



Серия «Математика»
2025. Т. 53. С. 51—68

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК УДК 51-7 + 517.9 + 519.652

MSC 65D25, 65D05, 49J35, 65K10, 41A05

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.51>

О существовании приближенных решений вариационных задач в нелинейной теории упругости

В. А. Клячин^{1,2✉}, В. В. Кузьмин^{1,2}

¹ Волгоградский государственный университет, Волгоград, Российская Федерация

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская
Федерация

✉ klchnv@mail.ru

Аннотация: Обосновываются приближенные методы решения задач в нелинейной теории упругости. Используется вариационный подход, предложенный Дж. Боллом, в котором решение задачи определения формы деформированного тела сводится к решению соответствующей вариационной задачи на минимум функционала запасенной энергии. При этом конкретный вид этого функционала задается типом упругого материала и записывается в интегральной форме. Предлагается конструкция приближенного решения с использованием триангуляции Делоне полигональной области в классе кусочно-линейных невырожденных отображений. Вводится класс отображений, допускающих такое приближение. Доказано, что построенные кусочно-линейные отображения образуют минимизирующую последовательность для функционала запасенной энергии. Также найдены условия, при которых эта последовательность сходится к точному решению исходной вариационной задачи в подходящем классе отображений. Отдельно рассмотрен случай функционалов с линейным ростом — получено интегральное неравенство, обеспечивающее существование приближенного решения. Отмечено, что аналогичные условия естественным образом возникают и для функционалов типа площади в задачах существования капиллярных поверхностей и поверхностей с предписанной средней кривизной.

Ключевые слова: функционал запасенной энергии, вариационная задача, триангуляция, кусочно-линейная аппроксимация, численные методы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Ссылка для цитирования: Клячин В. А., Кузьмин В. В. О существовании приближенных решений вариационных задач в нелинейной теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 53. С. 51–68.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.51>

Research article

On the Existence of Approximate Solutions of Variational Problems in Nonlinear Elasticity Theory

Vladimir A. Klyachin^{1,2}, Vladislav V. Kuzmin^{1,2}

¹ Volgograd State University, Volgograd, Russian Federation

² Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract: The article is devoted to the substantiation of approximate methods for solving problems in the nonlinear theory of elasticity. The variational approach proposed by J. Ball is used, in which the solution to the problem of determining the shape of a deformed body is reduced to solving the corresponding variational problem for the minimum of the stored energy functional. In this case, the specific form of this functional is specified by the type of elastic material and is written in integral form. In this article, a construction of an approximate solution is proposed using the Delaunay triangulation of a polygonal domain in the class of piecewise linear nondegenerate mappings. The article introduces a class of mappings admitting such an approximation. It is proved that the constructed piecewise linear mappings form a minimizing sequence for the stored energy functional. Also, the article finds conditions under which this sequence converges to the exact solution of the original variational problem in a suitable class of mappings. The case of functionals with linear growth is considered separately - an integral inequality is obtained that ensures the existence of an approximate solution. It is noted that similar conditions naturally arise for area-type functionals in problems of the existence of capillary surfaces and surfaces with a prescribed mean curvature.

Keywords: stored energy functional, variational problem, triangulation, piecewise linear approximation, numerical methods

Acknowledgements: The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok, the agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2025-349 from 29.04.2025.

For citation: Klyachin V. A., Kuzmin V. V. On the Existence of Approximate Solutions of Variational Problems in Nonlinear Elasticity Theory. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 53, pp. 51–68. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.53.51>

1. Введение

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ с локально липшицевой границей и M_n обозначает множество квадратных матриц F порядка n с нормой $|F| = \sqrt{\text{tr}(F^T F)}$. Пусть также $W(x, t, F) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times M_n \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in$

$\mathbb{R} : x > 0\}$ — некоторая непрерывная, положительная функция. Для отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$ определим функционал $\Phi(\varphi)$ запасенной энергии по формуле

$$\Phi(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, \varphi(x), D\varphi(x)) dx. \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что для подынтегральной функции выполнено условие Липшица

$$|W(x', t', F') - W(x'', t'', F'')| \leq L(|x' - x''| + |t' - t''| + |F' - F''|) \quad (1.2)$$

для $x', x'' \in \Omega$ и $|t'|, |t''|, |F'|, |F''| \leq R, R > 0$ с постоянной $L > 0$, зависящей от R .

Замечание 1. В настоящей статье какая-либо выпуклость, как в [5], квазивыпуклость, как в [18] или поливыпуклость, как в [3], [15], подынтегральной функции W не предполагается.

В нелинейной теории упругости [15], [12] часто рассматривают функции $W(x, t, F)$ вида

$$W(x, t, F) = W(x, t, F, \text{Adj}(F), \det F), \quad (1.3)$$

где $\text{Adj}(F) = F^{-T} \cdot \det F$. При этом зависимость от x обычно представляется отдельным слагаемым, характеризующим внешнее поле сил, например поле силы тяжести. В этом случае функция $W(x, t, F)$ имеет вид

$$W(x, t, F) = W(F) + \langle t, w(x) \rangle,$$

где $w(x)$ — некоторая непрерывная вектор-функция $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Согласно нелинейной теории упругости [15], [16], [12], [19] форма равновесного состояния упругого тела задается отображением, минимизирующим указанный функционал. Минимум ищется в классе отображений $\varphi \in W_p^1(\Omega)$, для которых $\Phi(\varphi) < +\infty$,

$$\varphi|_{\Gamma} = \bar{\varphi}|_{\Gamma}, \quad \bar{\varphi} \in W_p^1(\Omega), \quad (1.4)$$

где $\Gamma \subset \partial\Omega$ — часть границы, а отображение $\bar{\varphi}$ задает граничные условия. Остальная часть $\partial\Omega \setminus \Gamma$ задает свободную границу. При этом предполагается, что на функцию $W = W(x, t, F)$ дополнительно наложены условия *коэрцитивности* (см., например [3]): существуют постоянные $\alpha > 0$, $r > 0$, и функция $g \in L^1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, t, F) \geq \alpha(|F|^p + (\det F)^r) + g(x) \quad (1.5)$$

для п. в. $x \in \Omega$ и всех $F \in M_n$, $\det(F) \geq 0$. Следует отметить, что в отличие от работ [3], [12], [15], [16] в нашей статье условие коэрцитивности является несколько более слабым — достаточно выполнение неравенств $p > 1, r > 0$.

Замечание 2. Известно [12], [15], что вид функции W зависит от упругого материала и в некоторых постановках задач к функционалу (1.1) добавляется линейная часть

$$\begin{aligned}\Phi_1(\varphi) &= \Phi(\varphi) + L(\varphi) = \\ &= \int_{\Omega} W(x, \varphi(x), D\varphi(x)) dx + \int_{\Omega} \langle w(x), \varphi(x) \rangle dx = \\ &= \int_{\Omega} W(x, \varphi(x), D\varphi(x)) + \langle w(x), \varphi(x) \rangle dx,\end{aligned}$$

где $w(x)$ — как и выше, некоторая измеримая, ограниченная функция в области Ω . В этом случае для функционала Φ_1 подынтегральная функция может не удовлетворять условию (1.5) при $p = 1, r = 1/n$, поскольку линейный рост первой части функционала может компенсироваться линейной второй частью. Так происходит, к примеру, для функционалов типа площади при выявлении разрешимости краевых задач для уравнений заданной средней кривизны. В нашем случае похожая ситуация может случиться при рассмотрении функций запасенной энергии для материалов Огдена вида [12]

$$W(x, F) = \sum_{i=1} n_1 a_i \text{tr}(C)^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1} n_2 b_j \text{tr}(\text{Adj}(C))^{\delta_j/2} + \Gamma(\det(F)), \quad (1.6)$$

здесь $C = F^T F, a_i, b_j > 0, \gamma_i, \delta_j \geq 1$ и $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, такая, что $\Gamma(\delta) \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0+$. Вопрос существования приближенного решения вариационной задачи для случая $p = 1$ будет рассмотрен нами ниже в отдельном параграфе.

В настоящей статье рассматривается конструкция приближенного решения задачи, основанная на методе Ритца: мы сводим решение исходной задачи к конечномерному случаю для класса кусочно-линейных отображений на триангуляции области Ω . Соответственно, требуется обоснование возможности аппроксимации функционала запасенной энергии такими отображениями. В этом случае мы будем рассматривать подкласс отображений из $W_p^1(\Omega), p \geq 1$, для которых такая аппроксимация возможна. Перейдем к описанию этого класса отображений.

Рассмотрим непрерывную функцию $\omega(x, t), \omega : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающую по t и такую, что

$$\|\omega(x, t)\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

при $t \rightarrow +0$. Введем класс $W_p^{1,\omega}(\Omega)$ отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi \in C(\Omega) \cap W_p^1(\Omega)$, таких, что для почти всех $x \in \Omega$ найдется такая ее окрестность $U(x)$, что для любой точки $y \in U(x)$ выполнено

$$|D\varphi(x) - D\varphi(y)| \leq \omega(x, |x - y|). \quad (1.8)$$

Для введенного класса отображений $W_p^{1,\omega}(\Omega)$ в работе [7] доказана оценка в метрике пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ для аппроксимации кусочно-аффинными функциями, заданными в полигональных областях.

Теорема 1. Пусть отображение $\bar{\varphi} \in W_p^{1,\omega}(\Omega)$, $p > 1$ и функция ω удовлетворяет условию (1.7). Также будем предполагать, что выполнены условия (1.2), (1.5) на подынтегральную функцию W . Тогда найдется отображение $\varphi \in W_p^{1,\omega}(\Omega)$, минимизирующее функционал (1.1) в классе $W_p^{1,\omega}(\Omega)$ и удовлетворяющее граничному условию (1.4).

Доказательство. Согласно известному критерию компактности множеств в пространствах $L_p(\Omega)$ [11] (гл. I, §4) из условий (1.7), (1.8) легко получить компактность вложения

$$W_p^{1,\omega}(\Omega) \rightarrow W_p^1(\Omega).$$

Таким образом, множества

$$W_p^{1,\omega}(\Omega) \cap \{\varphi \in W_p^1(\Omega) : \|\varphi\|_{W_p^1(\Omega)} \leq M\}$$

компактны в $W_p^1(\Omega)$ при любом $M > 0$. Поскольку из условия коэрцитивности (1.5) и неравенства Пуанкаре следует ограниченность минимизирующей последовательности функционала (1.1) в пространстве $W_p^1(\Omega)$, то получаем требуемое. $\square$

Замечание 3. В отличие от результатов работ [3], [15] в нашем случае класс $W_p^{1,\omega}(\Omega)$ допустимых деформаций разрешает значение параметра при любом $p > 1$, однако при $p \geq n$ является более узким. Тем не менее ниже мы сформулируем дополнительные условия, при которых поставленная приближенная задача будет разрешима и при $p = 1$. Последнее особенно актуально для материалов Огдена (1.6).

Теперь нашей целью является построение приближенного решения краевой задачи на минимум функционала (1.1) в классе кусочно-линейных отображений и доказательство соответствующей сходимости.

2. Триангуляция полигональной области

Симплексом S с вершинами в точках $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ мы называем выпуклую оболочку точек $\{q_i, i = 0, \dots, n\}$. Симплекс называется невырожденным, если векторы $q_1 - q_0, \dots, q_n - q_0$ линейно независимы. Пусть $\{p_i\}, i = 1, \dots, N$ — некоторый набор P точек $p_i \in \mathbb{R}^n$, таких, что любой симплекс в вершинах из $\{p_i\}$ является невырожденным. Триангуляцией

T заданного набора точек называется такой набор n -мерных симплексов $S_1, \dots, S_m$, что:

- 1) каждая точка p_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$;
- 2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек $p_i, i = 1, \dots, N$;
- 3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.

Решение краевой задачи (1.4) на минимум (1.1) будем искать для полигональных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в классе кусочно-аффинных преобразований $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Область Ω будем разбивать на n -мерные симплексы путем процедуры триангуляции Делоне. В настоящей работе мы применяем метод конечных элементов, который в случае линейных моделей для задачи линейных упругих деформаций описан в [5]. Следуя этому методу, мы будем считать, что область Ω разбита на симплексы $S_1, S_2, \dots, S_m$ триангуляции Делоне, а точки $p_1, p_2, \dots, p_N$ — вершины этой триангуляции. Для приближенного вычисления значения функционала (1.1) мы будем рассматривать класс кусочно-аффинных отображений

$$\varphi(x) = A_k(x) + b_k, \quad x \in S_k, \quad (2.1)$$

которые представляют собой аффинное отображение на каждом симплексе $S_k, k = 1, 2, \dots, m$. Здесь матрицы $A_k \in M_n$ и векторы $b_k \in \mathbb{R}^n$ подбираются так, что отображение φ является непрерывным. Построение такого отображения можно выполнить следующим образом. Пусть $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ и $\varphi_u(x)$ — кусочно-линейное непрерывное отображение, такое, что

$$\varphi_u(p_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда в силу невырожденности симплекса S_k найдется единственная матрица A_k и вектор b_k , такие, что $A_k(p_i) + b_k = u_i$, для вершин $p_i \in S_k$. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n$ — вершины симплекса S_k и $v_j = \varphi(q_j), j = 0, 1, \dots, n$. Выберем $0 \leq l \leq n$. Построим матрицу Q_k , размещая в ее столбцах разности $q_j - q_l, j \neq l$, и матрицу V_k , размещая в ее столбцах разности векторов $v_j - v_l, j \neq l$. Тогда, как несложно видеть, $A_k = V_k \cdot Q_k^{-1}$. Будем рассматривать такие кусочно-аффинные отображения, которые на каждом симплексе сохраняют его ориентацию. Это условие является естественным требованием и, в частности, необходимым, чтобы образ триангуляции кусочно-аффинного отображения также являлся триангуляцией — в образе симплексы не должны перекрывать друг друга. Этот факт отмечен в работах [2; 9; 10].

Ясно, что $D\varphi_u(x) = A_k, \quad x \in S_k$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi_u) &= \int_{\Omega} W(x, \varphi_u(x), D\varphi_u(x)) dx = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} W(x, \varphi_u(x), D\varphi_u(x)) dx = \\
&= \sum_{k=1}^m \int_{S_k} W(x, \varphi_u(x), A_k) dx.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Определим функцию

$$H(u) = \Phi(\varphi_u) = \int_{\Omega} W(x, \varphi_u(x), D\varphi_u(x)) dx.$$

Таким образом, задача сводится к конечномерному случаю минимизации функции $H(u)$ в $\mathbb{R}^{N \cdot n}$.

Замечание 4. Поскольку в каждом симплексе триангуляции T левая часть (1.8) равна нулю, то кусочно-линейные отображения φ_u принадлежат классу $W_p^{1,\omega}(\Omega)$ при любом $p \geq 1$.

3. Конечномерный случай

Одним из методов приближенного решения вариационных задач является метод координатного спуска [6]. В этом методе на каждой итерации решается одномерная вариационная задача, соответствующая выбранной координате. Здесь мы формулируем условия существования точки минимума непрерывной функции при условии существования решений соответствующих одномерных вариационных задач. Перейдем к точным формулировкам.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$ непрерывную функцию $h(u) > 0$. Ставится задача отыскания точки минимума этой функции. Именно ставится вопрос о существовании точки $u^* \in \mathbb{R}^k$, такой, что

$$h(u^*) = \inf_{v \in \mathbb{R}^k} h(v).$$

Очевидно, что если

$$\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = +\infty, \tag{3.1}$$

то точка минимума существует. Для доказательства свойства (3.1) исследуется поведение функции h на лучах вида $\{ut : t > 0, |u| = 1\}$. Это соответствует поиску минимума на каждом шаге итераций в методе координатного спуска. Однако, вообще говоря, из условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(ut) = +\infty$$

свойство (3.1) не следует. В случае $k = 2$ рассмотрим такой пример. Зададим функцию h в полярной системе координат r, ψ

$$h(\psi, r) = \begin{cases} \frac{r}{1+r\left(r \sin \frac{\psi}{2}\right)^r}, & \text{для } 0 \leq \sin \frac{\psi}{2} < \frac{1}{r}, \\ \frac{r}{1+r}, & \text{для } \sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{r}, \\ \frac{r}{1+r\left(\frac{1}{r \sin \frac{\psi}{2}}\right)^r}, & \text{для } 0 \leq \sin \frac{\psi}{2} > \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Ясно, что при любом фиксированном значении угла $0 \leq \psi \leq 2\pi$ выполнено $h(\psi, r) \rightarrow +\infty$. Однако

$$\inf_{0 \leq \psi \leq 2\pi} h(\psi, r) = \frac{r}{1+r} \rightarrow 1 \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Другими словами, функция $h(u)$ своей точной нижней грани не достигает в конечной точке, тогда как на каждом луче стремиться в $+\infty$.

Пусть $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 1$ — неотрицательная, непрерывная функция и

$$m = \inf_{u \in \mathbb{R}^k} h(u).$$

Запишем следующие условия на функцию h . Будем предполагать, что существует положительная, непрерывная, неубывающая функция $M(t)$, $t > 0$ и для всякого $u \in \mathbb{R}^k$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что

$$h(t \cdot u) \geq \alpha_1 \cdot M(t) + \alpha_2, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, функция $M(t)$ задает рост функции h на лучах $\{ut : t > 0, |u| = 1\}$. Обозначим также через $\sigma(\tau)$ модуль непрерывности функции h : для всякой пары точек $u, v \in \mathbb{R}^k$ выполнено неравенство

$$|h(u) - h(v)| \leq \sigma(|u - v|). \quad (3.3)$$

При этом мы будем считать, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty, \tau = o(t)} \frac{M(t)}{\sigma(\tau)} = +\infty. \quad (3.4)$$

Заметим, что это условие выполняется, например, если предположить линейный рост функции h на лучах и её липшицевость.

Теорема 2. *Предположим, что для всякого $\theta \in \mathbb{R}^k$, $|\theta| = 1$ выполнено*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t\theta) = +\infty.$$

Если функция h удовлетворяет условиям (3.2)–(3.4) то найдется точка $u^ \in \mathbb{R}^k$, такая, что*

$$h(u^*) = m.$$

Доказательство. Будем предполагать, что требуемой точки не существует. Тогда можно построить последовательность $u_s \rightarrow \infty$, такую, что $m = \lim_{s \rightarrow +\infty} h(u_s)$. Не ограничивая общности, можно считать, что существует предел

$$\theta = \lim_{s \rightarrow +\infty} \theta_s = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{u_s}{|u_s|}.$$

Пусть $L = \{t \cdot \theta : t > 0\}$ и v_s — ортогональная проекция точки u_s на луч L . Покажем, что имеют место соотношения

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{|u_s|}{|v_s|} = 1,$$

$$|u_s - v_s| = o(|u_s|), s \rightarrow +\infty.$$

Действительно, обозначим через β_s угол между радиус-векторами точек u_s и v_s . Поскольку $\theta_s \rightarrow \theta$, то $\beta_s \rightarrow 0$. Поэтому $\sin \beta_s \rightarrow 0$. Тогда

$$\sin \beta_s = \frac{|u_s - v_s|}{|u_s|} \rightarrow 0,$$

что означает, что $|u_s - v_s| = o(|u_s|), s \rightarrow +\infty$. А поскольку

$$\frac{|u_s - v_s|}{|u_s|} \geq \frac{|u_s| - |v_s|}{|u_s|} = 1 - \frac{|v_s|}{|u_s|},$$

то выполнено и первое требуемое соотношение.

Применяя неравенство треугольника, получим

$$|\varphi(u_s)| \geq |h(v_s)| - |h(u_s) - h(v_s)|.$$

Согласно условию (3.2) будем иметь

$$|h(v_s)| \geq \alpha_1 \cdot M(|v_s|) + \alpha_2.$$

Из (3.3) следует, что

$$|h(u_s) - h(v_s)| \leq \sigma(|u_s - v_s|).$$

В итоге получаем неравенство

$$|h(u_s)| \geq \alpha_1 \cdot M(|v_s|) + \alpha_2 - \sigma(|u_s - v_s|).$$

Так как по доказанному $|u_s - v_s| = o(|u_s|)$, то из условия (3.4) получаем, что $\lim_{s \rightarrow +\infty} h(u_s) = +\infty$, что противоречит предположению о том, что последовательность $h(u_s)$ сходится к точной нижней грани функции h . $\square$

Замечание 5. Выполнение условий (3.2), (3.3) не зависит от выбора центра лучей. Действительно, если в качестве центра выбрать точку u_0 , то из неравенства

$$|h(tu + u_0) - h(tu)| \leq \sigma(|u_0|)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} h(tu + u_0) &\geq h(tu) - \sigma(|u_0|) \geq \alpha_1 \cdot M(t) + \alpha_2 - \sigma(|u_0|) = \\ &= \alpha_1 \cdot M(t) + \tilde{\alpha}_2. \end{aligned}$$

Замечание 6. Очевидно, что теорема 2 остается верной, если условие (3.2) будет выполняться на лучах вида $\{tu : \max_{1 \leq i \leq k} |u_i| = 1\}$.

4. Бесконечномерный случай

Пусть B — произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$. Рассмотрим последовательность конечномерных подпространств

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots \subset B.$$

Для каждого $x \in B$ пусть $\pi_k(x) \in B_k$ обозначает элемент наилучшего приближения

$$\|x - \pi_k(x)\|_B = \inf_{y \in B_k} \|x - y\|_B.$$

Заметим, что в силу конечномерности подпространства B_k элемент $\pi_k(x)$ всегда существует. Будем предполагать, что для всякого $x \in B$ имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_k(x) = x. \quad (4.1)$$

Это свойство заведомо выполнено, если множество конечных линейных комбинаций векторов из B_k всюду плотно в B . Или, что то же самое, если объединение

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$$

всюду плотно в B .

Рассмотрим произвольную непрерывную, положительную функцию $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $\Phi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Положим

$$m = \inf_{x \in B} \Phi(x).$$

В силу конечномерности B_k найдется $x_k \in B_k$, такой, что

$$\Phi(x_k) = \inf_{x \in B_k} \Phi(x).$$

Теорема 3. *Последовательность x_k является минимизирующей для функции Φ , другими словами:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = m.$$

Доказательство. Пусть y_l — некоторая минимизирующая последовательность, т. е.

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \Phi(y_l) = m.$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое l_0 , что для всякого $l > l_0$ будет выполнено

$$|\Phi(y_l) - m| < \varepsilon.$$

В силу условия (4.1) и непрерывности Φ для фиксированного $l > l_0$ найдется k_0 , такое, что для всякого $k > k_0$ имеет место неравенство

$$|\Phi(\pi_k(y_l)) - \Phi(y_l)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\Phi(\pi_k(y_l)) < m + 2\varepsilon.$$

По построению x_k числовая последовательность $\Phi(x_k)$ является невозрастающей и выполнено неравенство

$$\Phi(x_k) \leq \Phi(\pi_k(y_l)) < m + 2\varepsilon.$$

Полагая $k \rightarrow +\infty$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) \leq m + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к требуемому. Теорема доказана. $\square$

Построение минимизирующей последовательности

Пусть полигональная область Ω разбита триангуляцией T на невырожденные симплексы. Как и выше, P — множество вершин этой триангуляции и N — число этих вершин. Каждому вектору $u \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ можно сопоставить кусочно-линейное отображение $\varphi_u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ согласно (2.1). Тогда приближенное вычисление функционала запасенной энергии на множестве таких отображений будет представлять собой функцию $H(u)$, определяемую (4.1). Из условий коэрцитивности (1.5) и условия липшицевости (1.2) несложно показать, что будут выполнены

условия теоремы 2 для этой функции. Тогда мы можем сделать вывод о существовании $u^* \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$, такого, что

$$H(u^*) = \inf_{u \in \mathbb{R}^{n \cdot N}} H(u).$$

Обозначим через $\varphi_T(x) = \varphi_{u^*}(x)$ кусочно-линейное отображение, соответствующее этому вектору $u^* \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$. Пусть $B_T \subset C(\Omega) \cap W_p^1(\Omega)$ — множество отображений вида $\varphi_u(x)$, $u \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$. Заметим, что B_T — конечномерное подпространство $C(\Omega) \cap W_p^1(\Omega)$, причем в силу замечания 4 выполнено $\varphi_T \in W_p^{1,\omega}(\Omega)$.

Наконец, определим функцию $K_T(x)$ для всех $x \in \Omega$ следующим образом. Рассмотрим симплекс $S \in T$, содержащий точку x . Пусть этот симплекс образован вершинами $q_0, q_1, \dots, q_n \in P$. Построим для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ матрицу G_k , записав в ее строках координаты векторов $(q_i - q_k)/|q_i - q_k|$. Поскольку предполагается невырожденность симплексов триангуляции, матрицы G_k получаются невырожденными. Положим

$$K_T(x) = \min_{k=0,1,\dots,n} |G_k^{-1}|. \quad (4.2)$$

Заметим, что матрицы G_k^{-1} зависят только от формы симплекса S и не зависят от его размера, т. е. они инвариантны при гомотетичных преобразованиях симплекса.

Теорема 4. *Предположим, что на подынтегральную функцию W наложены условия (1.2) и (1.5). Тогда найдется последовательность триангуляций T_k , такая, что соответствующая последовательность кусочно-линейных отображений $\varphi_{T_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ будет минимизирующей для функционала запасенной энергии (1.1).*

Доказательство. Построим последовательность триангуляций T_k полигональной области Ω , для которой диаметры симплексов стремятся равномерно к нулю:

$$\max_{S \in T_k} \text{diam}(S) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty,$$

и найдется постоянная $0 < K < +\infty$, что для всякого k и $x \in \Omega$ выполнено

$$K_{T_k}(x) \leq K.$$

Такую последовательность для полигональной области несложно построить, применив процедуру разбиения на подобные симплексы, частный случай которой для треугольников описан в [1] (см. гл. 5, §5), а пространственный случай — в [4]. Поскольку величина $K_T(x)$ зависит только от формы симплексов, то эта процедура обеспечит выполнение требуемого неравенства. Тогда, как следует из результатов [7],

объединение

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{T_k} = B$$

всюду плотно в $W_p^{1,\omega}(\Omega)$, $p \geq 1$. Применяя теорему 3, получаем требуемый результат. $\square$

5. Специальный случай

В этом разделе будем рассматривать случай, когда подынтегральная функция в (1.1) имеет линейный рост относительно аргумента $F \in M_n$ и при этом

$$\Phi(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) + \langle w(x), \varphi(x) \rangle dx, \quad (5.1)$$

где w — некоторая измеримая, ограниченная функция в области Ω .

Замечание 7. Рассматриваемый здесь случай возникает естественным образом также при исследовании существования равновесных поверхностей (минимальных, капиллярных) при минимизации функционала

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2} + \int_0^{\varphi(x)} H(x, \tau) d\tau dx,$$

имеющего линейный рост по $\nabla \varphi$. Экстремали этого функционала являются функции φ , удовлетворяющие уравнению поверхностей с заданной средней кривизной

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}} \right) = H(x, \varphi(x)).$$

Известно, что задача Дирихле для этого уравнения не всегда разрешима. В частности, в [13], [14] приведены некоторые необходимые условия. Также и соответствующая вариационная задача не всегда имеет решение. Для минимальных поверхностей, для которых $H(x, \tau) \equiv 0$, имеется ряд ограничений. Более подробно эти проблемы описаны в монографиях [17], [14] и в цитируемой там литературе.

Найдем условия, при которых приближенная вариационная задача

$$\Phi(\varphi_u) = \int_{\Omega} W(x, D\varphi_u(x)) + \langle w(x), \varphi_u(x) \rangle dx \rightarrow \min \quad (5.2)$$

имеет решение в классе кусочно-линейных отображений $\varphi_u(x)$, таких, что

$$\varphi_u(x)|_\Gamma = \bar{\varphi}_u(x)|_\Gamma.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{W}(x, F) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{W(x, s \cdot F)}{s}.$$

Будем предполагать, что $\tilde{W}$ конечна для всех $x \in \Omega$, $F \in M_n$. Очевидно, что функция $\tilde{W}$ однородна степени 1 по аргументу F . Если теперь T — триангуляция области Ω с N вершинами, то для всякого $u \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ и всякого $s \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\varphi_{s \cdot u}(x) = s \cdot \varphi_u(x),$$

поэтому можно определить однородную функцию степени 1, полагая

$$\tilde{H}(u) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{H(su)}{s} = \int_{\Omega} \tilde{W}(x, D\varphi_u(x)) + \langle w(x), \varphi_u(x) \rangle dx.$$

Согласно теореме 2 для доказательства существования точки минимума для функции $H(u)$, $u \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ достаточно найти условия, при которых $\tilde{H}(u) > 0$, $|u| = 1$. Более того, в силу замечания 5 мы можем считать, что значения u выбираются таким образом, что $\varphi_u(x) = 0$, $x \in \Gamma \subset \partial\Omega$. Также в силу замечания 6 мы будем предполагать, что $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i| = 1$.

Поэтому в каждом симплексе $S \in T$ будет выполнено $|\varphi_u(x)| \leq 1$, а значит,

$$\int_{\Omega} \langle w(x), \varphi_u(x) \rangle dx \leq \int_{\Omega} |w(x)| dx.$$

Принимая во внимание условие коэрцитивности (1.5) при $p = 1$, будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{W}(x, D\varphi_u(x)) dx &\geq \alpha \int_{\Omega} |D\varphi_u(x)| dx = \\ &= \alpha \sum_{S \in T} \int_S |D\varphi_u(x)| dx. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в последней сумме. Обозначим через q_i , $i = 0, \dots, n$ вершины симплекса S , и пусть $v_i = \varphi_u(q_i)$. Пусть также Q — это матрица, составленная из столбцов векторов $q_i - q_0$, $i = 1, \dots, n$, а V — это матрица, составленная из векторов столбцов $v_i - v_0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда по построению отображения φ_u имеет место равенство

$$D\varphi_u(x)Q = V, \quad x \in S.$$

Поэтому

$$|D\varphi_u(x)| = |VQ^{-1}|.$$

Учитывая, что объем симплекса $|S| = \frac{1}{n!}\det(Q)$, будем иметь

$$\int_S |D\varphi_u(x)|dx = \frac{1}{n!}|VQ^{-1}|\det(Q).$$

Заметим, что матрица Q^{-1} составлена из строк векторов $\frac{(n-1)!}{\det(Q)}S_i\xi_i$, $i = 1, \dots, n$. Здесь S_i равно $(n-1)$ -мерному объему грани симплекса S , лежащей напротив вершины q_i , а ξ_i — внешняя нормаль этой грани. Следовательно, матрица

$$\tilde{Q} = \frac{Q^{-1}\det(Q)}{|\partial S|},$$

где через $|\partial S|$ обозначен $(n-1)$ -й объем поверхности симплекса S , зависит только от формы симплекса и не зависит от его размеров. Обозначим через λ_S минимальное собственное число матрицы $\tilde{Q}^T\tilde{Q}$. В силу невырожденности симплекса выполнено $\lambda_S > 0$. Тогда

$$||VQ^{-1}||\det(Q) \geq \sqrt{\lambda_S}|\partial S| \cdot |V|.$$

Полагая

$$\mu_T = \min_{S \in T} \sqrt{\lambda_S}|\partial S|,$$

будем иметь

$$\int_{\Omega} \tilde{W}(x, D\varphi_u(x))dx \geq \frac{\alpha\mu_T}{n!} \sum_{S \in T} |V|.$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} |V| &\geq \operatorname{osc}_S \varphi_u(x) = \sup_{x, y \in S} |\varphi_u(x) - \varphi_u(y)| = \\ &= \max_{i \neq j} |v_i - v_j|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{S \in T} |V| \geq \sum_{S \in T} \max_{i \neq j} |v_i - v_j|.$$

Учитывая, что $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i| = 1$, $\varphi_u(x) = 0$ для $x \in \Gamma$, заключаем, что $\sum_{S \in T} \max_{i \neq j} |v_i - v_j| \geq \operatorname{osc}_{\Omega} \varphi_u(x) = 1$. Теперь окончательно получаем условие существования приближенного решения задачи на минимум функционала (5.1) в виде неравенства

$$\int_{\Omega} |w(x)|dx < \frac{\alpha\mu_T}{n!}.$$

6. Заключение

Таким образом, в статье даны некоторые обоснования применения методов конструирования приближенного решения вариационной задачи на минимум функционала запасенной энергии, использованные в [8] для численного решения этой задачи. Доказано существование приближенных решений, из которых построена минимизирующая последовательность и найдены условия сходимости этой последовательности к точному решению вариационной задачи.

Список источников

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 636 с.
2. Болучевская А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 1-2. С. 20–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-20-23>
3. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Доклады Академии наук. 2015. № 465, № 5. С. 523–526. <https://doi.org/10.7868/S086956521535008X>
4. Гилева Л. В., Шайдуров В. В. Обоснование асимптотической устойчивости алгоритма триангуляции трехмерной области // Сибирский журнал вычислительной математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 123–136.
5. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М. : Мир, 1979. 576 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1984. 752 с.
7. Клячин В. А. Оценки кусочно-линейной аппроксимации производных функций классов Соболева // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 78–89. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.78>
8. Клячин В. А., Кузьмин В. В., Хижнякова Е. В. Метод триангуляции для приближенного решения вариационных задач нелинейной теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 55–73. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54>
9. Клячин В. А., Чебаненко Н. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. 2014. № 3 (22). С. 56–60.
10. Прохорова М. Ф. Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129. <https://doi.org/10.1134/S0081543808050155>
11. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 336 с.
12. Сьярле Ф. Математическая теория упругости : пер. с англ. М. : Мир, 1992. 472 с.

13. Ткачев В. Г. Некоторые оценки средней кривизны графиков над областями в $\mathbb{R}^n$ // Доклады АН СССР. 1990. Т. 314, № 1. С. 140–143.
14. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / с добавл. Х. Уэнта ; пер. с англ. З. Я. Шапиро ; под ред. А. Т. Фоменко. М. : Мир, 1989. 310 с.
15. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. N 63. P. 337–403.
16. Ball J. M. Progress and puzzles in nonlinear elasticity // Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics / Schröder J., Neff P. (eds.) ; CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 516. Vienna : Springer, 2010.
17. Giusti E. Minimal surfaces and functions of bounded variation. Birkhauser Boston Inc., 1984.
18. Morrey Jr. C. B. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. N 2. P. 25–53.
19. Optimal control of soft materials using a Hausdorff distance functional. SIAM / R. Ortigosa, J. Martínez-Frutos, C. Mora-Corral, P. Pedregal, F. Periago // Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59, N 1. P. 393–416. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25255.50084>

References

1. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody. 8th ed. Moscow, BINOM Publ., 2019, 636 p. (in Russian)
2. Boluchevskaya A.V. On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 20–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-20-23> (in Russian)
3. Vodop'yanov S.K., Molchanova A.O. Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion. *Doklady Akademii Nauk*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 739–742. <https://doi.org/10.7868/S086956521535008X> (in Russian)
4. Gilyova L.V., Shaidurov V.V. Justification of asymptotic stability of the triangulation algorithm for a three-dimensional domain. *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki*, 2000, vol. 3, no. 2, pp. 123–136. (in Russian)
5. Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. Numerical analysis of variational inequalities. Moscow, Mir Publ., 1981, 576 p. (in Russian)
6. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p. (in Russian)
7. Klyachin V.A. Estimates for piecewise linear approximation of derivative functions of Sobolev classes. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 78–89. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.78> (in Russian)
8. Klyachin V.A., Kuzmin V.V., Khizhnyakova E.V. Triangulation Method for Approximate Solving of Variational Problems in Nonlinear Elasticity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 54–72. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54> (in Russian)
9. Klyachin V.A., Chebanenko N.A. About linear preimages of continuous maps, that preserve orientation of triangles. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2014, no. 3. pp. 56–60. (in Russian)

10. Prokhorova M.F. Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 261, no 1, pp. 165–182. <https://doi.org/10.1134/S0081543808050155> (in Russian)
11. Sobolev S.L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Moscow, Nauka Publ., 1988, 336 p. (in Russian)
12. Ciarlet Ph.G. *Mathematical theory of elasticity*. Moscow, Mir Publ., 1992, 472 p. (in Russian)
13. Tkachev V.G. Some estimates for the mean curvature of graphs over domains in $\mathbb{R}^n$. *Doklady Akademii Nauk*, 1990, vol. 314, no. 1, pp. 140–143. (in Russian)
14. Finn R. *Equilibrium capillary surfaces*. Springer-Verlag, 1986, 245 p.
15. Ball J.M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, no. 63, pp. 337–403.
16. Ball J.M. Progress and puzzles in nonlinear elasticity. *Schröder J., Neff P. (eds.) Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol. 516, Springer, Vienna, 2010.
17. Giusti E. Minimal surfaces and functions of bounded variation. Birkhauser Boston Inc., 1984.
18. Morrey Jr. C. B. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals *Pacific J. Math.*, 1952, no. 2, pp. 25–53.
19. Ortigosa R., Martínez-Frutos J., Mora-Corral C., Pedregal P., Periago F. Optimal control of soft materials using a Hausdorff distance functional. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, no. 1, pp. 393–416. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25255.50084>

Об авторах

Клячин Владимир

Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Волгоградский государственный университет, Волгоград, 400062, Российская Федерация, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>

About the authors

Vladimir A. Klyachin, Dr. Sci.

(Phys.–Math.), Prof., Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russian Federation, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>

Кузьмин Владислав

Вячеславович, аспирант, Волгоградский государственный университет, Волгоград, 400062, Российская Федерация, vlad329@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0004-2788-9396>

Vladislav V. Kuzmin,

Postgraduate, Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russian Federation, vlad329@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0004-2788-9396>

Поступила в редакцию / Received 15.01.2025

Поступила после рецензирования / Revised 20.03.2025

Принята к публикации / Accepted 24.03.2025