Серия «Математика»
2025. Т. 52. С. 162—174

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 510.67
MSC 03C30, 03C65
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.162

Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур

С. Б. Малышев[1]✉

[1] Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация
✉ sergei2-mal1@yandex.ru

Аннотация. Исследуется, как предгеометрия, возникающая при композиции двух структур предикатной сигнатуры, наследует виды предгеометрий изначальных структур. Устанавливаеся, что в случае вырожденности, модулярности и локально конечности предгеометрии графовой сигнатуры предгеометрия их композиции наследует соответствующие свойства. Также приводятся контрпримеры обратного утверждения.

Ключевые слова: предгеометрия, композиция структур, вырожденность, модулярность, локально конечность, алгебраическое замыкание

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00096.

Ссылка для цитирования: Малышев С. Б. Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 162–174.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.162

Research article

Heritability of Types of Pregeometry with Respect to Compositions of Structures

Sergey B. Malyshev[1]✉

[1] Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation
✉ sergei2-mal1@yandex.ru

Abstract. In this paper, we investigate how the pregeometry arising from the composition of two predicate signature structures inherits the types of pregeometries of the original stuctures. We establish that in the case of degeneracy, modularity and locally finiteness of a graph signature's pregeometry, the pregeometry of their composition inherits the corresponding properties. We also give counterexamples to the converse statement.

Keywords: pregeometry, structure composition, degeneracy, modularity, locally finite, algebraic closure

Acknowledgements: The work was supported by Russian Scientific Foundation, Project No. 24-21-00096.

For citation: Malyshev S. B. Heritability of Types of Pregeometry with Respect to Compositions of Structures. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 52, pp. 162–174. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.162

1. Введение

Предгеометрия и геометрия различных математических структур остаются важными объектами исследований в области математической логики и теории моделей. В 1970–1980-х гг. исследователи начали активно изучать предгеометрии и геометрии для классов o-минимальных и ω-стабильных структур. Значительный вклад в развитие этой области внесли работы Б. И. Зильбера [19–21], Г. Черлина, Л. Харрингтона, А. Лахлана [9] и А. Пилая [17]. В частности, в 1970-х гг. Б. И. Зильбер сформулировал гипотезы о несчетно категоричных теориях, среди которых ключевой была гипотеза о возможности классификации таких теорий с точностью до биинтерпретируемости. В 1986 г. А. Пилай [17] показал, что если o-минимальная теория является модулярной, то выполняется слабое исключение мнимых чисел. В сильно минимальном случае также известно, что при модулярности выполняется геометрическое исключение мнимых чисел [16].

В последующие годы исследования предгеометрий продолжились. В 1996 г. Э. Хрушовский [13] предложил оригинальную конструкцию сильно минимальной структуры, не являющейся локально модулярной, для которой невозможно проинтерпретировать бесконечную группу. Эти работы стали основой для дальнейших исследований, направленных на классификацию и описание предгеометрий различных объектов [6–8], таких как матроиды Вамоса [15].

Поэтому возникают естественные вопросы о классификации предгеометрий и геометрий для различных значимых классов структур и их теорий.

Современные учёные используют композиции структур, чтобы выявить свойства, которые зависят от наследственных характеристик исходных теорий. Примером может выступать монография «Алгебры бинарных формул» [10], в которой устанавливаются условия E-определимой композиции, относительно её исходных структур. Более подробно это изложено в статье [11].

В данной работе мы исследуем как предгеометрия, возникающая при композиции двух структур предикатной сигнатуры, наследует виды предгеометрий изначальных стуктур. Мы устанавливаем, что в случае вырожденности, модулярности и локально конечности предгеометрии графовой сигнатуры предгеометрия их композиции наследует соответствующие свойства.

2. Предгеометрии. Виды предгеометрий

Из работ [4;9;12;14;16;18] и [5] приведём необходимые нам определения.

Определение 1. [16] ***Предгеометрией*** *называется множество* S *вместе с определённой операцией замыкания* $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, *удовлетворяющей следующим условиям:*

1) для любого $X \subseteq S$ *выполняется* $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$*;*

2) для любого $X \subseteq S$ *выполняется* $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$*;*

3) для любого $X \subseteq S$ *и любых* $a, b \in S$*, если* $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$*, то* $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$*;*

4) для любого $X \subseteq S$*, если* $a \in \mathrm{cl}(X)$*, то* $a \in \mathrm{cl}(Y)$ *для некоторого конечного* $Y \subseteq X$*.*

При наличии предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ каждое подмножество $X \subseteq S$ имеет минимальное множество $X' \subseteq X$ такое, что $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(X')$. Это минимальное множество X' называется *базисом* множества X. При этом все базисы равномощны и эта мощность называется *размерностью* множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$, обозначается $\dim(X)$.

По определению имеем $\dim(X) = \dim(\mathrm{cl}(X))$, т. е. размерность сохраняется при переходе к замыканию множества X в предгеометрии $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$.

Если $\dim(X) \in \omega$, то множество X называется *конечномерным.*

Определение 2. [16] *Множество* $X \subseteq S$ *называется* ***замкнутым****, если* $X = \mathrm{cl}(X)$.

Определение 3. [16] *Предгеометрия* $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ *называется* ***тривиальной****, или* ***вырожденной****, если для любого* $X \subseteq S$, $\mathrm{cl}(X) = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ *называется* ***модулярной****, если для любых замкнутых множеств* $X_0, Y_0 \subseteq S$*,* X_0 *независимо от* Y_0 *относительно* $X_0 \cap Y_0$*, т. е. для любых конечномерных замкнутых множеств* $X \subseteq X_0$*,* $Y \subseteq Y_0$ *верно*

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ *называется* ***локальной модулярной****, если для любого* $a \in S$ *предгеометрия* $\langle S, \mathrm{cl}_{\{a\}} \rangle$ *модулярна, где* $\mathrm{cl}_{\{a\}}(X) = \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$.

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ *называется* ***проективной****, если она модулярная и нетривиальная, и* ***локально проективной****, если она локально модулярная и нетривиальная.*

Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ *называется* ***локально конечной****, если для любого конечного подмножества* $A \subseteq S$ *множество* $\mathrm{cl}(A)$ *конечно.*

Определение 4. *Пусть* S *— модель теории* T*. Тогда оператором* ***алгебраического замыкания*** *для модели* M *называется оператор* $\mathrm{acl} : P(M) \to P(M)$ *такой, что для любого подмножества* $X \subseteq S$, $\mathrm{acl}(X) = \{a \in S \mid$ *для некоторой формулы* $\phi(x, \bar{y})$ *и* $\bar{b} \in X$ *верно* $S \models \exists^{<\omega} x \phi(x, \bar{b}) \wedge \phi(a, \bar{b})\ \}$.

В дальнейшем будут рассматриваться предгеометрии вида $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$.

3. Композиции структур

Определение 5. [11] *Пусть* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *— структуры предикатных сигнатур* $\Sigma_{\mathcal{M}}$ *и* $\Sigma_{\mathcal{N}}$ *соответсвенно. Определим* ***композицию*** $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ *структур* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *по следующим правилам:*

1) $\Sigma_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]} = \Sigma_{\mathcal{M}} \bigcup \Sigma_{\mathcal{N}}$*;*

2) $M[N] = M \times N$*, где* $M[N], M, N$ *— носители структур* $\mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *соответственно;*

3) если $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \backslash \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$*, то* $((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ *тогда и только тогда, когда* $(a_1, ..., a_n) \in R_{\mathcal{M}}$*;*

4) если $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \backslash \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$*, то* $((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ *тогда и только тогда, когда* $a_1 = ... = a_n$ *и* $(b_1, ..., b_n) \in R_{\mathcal{N}}$*;*

5) если $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \bigcap \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$*, то* $((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ *тогда и только тогда, когда* $(a_1, ..., a_n) \in R_{\mathcal{M}}$ *или* $a_1 = ... = a_n$ *и* $(b_1, ..., b_n) \in R_{\mathcal{N}}$.

Определение 6. [10] *Композиция* $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ *называется* ***e-определимой****, если* $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ *имеет* $\emptyset$*-определимое отношение эквивалентности* E*, у которого* E*-классы являются носителями копий структуры* $\mathcal{N}$*, образующих* $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$*. Если отношение эквивалентности* E *фиксировано, то e-определимая композиция называется* E***-определимой****.*

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *— структуры предикатных сигнатур, а* $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ *их* E*-определимая композиция. Тогда верны утверждения:*

1) если структура $\mathcal{N}$ *конечна, а предгеометрия* $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ *обладает одним из свойств — вырожденности, модулярности или локально конечности, то предгеометрия* $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$ *наследует это свойство;*

2) если структура $\mathcal{M}$ конечна, а $\mathcal{N}$ бесконечна, тогда алгебраические замыкания на подмножествах $M[N]$ задаются алгебраическими замыканиями в копиях $\mathcal{N}$.

Доказательство. 1) По условию $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ — E-определимая композиция, а структура $\mathcal{N}$ конечна. Тогда множество решений формулы $E(x,a)$ будет содержать элементы всего E-класса с элементом a, т. е. решением будут все вершины копии структуры $\mathcal{N}$, в которой содержится вершина a.

Тогда алгебраическое замыкание любого подмножества с вершиной a будет содержать все вершины её E-класса. Поэтому формулы из структуры $\mathcal{M}$ с отношением E будут работать в композиции $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$. Причём если элемент $b \in M$ — решение формулы из структуры $\mathcal{M}$, то в композиции $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ решением будет копия структуры $\mathcal{N}$, замещающая в вершину b. Алгебраическое замыкание любого множества из композиции можно получить, используя только формулы из структуры $\mathcal{M}$. Значит, предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ обладает свойствами предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$.

2) Все вершины, которые входили в $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в структуре $\mathcal{N}$, являются решениями алгебраических формул. Так как структура $\mathcal{M}$ конечная, а значит и конечно число копий структуры $\mathcal{N}$, то количество решений этих формул остается конечным. А значит их можно использовать в алгебраическом замыкании для предгеометрии композиции. Получается, что алгебраическое замыкание $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в структуре $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ состоит из вершин входящих в $\mathrm{acl}(\emptyset)$ копий структур $\mathcal{N}$.

Рассмотрим вершины, лежащие в $\mathrm{acl}(A)\backslash\mathrm{acl}(\emptyset)$, для некоторого произвольного подмножества $A \subseteq M[N]$. Будем обозначать A^E элементы множества A, лежащие в E-классе.

Для каждого E-класса, используя отношения E, мы можем модифицировать и использовать формулы структуры $\mathcal{N}$. Таким образом, мы найдём все элементы $\mathrm{acl}(A^E)\backslash\mathrm{acl}(\emptyset)$, лежащие в соответствующей копии структуры $\mathcal{N}$.

Получается, что замыкание пустого множества состоит из замыканий пустых множеств в копиях структур $\mathcal{N}$, а замыкания подмножества элементов из E-класса будет совпадать с замыканием этого множества в копиях структур $\mathcal{N}$.

Осталось понять, что будет входить в замыкание вершин из разных классов. А конкретно, вершины из классов, не пересекающихся с множеством A.

По построению композиции, если вершины двух E-классов смежны между собой, то любая вершина одного класса будет смежна со всеми вершинами другого класса.

Если вершина $b \in M[N]$ не содержится в $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в копии структуры $\mathcal{N}$, тогда любая формула из $S_1(\emptyset)$, для которой эта вершина была бы решением, имеет бесконечное число решений. По построению любая вершина из другого связанного E-класса будет инцидентна всем этим решениям. А значит, любая формула из $\mathrm{tp}(b/A)$ в композиции не добавляет вершины в $\mathrm{acl}(A)$.

Тогда алгебраические замыкания на подмножествах $M[N]$ задаются алгебраическими замыканиями в копиях $\mathcal{N}$. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — структуры графовой сигнатуры, а $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ их E-определимая композиция. Тогда верны утверждения:*

1) если вырождены предгеометрии $\langle\mathcal{M},\mathrm{acl}\rangle$ и $\langle\mathcal{N},\mathrm{acl}\rangle$, тогда предгеометрия $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ вырожденная;

2) если модулярны предгеометрии $\langle\mathcal{M},\mathrm{acl}\rangle$ и $\langle\mathcal{N},\mathrm{acl}\rangle$, тогда предгеометрия $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ модулярна;

3) если локально конечны предгеометрии $\langle\mathcal{M},\mathrm{acl}\rangle$ и $\langle\mathcal{N},\mathrm{acl}\rangle$, тогда предгеометрия $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ локально конечная.

Доказательство. 1) Рассмотрим 4 различных случая:

1. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — конечные структуры графовой сигнатуры. Тогда алгебраическое замыкание пустого множества $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в предгеометрии композиции $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ совпадает с носителем предгеометрии $M\times N$.

Поэтому замыкание любого подмножества будет совпадать с носителем. Получается для любого $X\subseteq M\times N$ выполняется равенство $\mathrm{acl}(X)=\bigcup\{\mathrm{acl}(\{a\})\mid a\in X\}$. Значит, $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ вырожденная.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечная, а $\mathcal{N}$ — конечная структура графовой сигнатуры. Тогда, в силу первого пункта предложения 1, предгеометрия $\langle\mathcal{M}[\mathcal{N}],\mathrm{acl}\rangle$ обладает свойствами предгеометрии $\langle\mathcal{M},\mathrm{acl}\rangle$. По условию предгеометрия $\langle\mathcal{M},\mathrm{acl}\rangle$ вырожденная.

3. Пусть $\mathcal{M}$ — конечная, а $\mathcal{N}$ — бесконечная структура графовой сигнатуры. Предположим, что условие вырожденности нарушается. Тогда существует подмножество $A\subseteq M[N]$ и вершина $b\in M[N]$ такие, что для любого элемента a из множества A ($\forall a\in A$) элемент b не лежит в замыкании a ($b\notin\mathrm{acl}(a)$), но $b\in\mathrm{acl}(A)$.

Рассмотрим решения формул с элементами из множества A, которые находятся в одном E-классе с элементом b.

Пусть b лежит в E-классе с вершинами из A. Для удобства будем помечать вершины $a\in A$ или подмножества вершин $B\subseteq A$ из A, лежащие в этом классе, индексом E, т. е. a^E и B^E. По условию вершина b не лежит в $\mathrm{acl}(a^E)$ для любой $a^E\in A$. Значит, любая формула из $\mathrm{tp}(b/a^E)$ для любой вершины $a^E\in A$ имеет бесконечное число решений. В силу вырожденности предгеометрии $\langle\mathcal{N},\mathrm{acl}\rangle$ ни одна формула, использующая отношения только на вершинах из данного E-класса, не нарушает условия вырожденности в композиции. Поэтому рассмотрим формулы из $\mathrm{tp}(b/A^E)$, опирающиеся на вершины и ребра из других E-классов.

В силу построения композиции, если вершина соединена ребром с одной из вершин другого E-класса, то она соединена со всеми остальными его вершинами. Поэтому все вершины из других E-классов, которые связаны с b ребром, будут соединены со всеми вершинами, не лежащими в $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Поэтому они также будут соединены с решениями формул из $\mathrm{tp}(b/a^E)$ для любой $a^E \in A$. Значит, данные формулы не имеют конечного числа решений и не добавляют элемент b в $\mathrm{acl}(A)$.

Рассмотрим влияние вершин из A, не лежащих с b в одном E-классе. Пусть b лежит в E-классе. Разберём всевозможные случаи:

а) если b содержится в конечной компоненте копии структуры $\mathcal{N}$, которая изоморфна конечному числу компонент, тогда $b \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ в силу конечности $\mathcal{M}$. Если $b \in \mathrm{acl}(\emptyset)$, то b лежит в замыкании a $(b \in \mathrm{acl}(a))$ $\forall a \in A$. Это противоречит описанным выше условиям;

б) если b содержится в конечной компоненте копии структуры $\mathcal{N}$, которая изоморфна бесконечному числу компонент этой копии. Тогда либо b содержится в компоненте с элементом a^E из A, либо без элементов из A. В первом случае, так как компонента конечна, то все её элементы, включая b, будут лежать в $\mathrm{acl}(a^E)$. Во втором случае, так как подобных компонент бесконечное число, то и любые формулы из $\mathrm{tp}(b/A)$ будут иметь бесконечное число решений. Значит, $b \notin \mathrm{acl}(A)$. Оба случая противоречат описанным выше условиям;

в) если b содержится в бесконечной компоненте копии структуры $\mathcal{N}$ и $b \notin \mathrm{acl}(A^E)$. Тогда все формулы из $\mathrm{tp}(b/N)$ для предгеометрии $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl} \rangle$ имеют бесконечно много решений. Так как любая вершина из другого E-класса, связанная с b, согласуется с остальными решениями этих формул, то любые формулы из $\mathrm{tp}(b/A)$ будут иметь все эти решения. Значит, $b \notin \mathrm{acl}(A)$, что противоречит описанным выше условиям.

Получается, что во всех случаях из вырожденности предгеометрий $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ и $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl} \rangle$ следует вырожденность предгеометрии $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$.

4. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — бесконечные структуры графовой сигнатуры. Тогда доказательство данного пункта практически полностью совпадает с доказательством 3. Но подп. а) доказывается иначе:

Пусть b содержится в конечной компоненте копии структуры $\mathcal{N}$, которая изоморфна конечному числу компонент. Тогда в структуре $\mathcal{N}$ можно взять формулу, решением которой будут вершины этих компонент. А в структуре $\mathcal{M}$ — формулы из $\mathrm{S}_1(B)$, где B — множество вершин из M, в которых при размещении копий структуры $\mathcal{N}$ будут вершины из A, т. е. таких, что в $(b, c) \in A \subseteq M \times N$, $b \in M$, $c \in N$. Собрав эти формулы при помощи конъюнкции и отношения E, мы получим формулы, решением которых будет вершина

из $\mathrm{tp}(b/(A \backslash A^E))$ будут соответсвовать условиям вырожденности предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$.

2) Рассмотрим 4 различных случая:

1. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — конечные структуры графовой сигнатуры. Тогда алгебраическое замыкание пустого множества совпадает с носителем предгеометрии $M[N]$. Значит, размерность любого множества равна 0.

Получается для любых конечномерных замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ всегда выполняется равенство

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

2. Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечная, а $\mathcal{N}$ — конечная структура графовой сигнатуры. Тогда, в силу первого пункта предложения 1, предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ обладает свойствами предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$. По условию предгеометрия $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$ модулярная.

3. Пусть $\mathcal{M}$ — конечная, а $\mathcal{N}$ — бесконечная структура графовой сигнатуры. Тогда, в силу второго пункта предложения 1, для любого множества $A \subseteq M[N]$ его алгебраическое замыкание $\mathrm{acl}(A)$ совпадает с объединением алгебраических замыканий по всем копиям структуры $\mathcal{N}$, т. е. $\mathrm{acl}(A) = \bigcup\limits_E \mathrm{acl}(A^E)$.

Но верно ли равенство с размерностями $\dim(A) = \bigcup\limits_E \dim(A^E)$? Элементы из $\mathrm{acl}(\emptyset)$ не учитываются в размерности, а элементы из

$$\mathrm{acl}(A^E)\backslash\mathrm{acl}(\emptyset)$$

нельзя получить формулами из $S_1(A\backslash A^E)$. Получается, выполняется равенство $\dim(A) = \bigcup\limits_E \dim(A^E)$.

Так как по условию предгеометрия $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$ модулярная, то на каждом E-классе для любых конечномерных замкнутых множеств $X^E \subseteq X_0^E$, $Y^E \subseteq Y_0^E$ верно

$$\dim(X^E) + \dim(Y^E) - \dim(X^E \cap Y^E) = \dim(X^E \cup Y^E).$$

Тогда верно

$$\sum_E \dim(X^E) + \sum_E \dim(Y^E) - \sum_E \dim(X^E \cap Y^E) = \sum_E \dim(X^E \cup Y^E)$$

и для любых конечномерных замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) = \dim(X \cup Y).$$

4. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — бесконечные структуры графовой сигнатуры. Отличие от предыдущего пункта состоит в том, что замыкание пустого множества $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в композиции структур может не совпадать с объединением $\mathrm{acl}(\emptyset)$ в копиях структуры $\mathcal{N}$.

Но замыкание подмножеств в копиях структуры $\mathcal{N}$ будет работать так же, как и раньше. Равенство $\dim(X^E) + \dim(Y^E) - \dim(X^E \cap Y^E) = \dim(X^E \cup Y^E)$ в E-классах также будет работать в силу модульности предгеометрии $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$.

Заметим, что элементы в копиях структуры $\mathcal{N}$, которые в самой предгеометрии $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl} \rangle$ лежат в $\mathrm{acl}(\emptyset)$, будут учитываться в размерностях предгеометрии $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$, только если в $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ нарушается условие модулярности.

3) Рассмотрим 4 различных случая:

1. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — конечные структуры графовой сигнатуры. Тогда алгебраическое замыкание любого множества конечно.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечная, а $\mathcal{N}$ — конечная структура графовой сигнатуры. Тогда, в силу первого пункта предложения 1, предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$ обладает свойствами предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$. По условию предгеометрия $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ локально конечная.

3. Пусть $\mathcal{M}$ — конечная, а $\mathcal{N}$ — бесконечная структура графовой сигнатуры. По построению композиции, если вершины двух E-классов смежны между собой, то любая вершина одного класса будет смежна со всеми вершинами другого класса. Так как предгеометрия $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl} \rangle$ вырожденная, то для любого конечного подмножества $A \subseteq N$, формулы из $S_1(A)$, имеющие конечное число различных решений в структуре $\mathcal{N}$, — конечное число. Все формулы из $S_1(A)$ композиции $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ можно представить как конъюнкцию формул структуры $\mathcal{N}$ с отношением E и отношением R между классами. Ввиду конечности $\mathcal{M}$ число формул, которые мы составим подобным образом, конечно. А значит, $\mathrm{acl}(A)$ для любого конечного $A \subseteq M[N]$, будет использовать конечное число формул с конечным числом решений, то есть $|\mathrm{acl}(A)| < \omega$.

4. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — бесконечные структуры графовой сигнатуры. Предположим, что нарушается условие локальной конечности предгеометрии $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$. Тогда существует конечное подмножество $A \subseteq M[N]$ такое, что его замыкание бесконечно. Мы уже знаем, что все формулы из $S_1(A)$ композиции $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ можно представить как конъюнкцию формул структуры $\mathcal{N}$ с отношением E и отношением R между классами. Все формулы структуры $\mathcal{N}$ из $S_1(A^E)$ дают конечное число различных решений. Поэтому замыкание конечного подмножества $A \subseteq M[N]$ может быть бесконечным только тогда, когда его решение будет состоять из вершин бесконечного числа различных E-классов. Это значит, что решений формул $S_1(A)$ структуры $\mathcal{M}$ бесконечное число. Значит, предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$ не локально конечна. Противоречие. □

Замечание 1. В общем случае обратные утверждения не верны.

Пример 1. Рассмотрим композицию $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$, составленную из двух бесконечных кубических структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Структура $\mathcal{M}$ будет состоять из бесконечного куба. Значит, предгеометрия $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ не вырожденная, так как алгебраическое замыкание любых двух элементов будет состоять из элементов наименьшего куба, заключённого между ними. При этом любое одноэлементное множество будет замкнутым, т. е. $\mathrm{cl}(\{a\}) = \{a\}$ для любого элемента a из носителя предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$.

Структура $\mathcal{N}$ будет состоять из бесконечного числа конечных кубов размера 1. Тогда предгеометрия $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$ будет вырожденной. Алгебраическое замыкание любого множества будет состоять из элементов компонент связности, в которых данное множество лежит. Так как размерность каждого куба равна 1, то структура представляет из себя бесконечный пустой граф. Получается, любое подмножество X из носителя предгеометрии $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$ будет замкнутым, а значит, выполняется равенство $X \subseteq S$, $\mathrm{cl}(X) = X = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) = \{a\} \mid a \in X\} = \bigcup\{\mathrm{cl}(\{a\}) \mid a \in X\}$.

Более подробно об условиях для типов кубических предгеометрий было написано в статье [2].

При этом предгеометрия композиций этих структур $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ будет вырожденной. Любое подмножество элементов из носителя данной предгеометрии будет замкнутым. Что влечёт вырожденность предгеометрии композиции. Нарушение условия вырожденности предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$ в данном случае не влияет на вырожденность композиции, так как на место вершин структуры $\mathcal{M}$, которые были решениями формул для алгебраического замыкания некоторого подмножества X из носителя M, в композиции подставлена копия структуры $\mathcal{N}$, т. е. бесконечное множество однотипных вершин. Это значит, что формулы из предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$, даже с указанием E-класса, будут иметь бесконечное число решений. Получается они не смогут повлиять на вырожденность предгеометрии композиции.

Эти структуры также будут являться примером для модулярности. Предгеометрия $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$ немодулярна, а $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$ и $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ будут модулярными.

Пример 2. Рассмотрим композицию $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$, составленную из двух бесконечных структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Структура $\mathcal{M}$ будет состоять из бесконечного дерева, у которого степени всех его вершин различны. Тогда алгебраическое замыкание пустого множества, а значит и любого конечного множества, будет состоять из элементов всего дерева. Получается, предгеометрия $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl}\rangle$ не локально конечная.

Структура $\mathcal{N}$, как и в прошлом примере, будет состоять из бесконечного числа конечных кубов размера 1. Алгебраическое замыкание любого множества будет состоять из элементов компонент связности, в которых данное множество лежит. Так как размерность каждого куба равна 1, то структура представляет из себя бесконечный пустой граф. Получается, любое подмножество X из носителя предгеометрии $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl}\rangle$ будет замкнутым, а значит, для любого конечного подмножества X его алгебраическое замыкание $\mathrm{acl}(X) = X$ тоже будет конечным. Тогда предгеометрия $\langle \mathcal{N}, \mathrm{acl} \rangle$ локально конечна.

Более подробно об условиях для типов кубических предгеометрий было написано в статье [2], об условиях для типов ациклических предгеометрий было написано в статье [3].

При этом предгеометрия композиций этих структур $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl} \rangle$ является локально конечной. Любое подмножество элементов из носителя данной предгеометрии будет замкнутым. Что влечёт локально конечность предгеометрии композиции. Нарушение условия локально конечности предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$ в данном случае не влияет на локально конечность композиции, так как на место вершин структуры $\mathcal{M}$, которые были решениями формул для алгебраического замыкания некоторого подмножества X из носителя M, в композиции подставлена копия структуры $\mathcal{N}$, т. е. бесконечное множество однотипных вершин. Это значит, что формулы из предгеометрии $\langle \mathcal{M}, \mathrm{acl} \rangle$, даже с указанием E-класса, будут иметь бесконечное число решений. Получается они не смогут повлиять на локально конечность предгеометрии композиции.

4. Заключение

Мы установили, что предгеометрия, порожденная композицией $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ бесконечной структуры $\mathcal{M}$ и конечной структуры $\mathcal{N}$ предикатной сигнатуры, наследует свойства вырожденности, модулярности и локально конечности предгеометрии структуры $\mathcal{M}$. Для структур графовой сигнатуры, в случае когда предгеометрии обеих структур вырождены, модулярны или локально конечны, мы доказали сохранение этих свойств и в предгеометрии их композиций. Причём обратное условие в общем случае неверно, т. е. вышеописанные свойства предгеометрии композиции не обязаны присутсвовать у предгеометрий изначальных структур. Дальнейшие исследования в этом направлении могут включать более глубокий анализ других типов структур и их композиций, что приведет к расширению наших знаний о свойствах предгеометрий и их наследовании.

Список источников

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. М. : Наука, 1990. 384 с.
2. Малышев С. Б. Виды предгеометрий кубических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 140–149. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.140
3. Малышев С. Б. Виды предгеометрий ациклических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 110–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.110

4. Судоплатов С. В. Полигонометрии групп. Новосибирск : НГТУ, 2013. 302 с.
5. Судоплатов С. В. Замыкания и множества образующих, связанные с комбинациями структур // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 16. С. 131–144.
6. Berenstein A., Vassiliev E. On lovely pairs of geometric structures // Annals of Pure and Applied Logic. 2010. Vol. 161, N 7. P. 866–878.
7. Berenstein A., Vassiliev E. Weakly one-based geometric theories // J. Symb. Logic. 2012. Vol. 77, N 2. P. 392–422.
8. Berenstein A., Vassiliev E. Geometric structures with a dense independent subset // Selecta Math. 2016. Vol. 22, N 1. P. 191–225.
9. Cherlin G. L., Harrington L., Lachlan A. H. ω-categorical, ω-stable structures // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. Vol. 28. P. 103–135.
10. Emel'Yanov D. Y., Kulpeshov B. S., Sudoplatov S. V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N 4. P. 295-–312. https://doi.org/10.1007/s10469-020-09602-y
11. Emel'Yanov D. Y., Kulpeshov B. S., Sudoplatov S. V. Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic. 2020. Vol. 59, N 4. P. 432–457. https://doi.org/10.1007/s10469-020-09602-y
12. Hodges W. Model Theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1993. 772 p.
13. Hrushovski E. A new strongly minimal set // Annals of Pure and Applied Logic. 1993. Vol. 62. P. 147–166.
14. Markhabatov N. D., Sudoplatov S. V. Topologies, ranks, and closures for families of theories. I // Algebra and Logic. 2021. Vol. 59. N 6. P. 437–455.
15. Mukhopadhyay M. M., Vassiliev E. On the Vamos matroid, homogeneous pregeometries and dense pairs // Australian Journal of Combinatorics. 2019. Vol. 75, N 1. P. 158–170.
16. Pillay A. Geometric Stability Theory. Oxford : Clarendon Press, 1996. 361 p.
17. Pillay A. Some remarks on definable equivalence relations in o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. 1986. Vol. 51, N 3. P. 709–714 .
18. Sudoplatov S. V. Models of cubic theories // Bulletin of the Section of Logic. 2014. Vol. 43, N 1–2. P. 19–34.
19. Zilber B. I. Uncountably categorical theories. American Mathematical Society, 1993. 117 p.
20. Zilber B. I. Strongly minimal countably categorical theories // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1980. Vol. 21, N 2. P. 98–112.
21. Zilber B. I. Strongly minimal countably categorical theories II // Sibirsk Matematika Zhurnal. 1984. Vol. 25, N 3. P. 71–88.

References

1. Emelichev V.A., Melnikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I. *Lectures on graph theory*. Moscow, Science Publ., 1990, 384 p. (in Russian)
2. Malyshev S.B. Kinds of pregeometries of cubic theories. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 140—149. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.140
3. Malyshev S.B. Kinds of pregeometries of acyclic theories. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 110—120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.110
4. Sudoplatov S.V. *Group polygonometries*. Novosibirsk, NSTU Publ., 2013, 302 p.

5. Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 16, pp. 131–144.
6. Berenstein A., Vassiliev E. On lovely pairs of geometric structures. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2010, vol. 161, no. 7, pp. 866–878.
7. Berenstein A., Vassiliev E. Weakly one-based geometric theories. *J. Symb. Logic*, 2012, vol. 77, no. 2, pp. 392–422.
8. Berenstein A., Vassiliev E. Geometric structures with a dense independent subset. *Selecta Math.*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 191–225.
9. Cherlin G.L., Harrington L., Lachlan A.H. ω-categorical, ω-stable structures. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986, vol. 28, pp. 103–135.
10. Emel'Yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for compositions of theories. *Algebra and Logic*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 295-–312. https://doi.org/10.1007/s10469-020-09602-y
11. Emel'Yanov D.Y., Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for compositions of theories. *Algebra and Logic*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 432–457. https://doi.org/10.1007/s10469-020-09602-y
12. Hodges W. *Model theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge, Cambridge University Press, 1994, vol. 42, 772 p.
13. Hrushovski E. A new strongly minimal set. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1993, vol. 62, pp. 147–166.
14. Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Topologies, ranks, and closures for families of theories. I. *Algebra and Logic*, 2021, vol. 59, no. 6, pp. 437–455.
15. Mukhopadhyay M.M., Vassiliev E. On the Vamos matroid, homogeneous pregeometries and dense pairs. *Australian Journal of Combinatorics*, 2019, vol. 75, no. 1, pp. 158–170.
16. Pillay A. *Geometric Stability Theory.* Oxford, Clarendon Press, 1996, 361 p.
17. Pillay A. Some remarks on definable equivalence relations in o-minimal structures. *The Journal of Symbolic Logic*, 1986, vol. 51, no. 3, pp. 709–714 .
18. Sudoplatov S.V. Models of cubic theories. *Bulletin of the Section of Logic*, 2014, vol. 43, no. 1–2, pp. 19–34.
19. Zilber B.I. *Uncountably categorical theories.* American Mathematical Society, 1993, 117 p.
20. Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories. *Sibirsk Matematika Zhurnal*, 1980, vol. 21, no. 2, pp. 98–112.
21. Zilber B.I. Strongly minimal countably categorical theories II. *Sibirsk Matematika Zhurnal*, 1984, vol. 25, no. 3, pp. 71–88.

Об авторах

Малышев Сергей Борисович, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630073, Российская Федерация, sergei2-mal1@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6868-7545

About the authors

Sergey B. Malyshev, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, sergei2-mal1@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6868-7545

Поступила в редакцию / Received 02.07.2024
Поступила после рецензирования / Revised 19.11.2024
Принята к публикации / Accepted 20.11.2024