда диагональная последовательность $\{x_n^{(n)}(t)\}$ будет сходиться к некоторой функции $x_*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно на каждом конечном промежутке. Ясно, что $x_*(t) \in \bar{\Omega}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Осталось показать только, что $x_*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального включения (3.1). Рассмотрим произвольный конечный промежуток $[-d, d] \subset \mathbb{R}$. Последовательность решений $\{x_n^{(n)}(t)\}$ на этом промежутке имеет вид

$$x_n^{(n)}(t) = x_n^{(n)}(-d) + \int_{-d}^t f_n(s) ds, \quad (3.2)$$

где $f_n \in \mathfrak{P}_F^d(x_n^{(n)})$, $\mathfrak{P}_F^d : C([-d, d]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^1([-d, d]; \mathbb{R}^n)$ — мультиоператор суперпозиции, порожденный F на промежутке $[-d, d]$ (см. [2]).

Таким образом,

$$f_n(s) \in F(s, x_n^{(n)}(s)), \quad \text{п. в. } s \in [-d, d].$$

Переходя к пределу в (3.2) при $n \rightarrow \infty$ из замкнутости интегрального мультиоператора $j \circ \mathfrak{P}_F^d$, где $j(f)(t) = \int_{-d}^t f(s) ds$ (см. [2], следствие

1.5.34), получаем

$$x_*(t) = x_*(-d) + \int_{-d}^t f_*(s) ds, \quad t \in [-d, d],$$

где $f_* \in \mathfrak{P}_F^d(x_*)$, т.е.

$$f_*(s) \in F(s, x_*(s)), \quad \text{п. в.} \quad s \in [-d, d].$$

Таким образом, функция $x_*(t)$ является решением дифференциального включения (3.1) на промежутке $[-d, d]$ и утверждение вытекает из произвольности этого промежутка. $\square$

Пусть $B_r \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в начале координат; $S = \partial B_r$ — его граница. Следующее утверждение (см. [26], Теорема 3.1) является обобщением теоремы Густафсона – Шмитта (см. [18]).

Теорема 1. Пусть мультиотображение $F: [0, T] \times B_r \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ является пн. св. и удовлетворяет следующему условию:

для каждого $(t, x) \in [0, T] \times S$ найдется $y \in F(t, x)$ такой, что

$$\langle x, y \rangle \leq 0.$$

Тогда включение (3.1) имеет решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условию периодичности $x(0) = x(T)$ и такое, что

$$x(t) \in B_r, \quad t \in [0, T].$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть мультиотображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста. Пусть выполнено условие:

(*) существует $r > 0$ такое, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = r$, найдется $y \in F(t, x)$ такой, что

$$\langle x, y \rangle \leq 0.$$

Тогда дифференциальное включение

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{3.3}$$

имеет решение $x_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$x_*(t) \in B_r \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R},$$

где $B_r = \{x: \|x\| \leq r\}$.

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала случай, когда $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ — пн. св. мультиотображение. Согласно Теореме 1 для любого конечного промежутка $[-d, d]$ дифференциальное включение (3.3) имеет решение $x_d : [-d, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $x_d(-d) = x_d(d)$ и $x_d(t) \in B_r$ для любого $t \in [-d, d]$. Осталось применить Лемму 1.

(ii) Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Так как мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то (см., например, [15]) для каждого $\varepsilon_m > 0$ существует мультиотображение $F_{\varepsilon_m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ такое, что: (а) $F_{\varepsilon_m}(t, z) \subset F(t, x)$ п. в. $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(б) существует замкнутое подмножество J_{ε_m} промежутка $J = [-d, d]$ такое, что $\mu(J \setminus J_{\varepsilon_m}) \leq \varepsilon_m$ (где μ — мера Лебега) и мультиотображение $F_{\varepsilon_m}|_{J_{\varepsilon_m} \times \mathbb{R}^n}$ пн. св.;

(в) если $u, w : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ измеримы и $w(t) \in F(t, u(t))$ п. в. $t \in J$, то $w(t) \in F_{\varepsilon_m}(t, u(t))$ п. в. $t \in J$.

Пусть $P_m : J \rightarrow J_{\varepsilon_m}$ — метрическая проекция и

$$\tilde{F}_{\varepsilon_m}(t, x) = \overline{co}F_{\varepsilon_m}(P_m(t), x) \quad \text{п. в. } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Так как метрическая проекция пн. св., то мультиотображение $\tilde{F}_{\varepsilon_m}$ также пн. св. (см., например, [19]).

Нетрудно видеть, что для дифференциальных включений

$$x'(t) \in \tilde{F}_{\varepsilon_m}(t, x(t)), \quad m = 1, 2, \dots$$

выполнено условие (*) и, следовательно, каждое из них имеет решение $\tilde{x}_d^m : [-d, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\tilde{x}_d^m(-d) = \tilde{x}_d^m(d)$ и $\tilde{x}_d^m(t) \in B_r$ для любого $t \in [-d, d]$.

Устремляя ε_m к нулю, мы получаем искомое решение исходного дифференциального включения (3.1) как предельную точку последовательности $\tilde{x}_d^m(\cdot)$. Осталось применить Лемму 1. $\square$

3.1. СЛУЧАЙ КЛАССИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим дифференциальное включение следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию T -периодичности ($T > 0$) по первому аргументу и локальному условию подлинейного роста.

Определение 9. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется строгой направляющей функцией для дифференциального включения (3.4), если

$$\langle \text{grad } V(x), y \rangle > 0$$

для всех $y \in F(t, x)$, $0 \leq t \leq T$ и $\|x\| \geq r_V$ для некоторого $r_V > 0$.

Определение 10. Непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если найдется $r_V > 0$ такое, что

$$\text{grad } V(x) = \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right\} \neq 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq r_V$.

Определение 11. Невырожденный потенциал V называется обобщенной направляющей функцией для дифференциального включения (3.4), если

$$\langle \text{grad } V(x), y \rangle \geq 0$$

хотя бы для одного $y \in F(t, x)$, $0 \leq t \leq T$ и $\|x\| \geq r_V$.

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию коэрцитивности

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |V(x)| = \infty. \quad (3.5)$$

Следующее утверждение является примером применения классической направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений.

Теорема 3. (см., например, [2]). Если для дифференциального включения (3.4) можно указать строгую направляющую функцию, удовлетворяющую условию коэрцитивности (3.5), то включение (3.4) имеет по крайней мере одно T -периодическое решение.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть мультиотображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и локальному условию подлинейного роста.

Пусть для дифференциального включения

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{н. в. } t \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию коэрцитивности (3.5), является обобщенной направляющей функцией, т. е. найдется $r_0 > 0$ такое, что

для любых $t \in \mathbb{R}$, $\|x\| \geq r_0$ найдется $y \in F(t, x)$ такой, что

$$\langle \text{grad } V(x), y \rangle \geq 0. \quad (3.7)$$

Тогда дифференциальное включение (3.6) имеет ограниченное решение.

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала случай, когда соотношение (3.7) выполнено для всех $y \in F(t, x)$ и в строгой форме.

Из условия (3.5) вытекает, что либо

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (3.8)$$

либо

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = -\infty. \quad (3.9)$$

Рассмотрим случай (3.8). Пусть

$$M = \max_{\|x\| \leq r_0} V(x).$$

Тогда из (3.8) следует, что найдется $r_1 > r_0$ такое, что

$$V(x) > M \quad \text{для любого } x, \|x\| \geq r_1. \quad (3.10)$$

Из Теоремы 3 вытекает, что на любом ограниченном промежутке $[-d, d]$ дифференциальное включение (3.6) имеет решение $x(\cdot)$ такое, что $x(-d) = x(d)$.

Покажем, что это решение удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leq r_1, \quad t \in [-d, d].$$

В предположении противного найдется точка $t_1 \in [-d, d]$ такая, что $\|x(t_1)\| > r_1$, но тогда, согласно (3.10), имеем

$$V(x(t_1)) > M. \quad (3.11)$$

Рассмотрим функцию $v(t) = V(x(t)), t \in [-d, d]$. Пусть $v(t_*) = \bar{V} = \max_{-d \leq t \leq d} v(t)$. Тогда из (3.11) следует, что $\bar{V} > M$.

Это означает, что $\|x(t_*)\| > r_0$. Рассмотрим окрестность $U(t_*) \subset [-d, d]$ точки t_* столь малую, что $\|x(t')\| > r_0$ для любого $t' \in U(t_*)$. Пусть точка $t \in U(t_*)$ такова, что в ней выполнено включение (3.6). Тогда

$$v'(t) = \langle \text{grad} V(x(t)), x'(t) \rangle > 0.$$

Таким образом, окрестность $U(t_*)$ почти вся состоит из точек, в которых производная $v'(t)$ абсолютно непрерывной функции $v(t)$ положительна. Это означает, что функция $v(t)$ в этой окрестности возрастает, а следовательно, $t_* = d$. Но $v(-d) = v(d)$, что приводит к противоречию.

Случай (3.9) рассматривается аналогично.

(ii) Случай, когда (3.7) выполнено лишь для некоторых y , рассматривается переходом к $F^B(t, x) = F(t, x) \cap B(x)$, где мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ определено следующим образом:

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \gamma(x) \langle \text{grad} V(x), y \rangle \geq 0\},$$

где

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|x\| < r_0, \\ 1, & \text{если } \|x\| \geq r_0. \end{cases}$$

Тогда для вспомогательного дифференциального включения

$$x'(t) \in \tilde{F}(t, x) = F^B(t, x) + \varepsilon Y_V(x), \quad (3.12)$$

где $\varepsilon > 0$, а отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задано как

$$Y_V(x) = \begin{cases} \operatorname{grad} V(x), & \text{если } \|\operatorname{grad} V(x)\| \leq 1, \\ \frac{\operatorname{grad} V(x)}{\|\operatorname{grad} V(x)\|}, & \text{если } \|\operatorname{grad} V(x)\| > 1, \end{cases}$$

соотношение (3.7) будет выполнено уже для всех $y \in \tilde{F}(t, x)$ и в строгой форме.

Из Теоремы 3 вытекает, что на любом ограниченном промежутке $[-d, d]$ дифференциальное включение (3.12) имеет решение $x(\cdot)$ такое, что $x(-d) = x(d)$ и $\|x(t)\| \leq r_1$, $t \in [-d, d]$.

Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что исходное дифференциальное включение (3.6) на каждом ограниченном промежутке $[-d, d]$ также будет иметь решение $x(\cdot)$ такое, что $x(-d) = x(d)$ и $\|x(t)\| \leq r_1$, $t \in [-d, d]$.

Утверждение теперь следует из Леммы 1. $\square$

3.2. СЛУЧАЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество, C_T — пространство непрерывных T -периодических функций $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$

и

$$\Gamma(G) := \{x \in C_T : x(t) \in G \text{ для всех } t \in [0, T]\}.$$

Для функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ пусть

$$V^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in M\}, \quad \mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > r\}.$$

Определение 12. *Невырожденный потенциал $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенной направляющей функцией на множестве G для включения (3.4), если для всех $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено условие*

$$\langle \operatorname{grad} V(x), y \rangle \geq 0 \quad \text{хотя бы для некоторого } y \in F(t, x).$$

Справедливо следующее утверждение (см. [7]).

Теорема 5. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

- (i) $\mathcal{V}_0$ является непустым, открытым и ограниченным множеством;
- (ii) V является обобщенной направляющей функцией для включения (3.4) на множестве $V^{-1}(0)$;
- (iii) $\deg(\text{grad}V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда дифференциальное включение (3.4) имеет T -периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:

- (i) $\mathcal{V}_0$ является непустым, открытым и ограниченным множеством;
- (ii) V является обобщенной направляющей функцией для включения (3.6) на множестве $V^{-1}(0)$;
- (iii) $\deg(\text{grad}V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда дифференциальное включение (3.6) обладает решением $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ таким, что $x(t) \in \overline{\mathcal{V}_0}$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно Теореме 5 на каждом ограниченном промежутке $[-d, d]$ дифференциальное включение (3.6) обладает решением $x_d(\cdot)$ таким, что $x_d(-d) = x_d(d)$ и $x_d(t) \in \overline{\mathcal{V}_0}$, $t \in [-d, d]$.

Утверждение теперь следует из Леммы 1. $\square$

3.3. СЛУЧАЙ МНОГОЛИСТНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q — оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ , элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ — через ζ . Пусть φ, ρ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим многолистую риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}.$$

Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \quad (3.13)$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \quad (3.14)$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию коэрцитивности

$$\lim_{\|\zeta\| \rightarrow \infty} V(\zeta) = +\infty. \quad (3.15)$$

Для $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ и $\vartheta > \vartheta_0 = \min V(\zeta)$ выделим область

$$\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(px) < \vartheta, \rho_1 < \|qx\| < \rho_2\}.$$

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п. в. $t \in [0, T]$

$$\sup_{x \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in F(t, x)} \langle \text{grad} W(qx), qy \rangle \leq \alpha(t) - \varepsilon, \quad (3.16)$$

$$\inf_{x \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in F(t, x)} \langle \text{grad} W(qx), qy \rangle \geq \beta(t) + \varepsilon, \quad (3.17)$$

причем

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \leq \int_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau) d\tau \leq 2\pi N - \varepsilon, \quad (3.18)$$

где N — целое число.

Пусть

$$G(\vartheta, \rho_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(px) < \vartheta, \|qx\| < \rho_0\}.$$

Определение 13. Непрерывно дифференцируемая функция $V(\zeta)$ называется невырожденным потенциалом, если выполнено соотношение

$$\text{grad} V(\zeta) \neq 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\zeta) \geq \vartheta.$$

Определение 14. Пару функций $\{V(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (3.13)–(3.18), назовем обобщенной многолистной направляющей функцией для включения (3.4) относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденным потенциалом и выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{y \in F(t, x)} \frac{|\langle qy, qx \rangle|}{\|qx\|} \leq \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad x \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2),$$

$$\langle \text{grad} V(px), py \rangle \leq 0 \quad \text{хотя бы для одного } y \in F(t, x),$$

где $V(px) \geq \vartheta$, $\|qx\| \leq \rho_2$.

Справедливо следующее утверждение (см. [3]).

Теорема 7. Пусть для дифференциального включения (3.4) можно указать обобщенную МНФ относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда включение (3.4) имеет по крайней мере одно T -периодическое решение $x_*(\cdot)$ такое, что $x_*(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть для дифференциального включения (3.6) можно указать обобщенную МНФ относительно области $\Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда дифференциальное включение (3.6) обладает решением $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ таким, что $x(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно Теореме 7 на каждом ограниченном промежутке $[-d, d]$ дифференциальное включение (3.6) обладает решением $x_d(\cdot)$ таким, что $x_d(-d) = x_d(d)$ и $x_d(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}$, $t \in [-d, d]$. Утверждение теперь следует из Леммы 1. $\square$

Авторы выражают признательность рецензенту за внимание к работе и ценные замечания.

Список источников

1. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. М. : Либроком, 2011.
3. Корнев С. В. О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С. 72–83.
4. Корнев С. В., Обуховский В. В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Известия вузов. Математика. 2009. № 5. С. 23–32.
5. Корнев С. В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 13. С. 16–31.
6. Корнев С. В., Обуховский В. В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1335–1344.
7. Корнев С. В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия. Физика, математика. 2016. № 2. С. 107–122.
8. Красносельский М. А., Перов А. И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1958. Т. 123, № 2. С. 235–238.
9. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. М. : Физматгиз, 1963.
10. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1966.
11. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М. : Наука, 1975.

12. Рачинский Д. И. Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу // Автоматика и телемеханика. 1995. № 11. С. 87–98.
13. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск : Наука, 1986.
14. De Blasi F.S., Górniewicz L., Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions // Nonlinear Analysis. 1999. Vol. 37. P. 217–245.
15. Deimling K. Multivalued Differential Equations. Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.
16. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 99, N 1. P. 79–85.
17. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer, 2006.
18. Gustafson G.B., Schmitt K. A note on periodic solutions for delay-differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 42. P. 161–166.
19. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2001.
20. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. Kluwer, Dordrecht : PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.
21. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96, Issue 3. P. 418–428.
22. Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations / A. M. Krasnoselskii, M. A. Krasnoselskii, J. Mawhin, A. Pokrovskii // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1994. Vol. 22, N 11. P. 1357–1371.
23. Mawhin J., Ward James R. Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2002. Vol. 8, N 1. P. 39–54.
24. Mawhin J., Thompson H. B. Periodic or bounded solutions of Caratheodory systems of ordinary differential equations // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2003. Vol. 15, N 2-3. P. 327–334.
25. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev // Lecture Notes in Math. 2013. Vol. 2076.
26. Obukhovskii V., Kornev S., Korneva P. Method of guiding functions and Birkhoff-Kellogg-Rothe and Kakutani fixed point theorems // Communications in Optimization Theory. 2024. Vol. 8. P. 1–7.
27. Rachinskii D.I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1996. N 26. P. 631–639.

References

1. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control. *Tr. MIAN USSR*, 1985, vol. 169, pp. 194–252. (in Russian)
2. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions*. Moscow, Librokom Publ., 2011. (in Russian)
3. Kornev S.V. On the method of multivalent guiding functions in the problem of periodic solutions for differential inclusions. *Avtomatica i Telemekhanika*, 2003, no. 3, pp. 72–83. (in Russian)

4. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On the localization of the method of guiding functions in the problem of periodic solutions for differential inclusions. *Izvestia vuzov. Matematika*, 2009, no. 5, pp. 23–32. (in Russian)
5. Kornev S.V. The method of generalized integral guiding function in the problem of existence of periodic solutions for differential inclusions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2015, no. 13, pp. 16–31. (in Russian)
6. Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P. The method of generalized integral guiding function in the problem of existence of periodic solutions for functional differential inclusions. *Differentsialnye uravnenij*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1335–1344. (in Russian)
7. Kornev S.V. Guiding functions on a given set in the problem of existence of periodic solutions of differential inclusions with non-convex right-hand side. *Vestnik Voronezhskogo gosuniversiteta. Seriya Fizika, matematika*, 2016, no. 2, pp. 107–122. (in Russian)
8. Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. On a principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235–238. (in Russian)
9. Krasnosel'skii M.A., Perov A.I., Povolozkii A.I., Zabreiko P.P. *Vector fields on the plane*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. (in Russian)
10. Krasnosel'skii M.A. *The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1966. (in Russian)
11. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometric methods of nonlinear analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1975. (in Russian)
12. Rachinskii D.I. Forced oscillations in control systems under conditions close to resonance. *Avtomatica i Telemekhanika*, 1995, no. 11, pp. 87–98. (in Russian)
13. Tolstonogov A.A. *Differential inclusions in a Banach space*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. (in Russian)
14. De Blasi F.S., Górniewicz L., Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions. *Nonlinear Analysis*, 1999, vol. 37, pp. 217–245.
15. Deimling K. *Multivalued Differential Equations*. Berlin-New York, Walter de Gruyter Publ., 1992.
16. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1987, vol. 99, no. 1, pp. 79–85.
17. Górniewicz L. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*. Berlin, Springer Publ., 2006.
18. Gustafson G.B., Schmitt K. A note on periodic solutions for delay-differential systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 42, pp. 161–166.
19. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*. Berlin-New York, Walter de Gruyter Publ., 2001.
20. Kisielewicz M. *Differential inclusions and optimal control*. Kluwer, Dordrecht, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.
21. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, issue 3, pp. 418–428.
22. Krasnoselskii A.M., Krasnoselskii M.A., Mawhin J., Pokrovskii A. Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1994, vol. 22, no. 11, pp. 1357–1371.
23. Mawhin J., Ward James R. Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39–54.

24. Mawhin J., Thompson H. B. Periodic or bounded solutions of Caratheodory systems of ordinary differential equations *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2003, vol. 15, no. 2-3, pp. 327–334.
25. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. *Lecture Notes in Math.*, 2013, vol. 2076.
26. Obukhovskii V., Kornev S., Korneva P. Method of guiding functions and Birkhoff-Kellogg-Rothe and Kakutani fixed point theorems. *Communications in Optimization Theory*, 2024, vol. 8, pp. 1–7.
27. Rachinskii D.I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1996, no. 26, pp. 631–639.

Об авторах

Корнев Сергей Викторович, д-р физ.-мат. наук, доц., Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, 394043, Российская Федерация, kornev_vrn@rambler.ru

Корнева Полина Сергеевна, студент, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, 394043, Российская Федерация, polinakorneva03@mail.ru

Обуховский Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, 394043, Российская Федерация, valerio-ob2000@mail.ru

About the authors

Sergey V. Kornev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof., Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 394043, Russian Federation, kornev_vrn@rambler.ru

Polina S. Korneva, Student, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 394043, Russian Federation, polinakorneva03@mail.ru

Valerii V. Obukhovskii, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 394043, Russian Federation, valerio-ob2000@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 15.11.2024
Поступила после рецензирования / Revised 24.02.2025
Принята к публикации / Accepted 27.02.2025