



Серия «Математика»
2025. Т. 52. С. 58–70

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.63, 521.1

MSC 35F20, 65D30

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.58>

Интегрирование уравнений задачи двух тел с помощью полной полиномиальной системы уравнений в частных производных

Л. К. Бабаджанянц¹, И. Ю. Потоцкая¹, Ю. Ю. Пупышева^{1✉}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
Российская Федерация
✉ j_poupycheva@mail.ru

Аннотация. Исследуется применение метода рядов Тейлора для решения полиномиальной системы уравнений в частных производных. Представлена полная система полиномиальных уравнений в частных производных для задачи двух тел. Предложен алгоритм численного интегрирования системы методом рядов Тейлора, приведены рекуррентные формулы для коэффициентов Тейлора.

Ключевые слова: метод рядов Тейлора, задача двух тел, полная полиномиальная система УрЧП, коэффициенты Тейлора

Ссылка для цитирования: Бабаджанянц Л. К., Потоцкая И. Ю., Пупышева Ю. Ю. Интегрирование уравнений задачи двух тел с помощью полной полиномиальной системы уравнений в частных производных // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 58–70.
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.58>

Research article

Integration of Equations of the Two-body Problem Using a Total Polynomial System of Partial Differential Equations

Levon K. Babadzanjanz¹, Irina Yu. Pototskaya¹,
Yulia Yu. Pupysheva^{1✉}

¹ St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation
✉ j_poupycheva@mail.ru

Abstract. The polynomial total system of partial differential equations constructed for the two-body problem is described in this paper. The algorithm for its numerical integration using the Taylor series method is presented. Recurrent formulas for Taylor coefficients obtained for the problem being solved are provided.

Keywords: two-body problem, Taylor Series Method, total polynomial PDE system, numerical PDE system integration

For citation: Babadzanjan L. K., Pototskaya I. Yu., Pupysheva Yu. Yu. Integration of Equations of the Two-body Problem Using a Total Polynomial System of Partial Differential Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 52, pp. 58–70. (in Russian)

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.58>

1. Введение

Настоящая статья посвящена решению задачи двух тел с помощью метода рядов Тейлора [7; 8]. Построение численных моделей динамики требует применения различных методов пошагового численного интегрирования общего назначения. Используются такие методы и их модификации, как метод итераций Пикара, методы Рунге-Кутты, Адамса, Штермера и т. д. [2; 11; 13]. В отношении метода рядов Тейлора следует отметить, что он предпочтительнее других методов, так как обеспечивает более высокую производительность и точность при построении моделей динамики с правыми частями уравнений принадлежащих определенному классу функций [1–3]. Существуют работы, использующие метод рядов Тейлора и метод итераций Пикара, которые применяются к дифференциальным уравнениям с полиномиальными правыми частями [15]. По исследованию решений УрЧП методом, основанным на рядах Тейлора, стоит отметить большое количество работ Yang Jie с соавторами (например, [9]). В работах же [1; 3] предлагается метод дополнительных переменных, с помощью которого можно получить правые части уравнений динамики в полиномиальном виде, поскольку это позволяет вычислять коэффициенты Тейлора по простой рекуррентной формуле.

Одной из самых известных задач классической механики является задача двух тел [4; 6; 10; 12] (например, с помощью нее можно описать взаимное движение планет и спутников, планет и звезд, электронов и т. д.) . Решение данной задачи было представлено Ньютоном. Однако можно представить решение для эксцентрической аномалии, координат и скоростей в виде функции времени и кеплеровских элементов. В этом случае математическая модель задачи двух тел может быть выражена в виде полной полиномиальной системы из двадцати трех частных дифференциальных уравнений. Представленный в работе метод рядов Тейлора позволяет найти решение полученной системы. Отметим, что

до недавнего времени в литературе не было описания алгоритмов для таких систем. Лишь в 2020–2021-х гг. в «Вестнике СПбГУ» были опубликованы статьи авторов [7; 8], в которых приводятся необходимые для этого математические алгоритмы. Это позволило получить полный набор формул для численной реализации метода Тейлора при решении задачи двух тел.

2. Алгоритм применения метода рядов Тейлора для решения полиномиальных систем УрЧП

Следует начать с изложения общего алгоритма применения метода Тейлора для интегрирования полиномиальных систем уравнений в частных производных. Заметим, что во многих прикладных задачах вполне возможно свести систему к полиномиальному виду путем введения дополнительных переменных [1; 3].

Итак, рассмотрим задачу Коши для полиномиальной системы УрЧП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} &= f_{\nu,j}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_s), \quad x_j(t_0) = x_{j,0}, \\ j &= \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $f_{\nu,j}$ — гладкая или кусочно-гладкая функция и введено обозначение $t_0 = (t_{0,1}, \dots, t_{0,s})$. Отметим, что при $s = 1$ система описывает частный случай — систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем необходимые обозначения [8]:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= (\partial^{|k|} x) / \partial t^k, \quad |k| = k_1 + \dots + k_s, \\ x_0^{(k)} &= x^{(k)}(t_0), \quad x^{(0)} = x, \quad x_0^{(0)} = x_0, \quad |x| = \max_{i \in [1:n]} x_i, \\ O_\rho(t_0) &= O_{\rho_1}(t_0) \times \dots \times O_{\rho_s}(t_0), \\ O_{\rho_\nu}(t_0) &= \{t \in C^s | (\forall j \in [1:s], j \neq \nu) (t_j = t_{0,j}), |t_\nu - t_{0,\nu}| < \rho_\nu\}, \\ T_M x(t, t_0, x_0) &= \sum_{m=0}^M x_0^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{m!}, \\ \delta T_M x(t, t_0, x_0) &= x(t, t_0, x_0) - T_M x(t, t_0, x_0), \\ m! &= \prod_{\mu=1}^s m_\mu!, \quad 0! = 1, \quad k = (k_1, \dots, k_s), \\ M &= (M_1, \dots, M_s) \in [0 : +\infty)^s, \quad \rho = (\rho_1, \dots, \rho_s) \in (0, +\infty)^s, \end{aligned}$$

где T_M и δT_M — операторы, сопоставляющие решению исходной задачи Коши полином Тейлора $T_M x(t, t_0, x_0)$ и остаточный член $\delta T_M x(t, t_0, x_0)$. Радиус сходимости ряда обозначим $R(t_0, x_0) = (R_1(t_0, x_0), \dots, R_s(t_0, x_0))$ (здесь и далее используем обозначение $O_\rho(t_0) = O_{\rho_1}(t_0) \times \dots \times O_{\rho_s}(t_0)$).

При решении задачи Коши (2.1) методом рядов Тейлора строится таблица приближенных значений $\tilde{x}_{t_w} = \tilde{x}(t_w)$ по формулам

$$\tilde{x}(\tau_w) = T_{N_w} x(\tau_w, \tau_{w-1}, \tilde{x}(\tau_{w-1})), \quad w = 1, 2, \dots,$$

где $N_w = (N_{w,1}, \dots, N_{w,s}) \in (0 : +\infty)^s$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_w = \tau_{w-1} + h_w$, $\tau_w = (\tau_{w,1}, \dots, \tau_{w,s})$, $h_w = (h_{w,1}, \dots, h_{w,s}) \in C^s$ (величина шага) при $|h_{w,\nu}| < R_\nu(\tau_{w-1}, x_{\tau_{w-1}})$, $\nu = \overline{1, s}$. При построении решения с высокой точностью число шагов может оказаться большим, что влечет за собой накопление ошибок и увеличение процессорного времени. Для решения этой проблемы предлагается на каждом шаге вычислять ρ_ν (радиус сходимости) и брать наибольший шаг с учетом оценки остаточного члена.

В основе представленного алгоритма лежат формулы для коэффициентов Тейлора, выбора величины шага и порядка, опирающиеся на доказанные теоремы в работе [8] и на эвристические соображения, обычно применяемые в численном анализе.

Алгоритм применения метода Тейлора состоит из перечисленных ниже шагов.

Шаг 1. Выписать всевозможные мономы, содержащиеся в системе (2.1). Получится некоторое множество мономов

$$T = (x^{i(n+1)}, \dots, x^{i(u)}).$$

Полагаем $x^{i(1)} = x_1, \dots, x^{i(n)} = x_n$.

Шаг 2. Рассортировать множество T таким образом, чтобы выполнялось условие

$$2 \leq |i(n+1)| \leq |i(n+2)| \leq \dots \leq |i(u)| \leq L+1, \quad (2.2)$$

где $|i|$ — степень одночлена, $L+1$ — максимальная степень монома в (2.1).

Шаг 3. Проверить для множества T выполнение условия

$$(\forall r \in [(n+1) : u]) (\exists p, q \in [1 : r]) (x^{i(r)} = x^{i(p)} x^{i(q)}). \quad (2.3)$$

Это условие означает, что очередной моном можно вычислить в виде произведения ранее вычисленных мономов.

Шаг 4. При невыполнении условия (2.3) необходимо дополнить множество T , сохраняя при этом сортировку (2.2).

Шаг 5. Составим схему мономов [14]

$$S = ((p(n+1), q(n+1)), \dots, (p(u), q(u))), \quad (2.4)$$

состоящую из $u - n$ пар $(p(r), q(r))$ таких, что $r > p(r), q(r)$ для любого $r \in [(n+1) : u]$.

Шаг 6. Используя схему (2.4), перепишем систему (2.1) в виде

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} = \sum_{m=0}^u a_{\nu, m, j} x^{i(m)}, \quad x_j(t_0) = x_{j,0}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, s}, \quad (2.5)$$

где $x^{i(0)} = 1, x^{i(1)}, \dots, x^{i(u)}$ — различные мономы правых частей уравнений.

Шаг 7. Для нахождения радиуса сходимости и шага используются следующие формулы:

$$\rho_\nu = \frac{1}{L s_\nu}, \quad s_\nu = \max_{j \in [1, n]} s_{\nu, j},$$

$$s_{\nu, j} = \sum_{m=0}^L \gamma^m \sum_{i \in I(m)} |a_{\nu, m, j}[i + e_j]|, \quad \gamma = |x_0| = \max_{j \in [1, n]} |x_{j,0}|,$$

$$t_\nu = t_{0, \nu} + \rho_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, s,$$

где $a_{\nu, m, j}[i + e_j]$ — коэффициент при мономе $x^{(i+e_j)}$,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

$$I(m) = \{i = (i_1, \dots, i_n), |i| = m\}.$$

Шаг 8. Для нахождения решения в точке t используется формула

$$x^{i(m)} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_1 + \dots + l_s = r} \frac{1}{l_1! l_2! \dots l_s!} x_{m, l} (t - t_0)^l,$$

где $(t - t_0)^l = (t - t_{0,1})^{l_1} (t - t_{0,2})^{l_2} \dots (t - t_{0,s})^{l_s}$, $l_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Вычисление коэффициентов $x_{m, l}$ при $\forall (l, \nu_l) \in Q_r$, $r = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_{j, l} = \sum_{\mu=(0, \dots, 0)}^l \frac{l_1! l_2! \dots l_s!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_s! (\mu_1 - l_1)! (\mu_2 - l_2)! \dots (\mu_s - l_s)!} x_{p(j), \mu} x_{q(j), l - \mu},$$

$$\nu \in [\nu_l; s], \quad x_{j, l+e_\nu} = \sum_{k=0}^u a_{\nu, j, k} x_{k, l}, \quad Q_{r+1} = (l + e_\nu, \nu) \cup Q_{r+1},$$

где $Q_r = \{(l, \nu), |l| = r\}$, $Q_0 = \{((0, 0, \dots, 0), 1)\}$, а $x_{k,0}$ — начальные условия.

Оценка решения выполняется по следующим формулам [8]. Пусть

$$b(\tau) = (1 - \tau)^{-1/L}, \quad b_0^{(m)} = (d^m b(\tau)/d\tau^m)_{\tau=0} = \prod_{l=0}^{m-1} (1/L + l),$$

$$T_M b(\tau) = \sum_{m=0}^M b_0^{(m)} \tau^m / m!, \quad \delta T_M b(\tau) = b(\tau) - T_M b(\tau),$$

где $\nu = [1 : s]$, $j = [1 : +\infty)$, $M = (M_1, \dots, M_s) \in [1 : +\infty)^s$. Тогда решение $x(t, t_0, x_0)$ задачи Коши (2.5) удовлетворяет неравенству

$$|\delta T_M x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| \delta T_M b(|t - t_0|/\rho).$$

Шаг 9. Сделав шаг интегрирования получили новые значения решения $x_j(t_1) = x_{j,1}$ при $t_1 = (t_{1,1}, \dots, t_{1,s})$. Это будут новые начальные условия для следующего шага интегрирования.

Повторяем седьмой (вычисление шага интегрирования), восьмой (вычисление решения на выбранном шаге интегрирования, оценка решения) и девятый шаги алгоритма, где будут меняться начальные значения, а соответственно, снова будут вычисляться коэффициенты разложения в ряд и решение. Так будем повторять до тех пор, пока не получим решение исходной задачи Коши.

3. Кеплеровы элементы орбиты

В задаче двух тел положение небесного тела в пространстве определяется Кеплеровыми элементами орбиты. Напомним далее некоторые общепринятые понятия и обозначения [4; 6]. Форму орбиты определяют большая полуось (половина расстояния от перигея до апогея) и эксцентриситет ($e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, где a и b соответственно большая и малая полуоси орбиты, $e \in (0, 1)$). Ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат определяют наклонение орбиты i (угол между плоскостью орбиты и базовой плоскостью), долгота восходящего узла Ω (угол в базовой плоскости, образуемый между базовым направлением на нулевую точку и направлением на точку восходящего узла орбиты, в которой орбита пересекает базовую плоскость в направлении с юга на север), аргумент перигея ω (угол между направлениями из притягивающего центра на восходящий узел орбиты и на перигей, или угол между линией узлов и линией апсид). Средняя аномалия M (угловое расстояние от перигея гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению) и эксцентрическая аномалия E определяют положение тела на орбите.

4. Уравнения движения задачи двух тел в эллиптическом случае

Итак, будем использовать обозначения: a — большая полуось, e — эксцентриситет, M_0 — средняя аномалия в момент t_0 , Ω — долгота восходящего узла, i — наклонение, ω — аргумент перицентра, E — эксцентрическая аномалия, M — средняя аномалия (функции времени), а γ — гравитационная постоянная.

Рассмотрим уравнения движения точки массы m в центральном Ньютоновском поле массы m^0 , используя относительную декартову систему координат в точке с массой m^0 :

$$\ddot{\xi}_i = -\mu \xi_i r^{-3} \quad \left(\text{или} \quad \dot{\xi}_i = \eta_i, \quad \dot{\eta}_i = -\mu \xi_i r^{-3} \right), \quad i \in [1 : 3].$$

Приведем решение этой системы в общем виде в эллиптическом случае [4; 6]:

$$\xi_i/a = A_i \sqrt{1-e^2} \sin E + B_i (\cos E - e),$$

$$\eta_i \sqrt{a} (1 - e \cos E) = \sqrt{\mu} (A_i \sqrt{1-e^2} \cos E - B_i \sin E),$$

$$i \in [1 : 3], \quad r/a = (1 - e \cos E),$$

$$A_1 = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \quad B_1 = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$A_2 = -\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i, \quad B_2 = \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega \cos i,$$

$$A_3 = \cos \Omega \sin i, \quad B_3 = \sin \omega \sin i,$$

$$E - e \sin E = M, \quad M = M_0 + n(t - t_0), \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad \mu = \gamma(m^0 + m), \quad (4.1)$$

где ξ_i , η_i — относительные декартовы координаты и скорости точки.

5. Полиномиальные системы УрЧП для задачи двух тел

Выпишем полиномиальные системы уравнений в частных производных для нахождения координат и скоростей, опираясь на решение задачи двух тел (4.1) [5]. Для этого воспользуемся методом дополнительных переменных, описанном в работах [1; 3]. Введем дополнительные переменные согласно таблице. Здесь $\varphi_1, \dots, \varphi_{13}$ — функции аргументов времени и трех кеплеровских элементов (полуось, эксцентриситет, средняя аномалия в начальную эпоху), $\varphi_{14}, \dots, \varphi_{23}$ — функции угловых элементов.

$\varphi_1 = E, \varphi_2 = \sin E,$ $\varphi_3 = \cos E, \varphi_4 = (1 - e \cos E)^{-1},$ $\varphi_5 = a^{-1/2}, \varphi_6 = (1 - e^2)^{1/2},$ $\varphi_7 = (1 - e^2)^{-1/2},$ $\varphi_8 = \xi_1, \varphi_9 = \xi_2, \varphi_{10} = \xi_3,$ $\varphi_{11} = \eta_1, \varphi_{12} = \eta_2, \varphi_{13} = \eta_3,$	$t_1 = t, t_2 = a,$ $t_3 = e, t_4 = M_0,$
$\varphi_{14} = A_1, \varphi_{15} = A_2, \varphi_{16} = A_3,$ $\varphi_{17} = B_1, \varphi_{18} = B_2, \varphi_{19} = B_3,$ $\varphi_{20} = A_4 = \sin \omega \cos i,$ $\varphi_{21} = B_4 = \cos \omega \cos i,$ $\varphi_{22} = A_5 = \sin \Omega, \varphi_{23} = B_5 = \cos \Omega$	$t_5 = i, t_6 = \Omega, t_7 = \omega$

Будем рассматривать функции $\varphi_i, i = 1, \dots, 23$ как функции от независимых аргументов $(t_1, \dots, t_7)$. Теперь выпишем системы дифференциальных уравнений в частных производных. Первая система:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = \sqrt{\mu} \varphi_4 \varphi_5^3, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} = \frac{-3(t_1 - t_0) \sqrt{\mu}}{2} \varphi_4 \varphi_5^5, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_3} = \varphi_2 \varphi_4, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_4} = \varphi_4,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} = \sqrt{\mu} \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5^3, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} = \frac{-3(t_1 - t_0) \sqrt{\mu}}{2} \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_3} = \varphi_3 \varphi_2 \varphi_4, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_4} = \varphi_3 \varphi_4,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu} \varphi_2 \varphi_4 \varphi_5^3, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} = \frac{3(t_1 - t_0) \sqrt{\mu}}{2} \varphi_2 \varphi_4 \varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_3} = -\varphi_4 \varphi_2^2, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_4} = -\varphi_2 \varphi_4,$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu} t_3 \varphi_2 \varphi_4^3 \varphi_5^3, \frac{\partial \varphi_4}{\partial t_2} = \frac{-3(t_1 - t_0) \sqrt{\mu}}{2} t_3 \varphi_2 \varphi_4^3 \varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial t_3} = \varphi_3 \varphi_3^2 - t_3 \varphi_2^2 \varphi_4^3, \frac{\partial \varphi_4}{\partial t_4} = -t_3 \varphi_2 \varphi_4^3,$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial t_j} = 0, j = 1, 3, 4, \frac{\partial \varphi_5}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial \varphi_7}{\partial t_j} = \frac{\partial \varphi_6}{\partial t_j} = 0, j = 1, 2, 4, \frac{\partial \varphi_6}{\partial t_3} = -t_3 \varphi_7, \frac{\partial \varphi_7}{\partial t_3} = t_3 \varphi_7^3,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{7+i}}{\partial t_1} &= t_2 \varphi_4 \varphi_5^3 \sqrt{\mu} (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2), \\
\frac{\partial \varphi_{7+i}}{\partial t_2} &= (\varphi_3 - t_3) B_i + \varphi_6 \varphi_3 A_i + \\
&+ \frac{3}{2} (t_1 - t_0) t_2 \varphi_4 \varphi_5^5 \sqrt{\mu} (B_i \varphi_2 - A_i \varphi_6 \varphi_3), \\
\frac{\partial \varphi_{7+i}}{\partial t_3} &= t_2 (A_i \varphi_6 \varphi_2 \varphi_4 \varphi_3 - A_i t_3 \varphi_2 \varphi_7 - B_i (1 + \varphi_4 \varphi_2^2)), \\
\frac{\partial \varphi_{7+i}}{\partial t_4} &= t_2 \varphi_4 (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2), \\
\frac{\partial \varphi_{10+i}}{\partial t_1} &= -(\mu t_3 \varphi_2 \varphi_4^3 \varphi_5^4 (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2)) - \mu \varphi_4^2 \varphi_5^4 (B_i \varphi_3 + A_i \varphi_6 \varphi_2), \\
\frac{\partial \varphi_{10+i}}{\partial t_2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\mu} \varphi_4 \varphi_5^3 (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2) + \\
&+ \frac{3}{2} \mu (t_1 - t_0) \varphi_4^2 \varphi_5^6 [t_3 \varphi_2 \varphi_4 (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2) + (A_i \varphi_2 \varphi_6 + B_i \varphi_3)], \\
\frac{\partial \varphi_{10+i}}{\partial t_3} &= \sqrt{\mu} \varphi_5 \varphi_4^2 (\varphi_3 - t_3 \varphi_4 \varphi_2^2) (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2) - \\
&- \sqrt{\mu} \varphi_5 \varphi_4 (B_i \varphi_2 \varphi_4 \varphi_3 + \varphi_2^2 \varphi_6 \varphi_4 A_i + t_3 \varphi_3 \varphi_7 A_i), \\
\frac{\partial \varphi_{10+i}}{\partial t_4} &= \sqrt{\mu} \varphi_5 \varphi_4^2 [t_3 \varphi_2 \varphi_4 (A_i \varphi_6 \varphi_3 - B_i \varphi_2) - (A_i \varphi_2 \varphi_6 + B_i \varphi_3)], \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

И вторая:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{14}}{\partial t_6} &= -\varphi_{15}, \quad \frac{\partial \varphi_{14}}{\partial t_7} = -\varphi_{17}, \quad \frac{\partial \varphi_{14}}{\partial t_5} = \varphi_{16} \varphi_{22}, \\
\frac{\partial \varphi_{17}}{\partial t_6} &= -\varphi_{18}, \quad \frac{\partial \varphi_{17}}{\partial t_7} = \varphi_{14}, \quad \frac{\partial \varphi_{17}}{\partial t_5} = \varphi_{19} \varphi_{22}, \\
\frac{\partial \varphi_{15}}{\partial t_6} &= \varphi_{14}, \quad \frac{\partial \varphi_{15}}{\partial t_7} = -\varphi_{18}, \quad \frac{\partial \varphi_{15}}{\partial t_5} = -\varphi_{16} \varphi_{23}, \\
\frac{\partial \varphi_{18}}{\partial t_6} &= \varphi_{17}, \quad \frac{\partial \varphi_{18}}{\partial t_7} = \varphi_{15}, \quad \frac{\partial \varphi_{18}}{\partial t_5} = -\varphi_{19} \varphi_{23}, \\
\frac{\partial \varphi_{16}}{\partial t_6} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_{16}}{\partial t_7} = -\varphi_{19}, \quad \frac{\partial \varphi_{16}}{\partial t_5} = \varphi_{21}, \\
\frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_6} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_7} = \varphi_{16}, \quad \frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_5} = \varphi_{20}, \\
\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_6} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_7} = \varphi_{21}, \quad \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_5} = -\varphi_{19},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_6} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_7} = -\varphi_{20}, \quad \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_5} = -\varphi_{16}, \\
\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_6} &= \varphi_{23}, \quad \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_7} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_5} = 0, \\
\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_6} &= -\varphi_{22}, \quad \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_7} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_5} = 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Применение алгоритма к задаче двух тел

В результате применения изложенного алгоритма метода Тейлора к системам (5.1) и (5.2) строим схему мономов S (2.4), содержащую 75 однокленов. Используя эту схему, преобразовываем системы (5.1) и (5.2) к виду (2.5) (начальные условия для данной системы здесь не приводятся, поскольку они легко получаются из таблицы замен пятого пункта при заданном начальном векторе независимых аргументов $(t_{0,1}, \dots, t_{0,7})$):

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} = \sum_{m=0}^u a_{j,m,\nu} x^{i(m)}.$$

Матрицу $A = \{a_{j,m,\nu}\}$, $j = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, u}$, $\nu = \overline{1, s}$ можно разбить на s матриц $A_\nu = \{a_{j,m} = a_{j,m,\nu}\}$, $j = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, u}$, $\nu = \overline{1, s}$. Каждая из этих матриц состоит преимущественно из нулей, за исключением нескольких элементов. Общее количество ненулевых компонентов во всех матрицах равно 72.

Далее, с учетом найденных компонентов матрицы шаги 7–9 алгоритма выполняются с помощью программной реализации.

7. Заключение

В представленной работе описывается подробный алгоритм, позволяющий без труда интегрировать систему уравнений в частных производных с помощью метода Тейлора в рамках задачи двух тел.

Приведенные рекуррентные формулы для коэффициентов рядов Тейлора позволяют экономить затрачиваемые на вычисления машинные ресурсы при программной реализации этого алгоритма. При этом важным условием его оптимальной работы являются полиномиальные правые части решаемой системы. Выполнения этого условия можно добиться для широкого класса задач, используя для преобразования исходной системы метод дополнительных переменных. Представляется возможным данный подход и алгоритм, который представлен в общем виде, применять для исследования других актуальных задач динамики.

Список источников

1. Бабаджаниянц Л. К. Метод дополнительных переменных // Вестник СПбГУ. Серия 10, Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 3–11.
2. Бабаджаниянц Л. К., Большаков А. И. Реализация метода рядов Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ. 2012. Т. 13. С. 497–510.
3. Бабаджаниянц Л. К., Брэгман К. М. Алгоритм метода дополнительных переменных // Вестник СПбГУ. Серия 10, Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. Вып. 2. С. 3–12.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд. 3-е. М. : Наука, 1975. 800 с.
5. Полные системы уравнений для задачи двух тел / Л. К. Бабаджаниянц, А. М. Брэгман, К. М. Брэгман, П. В. Касикова, Л. А. Петросян // Технические науки — от теории к практике : сб. ст. по материалам LXI Междунар. науч.-практ. конф. 8(56). Новосибирск : СибАК, 2016. С. 13–21.
6. Холщевников К. В., Титов В. Б. Задача двух тел. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 180 с.
7. Babadzanjan L. K., Pototskaya I. Yu, Pupyshova Yu. Yu. Estimates for Taylor series method to linear total systems of PDEs // Вестник СПбГУ. Серия 10, Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16, вып. 1. С. 3–11. <https://doi.org/10.21638/11701/SPBU10.2020.203>
8. Babadzanjan L. K., Pototskaya I. Yu, Pupyshova Yu. Yu. Estimates in the Taylor series method for polynomial total systems of PDEs // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 1. С. 27–39. <https://doi.org/10.21638/11701/SPBU10.2021.103>
9. Changing variables in Taylor series with applications to PDEs / J. Yang, Y. Koutsawa, M. Potier-Ferry, H. Hu // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020. Vol. 112. P. 77–86. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.12.009>
10. Lombardo U., Giuliani G., Niu Y. Two-Body Problem: Bound States // Quantum Mechanics: From Atoms to Nuclei. Springer Nature Singapore, 2024. P. 119–131.
11. Miletics E., Molnárka G. Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems // J. Comput. Methods in Sciences and Engineering. 2004. Vol. 4, N 1–2. P. 105–114.
12. On the Orbital Elements of the Two-body Problem with Slowly Decreasing Mass: The Gylden–Mestchersky Cases / A. Abad, M. Calvo, J. A. Docobo, A. Elipe // The Astronomical J. 2020. Vol. 160, N 5. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abb4e4>
13. Rodriguez M., Barrio R. Reducing rounding errors and achieving Brouwer’s law with Taylor series method // Appl. Numer. Math. 2012. Vol. 62, N 8. P. 1014–1024. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.03.008>
14. Schemes of fast evaluation of multivariate monomials for speeding up numerical integration of equations in dynamics / I. M. Alesova, L. K. Babadzanjan, A. M. Bregman, K. M. Bregman, I. Yu. Pototskaya, Yu. Yu. Pupyshova, A. T. Saakyan // AIP Conference Proceedings. 1978. 100008 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5043752>
15. Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations / D. C. Carothers, G. E. Parker, J. S. Sochacki, P. G. Warne // Electron. J. Diff. Eqns. 2005. N 40. P. 1–17.

References

1. Babadzanjanz L.K. Metod dopolnitel'nyh peremennyh [Method of additional variables]. *Vestnik SPbGU. Serija 10, Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija*, 2010, iss. 4, pp. 3–11. (in Russian)
2. Babadzanjanz L.K., Bolshakov A.I. Realizacija metoda rjadov Tejlora dlja reshenija obyknovennyh differencialnyh uravnenij [Implementation of the Taylor series method for solving ordinary differential equations]. *Vychislitelnye metody i programirovanie*, 2012, vol. 13, pp. 497–510. (in Russian)
3. Babadzanjanz L.K., Bregman K.M. Algoritm metoda dopolnitel'nyh peremennyh [Algorithm of the additional variables method]. *Vestnik SPbGU. Serija 10, Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija*, 2012, iss. 2, pp. 3–12. (in Russian)
4. Duboshin G.N. *Nebesnaja mehanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Main tasks and methods]. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ., 1975, 800 p. (in Russian)
5. Babadzanjanz L.K., Bregman A.M., Bregman K.M., Kasikova P., Petrosyan L.A. Polnye sistemy uravnenij dlya zadachi dvuh tel [Systems of total equations for the two body problem] *Tekhnicheskie nauki — ot teorii k praktike: sb. st. po mater. LXI mezhdunar. nauch.-prakt. konf.*. Novosibirsk, SibAK Publ., 2016, no. 8 (56), pp. 13–21. (in Russian)
6. Holshevnikov K.V., Titov V.B. *Zadacha dvuh tel* [The two-body problem]. St. Petersburg, St. Petersburg St. Univ. Publ., 2007, 180 p. (in Russian)
7. Babadzanjanz L.K., Pototskaya I.Yu., Pupysheva Yu.Yu. Estimates for Taylor series method to linear total systems of PDEs. *Vestnik SPbGU. Serija 10, Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 3–11. <https://doi.org/10.21638/11701/SPBU10.2020.203>
8. Babadzanjanz L.K., Pototskaya I.Yu., Pupysheva Yu.Yu. Estimates in the Taylor series method for polynomial total systems of PDEs. *Vestnik SPbGU. Serija 10, Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 27–39. <https://doi.org/10.21638/11701/SPBU10.2021.103>
9. Yang J., Koutsawa Y., Potier-Ferry M., Hu H. Changing variables in Taylor series with applications to PDEs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, vol. 112, pp. 77–86. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.12.009>
10. Lombardo U., Giuliani G., Niu Y. Two-Body Problem: Bound States. *Quantum Mechanics: From Atoms to Nuclei*. Springer Nature Singapore, 2024, pp. 119–131.
11. Miletics E., Molnárka G. Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems. *J. Comput. Methods in Sciences and Engineering*, 2004, vol. 4, no. 1–2, pp. 105–114.
12. Abad A., Calvo M., Docobo J. A., Elipe A. On the Orbital Elements of the Two-body Problem with Slowly Decreasing Mass: The Gylden–Mestchersky Cases. *The Astronomical J.*, 2020, vol. 160, no. 5. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abb4e4>
13. Rodriguez M., Barrio R. Reducing rounding errors and achieving Brouwer's law with Taylor series method. *Appl. Numer. Math.*, 2012, vol. 62, no. 8, pp. 1014–1024. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.03.008>
14. Alesova I.M., Babadzanjanz L.K., Bregman A.M., Bregman K.M., Pototskaya I.Yu., Pupysheva Yu.Yu. and Saakyan A.T. Schemes of fast evaluation of multivariate monomials for speeding up numerical integration of equations in dynamics. *AIP Conference Proceedings*, 1978, 100008 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5043752>

15. Carothers D.C., Parker G.E., Sochacki J.S., Warne P.G. Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations. *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2005, no. 40, pp. 1–17.

Об авторах

Бабаджаниянц Левон

Константинович, д-р физ.-мат. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198504, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-2918-6008>

Потоцкая Ирина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доц., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198504, Российская Федерация, i.pototskaia@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3012-9740>

Пупышева Юлия Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доц., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198504, Российская Федерация, j_poupycheva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4857-4647>

About the authors

Levon K. Babadzanjan, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 198504, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-2918-6008>

Irina Yu. Pototskaya, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., St.Petersburg State University, St.Petersburg, 198504, Russian Federation, i.pototskaia@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3012-9740>

Yulia Yu. Pupysheva, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., St.Petersburg State University, St.Petersburg, 198504, Russian Federation, j_poupycheva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4857-4647>

Поступила в редакцию / Received 25.09.2024

Поступила после рецензирования / Revised 31.01.2025

Принята к публикации / Accepted 06.02.2025