ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Серия «Математика»
2025. Т. 52. С. 3—20

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.938
MSC 34A34, 37N35, 34D20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.3

Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем

С. В. Акманова[1]✉

[1] Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Российская Федерация
✉ svet.akm_74@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы управления и стабилизации нелинейных динамических систем, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, последние из которых содержат вектор управления. Состояния указанных систем имеют как непрерывные, так и дискретные компоненты, поэтому такие системы называют непрерывно-дискретными, или гибридными. Установлены необходимые и достаточные признаки управляемости нелинейных гибридных систем с постоянным шагом дискретизации, предполагающие переход от данных систем к равносильным, в естественном смысле, нелинейным дискретным динамическим системам. Представлено преобразование, позволяющее приводить линейную дискретную систему к канонической форме Бруновского и выполнять на ее основе построение стабилизирующего управления для соответствующей непрерывно-дискретной системы со скалярным управлением. Разработаны и проиллюстрированы на примерах алгоритм приведения системы первого приближения нелинейной дискретной системы со скалярным управлением к канонической форме Бруновского и алгоритм построения стабилизирующего управления для нелинейных гибридных систем со скалярным управлением. Изложены достаточные признаки стабилизации нелинейных гибридных систем как без учета, так и с учетом регулятора обратной связи.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, дискретная система, гибридная система, управляемая система, стабилизируемая система

Ссылка для цитирования: Акманова С. В. Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 3–20.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.3

Research article

On Controllability and Stabilization of Nonlinear Continuous-discrete Dynamic Systems

Svetlana V. Akmanova[1]✉

[1] Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation
✉ svet.akm_74@mail.ru

Abstract. The paper considers the issues of control and stabilization of nonlinear dynamic systems described by a set of differential and difference equations, the latter of which contain a control vector. The states of these systems have both continuous and discrete components, so such systems are called continuous-discrete or hybrid. Necessary and sufficient features of controllability of nonlinear hybrid systems with a constant discretization step are established, which imply a transition from these systems to equivalent, in the natural sense, nonlinear discrete dynamic systems. A transformation is presented that allows reducing a linear discrete system to the canonical Brunovsky form and constructing a stabilizing control on its basis for the corresponding continuous-discrete system with scalar control. An algorithm for reducing a first approximation system of a nonlinear discrete system with scalar control to the canonical Brunovsky form and an algorithm for constructing a stabilizing control for nonlinear hybrid systems with scalar control are developed and illustrated with examples. Sufficient signs of stabilization of nonlinear hybrid systems are presented both without and with the feedback controller.

Keywords: continuous-discrete system, discrete system, hybrid system, controlled system, stabilized system

For citation: Akmanova S. V. On Controllability and Stabilization of Nonlinear Continuous-discrete Dynamic Systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 52, pp. 3–20. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.3

1. Введение

Многие актуальные проблемы, возникающие в различных областях механики (автомобилестроении, авиастроении, экономике и т. д.), приводят к необходимости изучения математических моделей, которые содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику одних компонент состояний систем в непрерывном времени, так и уравнения динамики других компонент состояний систем в дискретном времени. Такие модели называют непрерывно-дискретными (гибридными) динамическими системами [11; 12]. Они, например, актуальны при математическом моделировании теплового состояния тел с целью управления тепловыми процессами в объектах металлургии [10].

Отметим при этом, что теория управления и стабилизации динамических систем достаточно полно разработана для непрерывных систем [2–4], дискретных систем [14; 16; 20], линейных непрерывно-дискретных систем [5; 11–13]. Имеются также разработки в области оптимального управления и стабилизации некоторых видов нелинейных гибридных систем [8; 17; 21], при этом во многих разработках по оптимальности исследуются системы, состояния которых характеризуются одним фазовым вектором, меняющимся между моментами переключений непрерывно, а в моменты переключений дискретно (см., например, [7; 15]). Однако вопросы теории управления и стабилизации нелинейных гибридных систем, состояния которых характеризуются двумя различными фазовыми векторами, один из которых меняется непрерывно согласно дифференциальным уравнениям, а другой — дискретно с учетом разностных уравнений, содержащих управление, во многом пока остаются открытыми.

В настоящей статье рассматриваются детерминированные нелинейные гибридные системы с указанными особенностями, приводятся новые признаки управляемости и стабилизации таких систем. Эти признаки основаны на исследовании управляемости и стабилизации равносильных в естественном смысле нелинейных дискретных динамических систем по первому приближению, при этом исследование стабилизации учитывает приведение системы первого приближения к канонической форме Бруновского и достаточный признак асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной непрерывно-дискретной системы, который получен в работе [18].

Рассматривается нелинейная гибридная система управления вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \tag{1.2}$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ — векторы, отвечающие за состояния системы и характеризующие поведение непрерывной и дискретной частей гибридной системы соответственно; $u(t_k) \in R^q$ — вектор управления; моменты времени t_k задают на R равномерную сетку с шагом $h > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \ldots < t_{k+1} = t_0 + (k+1)h < \ldots, \tag{1.3}$$

функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных.

Будем полагать, что при выключенном управлении система (1.1) имеет точку равновесия $x = 0,\ y = 0$, т. е. выполняются равенства

$$f(0,0) = 0\,, \quad g(0,0,0) = 0\,. \tag{1.4}$$

При выбранном управлении $u = u(t_k), k = 0, 1, 2, ...,$ система (1.1) с учетом (1.2) функционирует по стандартной схеме:

1) задаются начальные условия $z_0 = (x_0, y_0)$;

2) по решению $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)\,,\ x(t_0) = x_0\,,$ находятся векторы $x_1 = \varphi_0(t_1)$ и $y_1 = g(x_1, y_0, u_0)\,,$ где $u_0 = u(t_0)$;

3) по решению $x = \varphi_1(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_1)\,,\ x(t_1) = x_1\,,$ находятся векторы $x_2 = \varphi_1(t_2)$ и $y_2 = g(x_2, y_1, u_1)\,,$ где $u_1 = u(t_1)$ и т. д.

Таким образом, под решением гибридной системы (1.1), стартующим из точки $z_0 = (x_0, y_0)$ при выбранном управлении $u = u(t_k), k = 0, 1, 2, ...,$ будем понимать функцию

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0)\,, & t_0 \leqslant t < t_1\,, \\ (\varphi_1(t), y_1)\,, & t_1 \leqslant t < t_2\,, \\ (\varphi_2(t), y_2)\,, & t_2 \leqslant t < t_3\,, \\ & \vdots \end{cases} \tag{1.5}$$

Компонента $x(t)$ данного решения является непрерывной при всех $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемой на каждом интервале $t_k < t < t_{k+1}$, но не обязательно дифференцируемой в моменты времени $t = t_k$. Компонента $y(t)$ является кусочно-постоянной функцией, значения которой могут меняться только в узлах сетки (1.3).

Основными задачами данной статьи являются установление необходимых и достаточных признаков управляемости системы (1.1), достаточных признаков и способа стабилизации этой системы, отличных от признаков и способа стабилизации, установленных в работе [1].

Для решения поставленных задач выполним переход от системы (1.1) к равносильной в естественном смысле дискретной системе.

2. Переход от гибридной к равносильной дискретной системе

Из равенств (1.4) следует, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ представимы в виде
$f(x, y) = A_1x + B_1y + c(x, y)\,, \quad g(x, y, u) = A_2x + B_2y + Cu + d(x, y, u)\,,$

где $A_1 = f'_x(0, 0),\ B_1 = f'_y(0, 0),\ A_2 = g'_x(0, 0, 0),\ B_2 = g'_y(0, 0, 0),\ C =$

$g'_u(0,0,0)$ — матрицы соответствующих размеров, а гладкие нелинейности $c(x,y)$ и $d(x,y,u)$ удовлетворяют соотношениям

$$c(x,y) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \to 0\,, \tag{2.1}$$

$$d(x,y,u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| + \|u\| \to 0\,. \tag{2.2}$$

Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначаются евклидовы нормы векторов в соответствующих пространствах вещественных чисел.

Положим, что $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда получим следующую равносильную системе (1.1) гибридную систему

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k + c(x(t), y_k)\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}\,, \\ y_{k+1} = A_2 x_{k+1} + B_2 y_k + C u_k + d(x_{k+1}, y_k, u_k)\,, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $\det A_1 \neq 0$, тогда с помощью оператора сдвига по траекториям системы $x' = f(x,y)$ за время от $t = 0$ до $t = h$ (см. [18]), где $h > 0$ — шаг сетки (1.3), выполним переход от системы (2.3) к дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h)\,, \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2) y_k + C u_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h)\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

здесь

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int\limits_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} c(p(s, x_k, y_k), y_k) ds\,, \quad x = p(t, x_k, y_k) \text{ —}$$

решение задачи Коши $x' = A_1 x + B_1 y_k + c(x, y_k)\,, \quad x(t_k) = x_k\,;$

$$\delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + d(x_{k+1}, y_k, u_k). \tag{2.5}$$

Компактная запись системы (2.4) имеет вид

$$z_{k+1} = A(h) z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h)\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,, \tag{2.6}$$

в котором

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix},$$

$A(h)$ — квадратная (порядка $n+m$) матрица

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2 \end{bmatrix}.$$

Система (2.6) имеет нулевое положение равновесия при $u = 0$.

Руководствуясь работой ([18], лемма 2.5, доказательство леммы 2.5 на с. 96–97) и соотношениями (2.1), (2.2), (2.5), можно доказать, что компоненты вектора $\xi(z,u,h)$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon(x, y; h) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \to 0\,,$$

$$\delta(x,y,u;h) = o(\|x\|+\|y\|+\|u\|) \quad \text{при} \ \ \|x\|+\|y\|+\|u\| \to 0\,,$$

отсюда функция $\xi(z,u,h)$ в системе (2.6) удовлетворяет соотношению

$$\xi(z,u,h) = o(\|z\|+\|u\|) \quad \text{при} \ \ \|z\|+\|u\| \to 0\,. \tag{2.7}$$

Отметим, что при выбранном управлении $u = u(t_k), k = 0,1,2,...$, системы (1.1) и (2.4) равносильны в следующем смысле [19]:

– если $(x(t), y_k)$ — решение системы (1.1), то (x_k, y_k) — решение системы (2.4), где $x_k = x(t_k)$;

– если (x_k, y_k) — решение системы (2.4), то $(x(t), y_k)$ — решение системы (1.1), где $x(t)$ — решение задачи Коши $x' = f(x, y_k), x(t_k) = x_k$.

Отсюда следует, что системы (1.1) и (2.6) также равносильны.

3. Управляемость системы (1.1): необходимые и достаточные признаки

Напомним, что решением гибридной системы (1.1) при выбранном управлении служит функция $z = z(t)$ вида (1.5).

Примем следующие определения (см., например, [5; 9]).

Определение 1. *Гибридную систему (1.1) называют управляемой (полностью управляемой) при $h = h_0 > 0$, если для любых векторов $z^{(0)}$, $z^{(1)} \in R^{n+m}$ существует управление $u = u(t_k)$, $\quad k = 0,1,2,...,l-1 \quad (l \in N)$ такое, что для решения $z = z(t)$ системы (1.1) с начальным условием $z(t_0) = z^{(0)}$ выполняется равенство $z(t_l) = z^{(1)}$, где $t_l = t_0 + lh_0$.*

Определение 2. *Дискретную систему (2.6) называют управляемой (полностью управляемой) при $h = h_0 > 0$, если для любых состояний $z^{(0)}$, $z^{(1)} \in R^{n+m}$ существует управление u_k, $k = 0,1,2,...,l-1$ $(l \in N)$ такое, что для решения z_k, $k = 0,1,2,...,l$ с начальным условием $z_0 = z^{(0)}$ выполняется равенство $z_l = z^{(1)}$, где $z_l = z(t_l) = z(t_0 + lh_0)$.*

Тогда справедлива

Теорема 1. *Непрерывно-дискретная система (1.1) управляема при $h = h_0 > 0$ в том и только том случае, если дискретная система (2.6) управляема при $h = h_0 > 0$.*

Доказательство. Системы (1.1) и (2.6) равносильны, при этом между их решениями существует связь, на основании которой, учитывая определения 1 и 2, устанавливается справедливость данного утверждения. $\square$

Системой первого приближения для нелинейной дискретной системы (2.6) является линейная дискретная система вида

$$z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{3.1}$$

Управляемость системы (3.1) при $h = h_0 > 0$ будем понимать в соответствии с определением 2. Отсюда, согласно критерию полной управляемости линейных дискретных систем ([9], с. 524), справедлива

Теорема 2. *Дискретная система (3.1) управляема при $h = h_0 > 0$ в том и только том случае, если*

$$\operatorname{rank}[B, A(h_0)B, A^2(h_0)B, ..., A^{n+m-1}(h_0)B] = n + m.$$

Рассмотрим важный частный случай гибридной системы (1.1), когда $n = m = q = 1$. Тогда

$$f(x, y) = a_1x + b_1y + c(x, y)\,, \quad g(x, y, u) = a_2x + b_2y + \bar{c}u + d(x, y, u)\,,$$

где $a_1 = f'_x(0,0)$, $b_1 = f'_y(0,0)$, $a_2 = g'_x(0,0,0)$, $b_2 = g'_y(0,0,0)$, $\bar{c} = g'_u(0,0,0)$ — действительные числа, а нелинейности $c(x,y)$, $d(x,y,u)$ удовлетворяют соотношениям

$$c(x, y) = o(|x| + |y|) \quad \text{при} \ \ |x| + |y| \to 0\,,$$

$$d(x, y, u) = o(|x| + |y| + |u|) \quad \text{при} \ \ |x| + |y| + |u| \to 0\,.$$

Отсюда соответствующая системе (1.1) система (2.3) примет вид

$$\begin{cases} x'(t) = a_1x(t) + b_1y_k + c(x(t), y_k)\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}\,, \\ y_{k+1} = a_2x_{k+1} + b_2y_k + \bar{c}u_k + d(x_{k+1}, y_k, u_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.2}$$

Пусть $a_1 \neq 0$, тогда гибридной системе (3.2) соответствует равносильная дискретная система вида (2.6), в которой матрицы $A(h)$ и B таковы:

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{a_1h} & \frac{b_1}{a_1}(e^{a_1h} - 1) \\ a_2e^{a_1h} & \frac{a_2b_1}{a_1}(e^{a_1h} - 1) + b_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{c} \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

при этом справелива

Теорема 3. *Пусть в гибридной системе (3.2) $b_1 \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$. Тогда соответствующая ей дискретная система вида (3.1) с матрицами (3.3) управляема при любом $h > 0$.*

Доказательство. Гибридной системе (3.2) соответствует система (3.1) с матрицами (3.3). Найдем $\det[B, A(h)B]$:
$\det[B, A(h)B] = \frac{\bar{c}^2b_1}{a_1}(1 - \mathrm{e}^{a_1h}) \neq 0$ при $b_1 \neq 0, \bar{c} \neq 0, h > 0$, так как $a_1 \neq 0$. Тогда $\operatorname{rank}[B, A(h)B] = 2$, и система (3.1), соответствующая системе (3.2), управляема при любом $h > 0$, как следует из теоремы 2. $\square$

Пример 1. Пусть дана линейная гибридная система

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y_k\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}\,, \\ y_{k+1} = 2x_{k+1} + y_k + 2u_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $a_1 = 1 \neq 0$, $b_1 = -1 \neq 0$, $\bar{c} = 2 \neq 0$. Тогда, согласно теоремы 3, соответствующая данной системе линейная дискретная система

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^h x_k + (1 - e^h) y_k\,, \\ y_{k+1} = 2e^h x_k + (3 - 2e^h) y_k + 2u_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

управляема при любом $h > 0$. В частности, можно установить с учетом работы ([16], с. 12–15), что при $h = ln2$ управление u_k, где $k = 0, 1, 2$, с компонентами $u_0 = -\frac{1}{4}$, $u_1 = -\frac{9}{4}$, $u_2 = -1$ переводит систему (3.5) из состояния $z^{(0)} = z_0 = [1 \;\; 2]^T$ в состояние $z^{(1)} = z_3 = [3 \;\; -2]^T$, при этом системе (3.5) соответствует решение
$z_0 = [1 \;\; 2]^T, z_1 = [0 \;\; \frac{3}{2}]^T, z_2 = [-\frac{3}{2} \;\; -6]^T, z_3 = [3 \;\; -2]^T$.
Данное управление переводит и систему (3.4) из состояния $z(t_0) = z^{(0)}$ в состояние $z(t_3) = z^{(1)}$, при этом системе (3.4) соответствует решение

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (2 - e^t, 2)\,, & 0 \leqslant t < ln2\,, \\ (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}e^t, \frac{3}{2})\,, & ln2 \leqslant t < ln4\,, \\ (\frac{9}{8}e^t - 6, -6)\,, & ln4 \leqslant t < ln8\,, \\ (\frac{5}{8}e^t - 2, -2)\,, & ln8 \leqslant t < ln16\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

которое в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = ln2$, $t_2 = ln4$, $t_3 = ln8$ совпадает с представленным решением системы (3.5).

Вернемся вновь к системе (1.1) общего вида. Положим, что соответствующая система (3.1) управляема при некотором $h > 0$, и в системе (2.6) нелинейность $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным z, u, при этом постоянная Липшица L достаточно мала, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $0 < L \leqslant \varepsilon_0$ выполняется условие

$$\|\xi(z_k^{(1)}, u_k^{(1)}, h) - \xi(z_k^{(2)}, u_k^{(2)}, h)\| \leqslant L(\|z_k^{(1)} - z_k^{(2)}\| + \|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, l - 1.$$

Тогда имеет место

Теорема 4. *Пусть система первого приближения (3.1) дискретной системы (2.6) управляема при $h = h_0 > 0$, функция $\xi(z_k, u_k, h)$ в (2.6) при $h = h_0 > 0$ определена и удовлетворяет условию Липшица по переменным z, u на множестве $R^{n+m} \times R^q$, причем постоянная Липшица достаточно мала. Тогда гибридная система (1.1) управляема при $h = h_0 > 0$.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из достаточного признака существования допустимого управления нелинейной дискретной системы, представленного в работе ([16], теорема 4.1), и теоремы 1. □

Следствие 1. *Если в гибридной системе (3.2) $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$ и в соответствующей ей дискретной системе (2.6) функция $\xi(z_k, u_k, h)$ определена и удовлетворяет условию Липшица по переменным z, и на множестве $R^2 \times R^1$ при некотором $h = h_0 > 0$, при этом постоянная Липшица достаточно мала, тогда система (3.2) управляема при $h = h_0 > 0$.*

Для решения вопросов стабилизации системы (1.1) рассмотрим приведение дискретной системы (3.1) к канонической форме.

4. Приведение системы (3.1) к канонической форме Бруновского

Пусть система (1.1) имеет скалярное управление, тогда дискретную систему (3.1) запишем в виде

$$z_{k+1} = A(h)z_k + bu_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{4.1}$$

где $z \in R^{n+m}$, $u \in R^1$, $A(h)$ — блочная матрица порядка $n + m$, b — постоянная матрица размера $(n + m) \times 1$.

Определение 3. *Линейная дискретная система вида*

$$\begin{cases} z^*_{k+1,1} = z^*_{k,2}\,, \\ z^*_{k+1,2} = z^*_{k,3}\,, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,n+m-1} = z^*_{k,n+m}\,, \\ z^*_{k+1,n+m} = u^*_k\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $z^*_{k,i}$ — i-я компонента вектора z^*_k, называется канонической формой Бруновского для системы (4.1) при $h > 0$.

Вопрос о приведении системы (4.1) к форме (4.2) освещает

Теорема 5. *Пусть система (4.1) управляема при $h = h_0 > 0$, тогда существует преобразование*

$$z^*_k = Dz_k, u^*_k = \alpha u_k + \beta z_k, \det D \neq 0, \alpha \neq 0, \tag{4.3}$$

причем

$$D = \begin{bmatrix} g \\ gA(h_0) \\ gA^2(h_0) \\ \vdots \\ gA^{n+m-1}(h_0) \end{bmatrix}, \quad \alpha = gA^{n+m-1}(h_0)b, \beta = gA^{n+m}(h_0),$$

g — ненулевой вектор: $gb = gA(h_0)b = ... = gA^{n+m-2}(h_0)b = 0$, приводящее систему (4.1) к канонической форме Бруновского (4.2).

Доказательство. Введем ненулевой вектор $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n+m} \end{bmatrix}$, удовлетворяющий условиям

$$gb = gA(h_0)b = gA^2(h_0)b = \dots = gA^{n+m-2}(h_0)b = 0, \tag{4.4}$$

$$gA^{n+m-1}(h_0)b \neq 0. \tag{4.5}$$

Вектор g существует, так как система (4.1) управляема при $h = h_0 > 0$, и согласно теоремы 2: $\mathrm{rank}[b, A(h_0)b, A^2(h_0)b, ..., A^{n+m-1}(h_0)b] = n + m$, тогда $\mathrm{rank}[b, A(h_0)b, A^2(h_0)b, ..., A^{n+m-2}(h_0)b] = n + m - 1$, значит, ненулевой вектор g, для которого выполняются условия (4.4), найдется.

Этот вектор будет также удовлетворять условию (4.5), так как в противном случае $g[b, A(h_0)b, \dots, \ A^{n+m-1}(h_0)b] = 0$,
т. е. g^T — собственный вектор матрицы $[b, A(h_0)b, \dots, \ A^{n+m-1}(h_0)b]^T$, соответствующий собственному значению 0, и тогда
$\det[b, A(h_0)b, \dots, \ A^{n+m-1}(h_0)b] = 0$, что противоречит управляемости системы (4.1).

Пусть

$$\begin{cases} z^*_{k,1} = gz_k\,, \\ z^*_{k,2} = gA(h_0)z_k\,, \\ \vdots \\ z^*_{k,n+m} = gA^{n+m-1}(h_0)z_k\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

тогда $z^*_k = Dz_k$, и

$$D = \begin{bmatrix} g \\ gA(h_0) \\ gA^2(h_0) \\ \vdots \\ gA^{n+m-1}(h_0) \end{bmatrix}, \text{ причем } \det D \neq 0,$$

что следует из управляемости системы (4.1). Из (4.6) с учетом (4.1) (при $h = h_0 > 0$), (4.4),(4.5) получим:

$$\begin{cases} z^*_{k+1,1} = gz_{k+1} = gA(h_0)z_k + gbu_k = z^*_{k,2}\,, \\ z^*_{k+1,2} = gA(h_0)z_{k+1} = gA^2(h_0)z_k + gA(h_0)bu_k = z^*_{k,3}\,, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,n+m-1} = gA^{n+m-2}(h_0)z_{k+1} = z^*_{k,n+m}\,, \\ z^*_{k+1,n+m} = gA^{n+m}(h_0)z_k + gA^{n+m-1}(h_0)bu_k\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Пусть $u^*_k = \alpha u_k + \beta z_k$, где $\alpha = gA^{n+m-1}(h_0)b \neq 0$, $\beta = gA^{n+m}(h_0)$. Тогда система (4.7) примет вид (4.2) и эквивалентна (4.1) при $h = h_0 > 0$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим нелинейную гибридную систему

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y_k + c(x(t), y_k)\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}\,, \\ y_{k+1} = 2x_{k+1} + y_k + 2u_k + d(x_{k+1}, y_k, u_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $c(x, y)$, $d(x, y, u)$ — гладкие нелинейности в соответствии с (3.2).

Данной системе соответствует управляемая линейная дискретная система (3.5) (см. Пример 1), при этом матричные компоненты этой системы имеют вид

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^h & 1 - e^h \\ 2e^h & 3 - 2e^h \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Согласно теоремы 5 найдем в виде вектора-строки ненулевой вектор g такой, что $gb = 0$. Пусть $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, тогда $gA(h) = \begin{bmatrix} e^h & 1 - e^h \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^h & 1 - e^h \end{bmatrix}$. Отсюда при $h > 0$ получим:

$\alpha = gA(h)b = 2 - 2e^h \neq 0$, $\beta = gA^2(h) = \begin{bmatrix} 2e^h - e^{2h} & e^{2h} - 4e^h + 3 \end{bmatrix}$,
$u^*_k = \alpha u_k + \beta z_k = (2 - 2e^h)u_k + (2e^h - e^{2h})x_k + (e^{2h} - 4e^h + 3)y_k$.
$z^*_k = Dz_k$, тогда (при $h > 0$) приходим к равенствам

$$z^*_k = \begin{bmatrix} x_k \\ e^h x_k + (1 - e^h)y_k \end{bmatrix}, \quad z^*_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ e^h x_{k+1} + (1 - e^h)y_{k+1} \end{bmatrix},$$

и $z^*_{k+1} = \begin{bmatrix} z^*_{k,2} \\ u^*_k \end{bmatrix}$ – каноническая форма Бруновского для системы (3.5).

5. Стабилизация системы (1.1): достаточные признаки

Примем следующие определения (см., например, [13]).

Определение 4. *Гибридную систему (1.1) называют стабилизируемой при $h = h_0 > 0$, если существует кусочно-постоянная функция $u = \varphi(t) \in R^q$, $t \in [t_k; t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ...$, такая, что система (1.1) с управлением $u = \varphi(t)$ при $h = h_0 > 0$ имеет асимптотически устойчивое решение $x = 0$, $y = 0$.*

Определение 5. *Дискретную систему (2.6) называют стабилизируемой при $h = h_0 > 0$, если существует управление $u_k = \Phi(z_k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, такое, что при $h = h_0 > 0$ система (2.6) имеет асимптотически устойчивое решение $z = 0$.*

Связь между управляемостью и стабилизируемостью освещает

Теорема 6. *Если система первого приближения (4.1) нелинейной дискретной системы со скалярным управлением вида (2.6) управляема при $h = h_0 > 0$, то она стабилизируема при $h = h_0 > 0$.*

Доказательство. Система (4.1) управляема, то, как следует из теоремы 5, она представима в канонической форме Бруновского, т. е. с помощью преобразования $z^*_k = Dz_k$, $u^*_k = \alpha u_k + \beta z_k$ она запишется в виде (4.2).

Пусть $u^*_k = pz^*_k$, где $p = [p_1 \;\; p_2 \;\; \ldots p_{n+m}]$, тогда система (4.2) примет вид

$$\begin{cases} z^*_{k+1,1} = z^*_{k,2}\,, \\ z^*_{k+1,2} = z^*_{k,3}\,, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,n+m-1} = z^*_{k,n+m}\,, \\ z^*_{k+1,n+m} = p_1 z^*_{k,1} + p_2 z^*_{k,2} + \ldots \; + p_{n+m} z^*_{k,n+m}\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Матрица системы (5.1) перестановкой соответствующих строк и столбцов приводима к нормальной форме Фробениуса ([6], с. 198). Тогда, полагая, что

$z^*_{k,1} = \lambda^0 = 1$, $z^*_{k,2} = z^*_{k+1,1} = \lambda$, $z^*_{k,3} = z^*_{k+1,2} = z^*_{k+2,1} = \lambda^2$, ..., $z^*_{k,n+m} = z^*_{k+n+m-1,1} = \lambda^{n+m-1}$, $z^*_{k+1,n+m} = \lambda^{n+m}$, получим следующее характеристическое уравнение системы (5.1):

$$\lambda^{n+m} - p_{n+m}\lambda^{n+m-1} - p_{n+m-1}\lambda^{n+m-2} - \ldots \; - p_2\lambda - p_1 = 0. \tag{5.2}$$

Коэффициенты уравнения (5.2) выбираются произвольно, поэтому подберем их так, чтобы выполнялось условие $|\lambda_i| < 1$ при любых $i = 1, 2, ..., n + m$. Тогда система (4.2) с управлением $u^*_k = pz^*_k$ имеет асимптотически устойчивое решение $z^*_k = 0$, и система (4.1) при использовании указанного преобразования стабилизируема, причем формулу стабилизирующего управления u_k для дискретной системы (4.1) можно получить из формул (4.3), полагая, что $u^*_k = pz^*_k$. □

Из доказательства теоремы 6 и равенств (4.3) получим

Следствие 2. *Управление* $u_k = D^* z_k$, $k = 0, 1, ...,$ *где* $D^* = \alpha^{-1}(pD - \beta)$, $u_k^* = pz_k^*$, *является стабилизирующим для системы (4.1), при этом все собственные значения матрицы* $A(h_0) + bD^*$ *меньше 1 по модулю.*

Учитывая, что в системе (2.6) нелинейность $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет условию (2.7), приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Если в гибридной системе (1.1)* $n = m = q = 1$, *при этом в равносильной системе (3.2)* $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$, *тогда система (1.1) стабилизируема при любом* $h > 0$.

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из теорем 3, 6 и достаточного признака асимптотической устойчивости точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ гибридной системы (1.1), полученного в работе ([18], теорема 3.2). □

Пример 3. Построим стабилизирующее управление для системы (4.8).

Каноническая форма Бруновского для соответствующей линейной дискретной системы (3.5) имеет вид (см. Пример 2)

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*\,, \\ z_{k+1,2}^* = u_k^*\,, \end{cases}$$

где

$$u_k^* = (2 - 2e^h)u_k + (2e^h - e^{2h})x_k + (e^{2h} - 4e^h + 3)y_k,$$

при этом

$$\alpha = 2 - 2e^h,\ \beta = \left[\ 2e^h - e^{2h} \ \ e^{2h} - 4e^h + 3\ \right],\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^h & 1 - e^h \end{bmatrix}.$$

Согласно следствию 2
$u_k = D^* z_k$, где $D^* = \alpha^{-1}(pD - \beta)$, $p = \left[\ p_1 \ \ p_2\ \right]$, p_1 и p_2 — коэффициенты характеристического уравнения системы, задающей каноническую форму Бруновского:

$$\lambda^2 - p_2\lambda - p_1 = 0.$$

Поскольку p_1 и p_2 выбираются произвольно, то подберем их так, чтобы корни λ_1, λ_2 этого уравнения лежали внутри единичной окружности.

Пусть $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, то $p = \left[\ \frac{1}{18} \ \ \frac{1}{6}\ \right]$, $D^* = \left[\ \frac{18e^{2h} - 33e^h + 1}{36(1 - e^h)} \ \ \frac{6e^h - 17}{12}\ \right]$.

Тогда стабилизирующее управление системы (4.8) имеет вид

$$u_k = \frac{18e^{2h} - 33e^h + 1}{36(1 - e^h)}x_k + \frac{6e^h - 17}{12}y_k.$$

Действительно, при данном управлении собственные значения матрицы $A(h)+bD^*$ системы (4.1) совпадают с найденными $\lambda_{1,2}$, тогда точка равновесия $x=0$, $y=0$ гибридной системы (4.8) асимптотически устойчива [18].

Рассмотрим вновь гибридную систему (1.1), в которой $x\in R^n$, $y\in R^m$, $u\in R^1$, тогда справедлива

Теорема 8. *Если система первого приближения (4.1) нелинейной дискретной системы (2.6) управляема при $h=h_0>0$, то соответствующая гибридная система (1.1) стабилизируема при $h=h_0>0$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что система (4.1) стабилизируема при $h=h_0>0$, и существует управление, при котором собственные значения матрицы $A(h)+bD^*$ меньше 1 по модулю. Тогда соответствующая гибридная система (1.1) стабилизируема при $h=h_0>0$ ([18], теорема 3.2). □

Теоремы 7, 8 являются достаточными признаками стабилизации гибридной системы (1.1) со скалярным управлением.

Пусть далее гибридная система (1.1) имеет управление $u\in R^q$ $(q>1)$, причем в соответствуюшей дискретной системе (2.6) это управление задается формулой $u_k=\Phi(z_k)=Pz_k$, $k=0,1,2,...$, где $P\neq O$ — постоянная матрица. Тогда система (2.6) примет вид

$$z_{k+1}=(A(h)+BP)z_k+\psi(z_k,h)\,,\quad k=0,1,2,\dots\,, \tag{5.3}$$

где $\psi(z_k,h)=\xi(z_k,Pz_k,h)$, и $\psi(z,h)=o(\|z\|)$ при $\|z\|\to 0$.

Теорема 9. *Если существует ненулевая матрица P размера $q\times(n+m)$ такая,что при некотором $h=h_0>0$ все собственные значения матрицы $A(h)+BP$ меньше 1 по модулю, то гибридная система (1.1) с управлением $u=P\cdot col(x(t),y(t))$ стабилизируема при $h=h_0>0$.*

Далее перейдем к рассмотрению вопроса о стабилизации замкнутой гибридной системы (1.1) с обратной связью вида

$$u(t_k)=q(x(t_k),y(t_k)),\quad k=0,1,2,\dots\,, \tag{5.4}$$

где $q(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция, при этом $q(0,0)=0$. Отсюда

$$q(x,y)=P_1x+P_2y+r(x,y)\,,$$

здесь $P_1=q'_x(0,0)$, $P_2=q'_y(0,0)$ — матрицы соответствующих размеров, $r(x,y)=o(\|x\|+\|y\|)$ при $\|x\|+\|y\|\to 0\,.$

Тогда гибридная система (1.1) с регулятором обратной связи (5.4) равносильна нелинейной дискретной системе, компактная запись которой имеет вид

$$z_{k+1} = F(h)z_k + \tau(z_k, h)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{5.5}$$

где

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, F(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} + CP_1 & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 + CP_2 \end{bmatrix},$$

$$\tau(z_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \gamma(x_k, y_k; h) \end{bmatrix}, \gamma(x_k, y_k; h) = \delta(x_k, y_k, P_1 x_k + P_2 y_k + r(x_k, y_k); h),$$

причем

$\gamma(x, y; h) = o(\|x\| + \|y\|)$ при $\|x\| + \|y\| \to 0\,, \tau(z, h) = o(\|z\|)$ при $\|z\| \to 0\,.$

Система (5.5) имеет точку равновесия $z = 0$. Тогда справедлива

Теорема 10. *Если при некотором $h = h_0 > 0$ все собственные значения матрицы $F(h)$ меньше 1 по модулю, то гибридная система (1.1) с регулятором обратной связи (5.4) стабилизируема при $h = h_0 > 0$.*

Доказательство теорем 9, 10 основано на достаточном признаке асимптотической устойчивости точки равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.1), представленном в работе ([18], теорема 3.2, доказательство теоремы 3.2 на с. 97), так как у матриц $A(h_0) + BP$ и $F(h_0)$ систем (5.3) и (5.5) соответственно все собственные значения меньше 1 по модулю, при этом $\psi(z, h) = o(\|z\|)$, $\tau(z, h) = o(\|z\|)$ при $\|z\| \to 0\,.$

6. Заключение

В работе установлены необходимые и достаточные признаки управляемости нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем, достаточные признаки стабилизации указанных систем как без учета, так и с учетом регулятора обратной связи. Изложен новый способ стабилизации нелинейных гибридных систем со скалярным управлением.

Представленный способ при соответствующей модификации можно распространить на случай систем с векторным управлением, что позволит получить общий подход к стабилизации нелинейных гибридных систем (1.1) с различным по размерности управлением, отличающийся от подхода, изложенного в работе [1].

Список источников

1. Акманова С.В. О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // Автоматика и телемеханика. 2024. № 9. С. 41–58. https://doi.org/10.31857/S0005231024090023

2. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М. : Наука, 1987. 368 с.
3. Ананьевский И. М. Синтез управления динамическими системами на основе метода функций Ляпунова // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 42. С. 23–29.
4. Анохин Н. В. Управление нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.01. М., 2014. 72 с.
5. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы. 1975. № 14. С. 4–10.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М. : Физматлит, 1959. Т. 2. 620 с.
7. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Труды МИАН. 2020. Т. 308. С. 88–100. https://www.mathnet.ru/rus/tm4050
8. Бортаковский А. С., Пантелеев А. В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 7. С. 57–66.
9. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. : Мир, 1977. 650 с.
10. Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами / О. С. Логунова, Е. Б. Агапитов, И. И. Баранкова [и др.] // Электротехнические системы и комплексы. 2019. № 2 (43). С. 25–34. https://doi.org/10.18503/2311-8318-2019-2(43)-25-34
11. Максимов В. П. Непрерывно-дискретные динамические модели // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С. 97–106.
12. Максимов В. П., Чадов А. Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. 2011. № 2(9). С. 13–23.
13. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика. 2012. № **6**. С. 7–10.
14. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М. : Наука, 1973. 256 с.
15. Расина И. В. Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 3–17. http://mi.mathnet.ru/rus/at4078
16. Сазанова Л. А. Об управлении дискретными системами: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. Екатеринбург, 2002. 95 с.
17. Чебыкин Л. С. Условия оптимальности дискретно-непрерывных систем // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией. Свердловск : УНЦ АН СССР, 1980. С. 132–140.
18. Юмагулов М. Г., Акманова С. В. Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, № 2. С. 85–100.
19. Akmanova S. V., Kopylova N. A. The Stability of Continuous-Discrete Dynamical Systems under Fast Switching // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, N 5, P. 1826–1832. https://doi.org/10.1134/S1995080223050074
20. La Salle J.P. The Stability and Control of Discrete Processes. N.Y.: Springer-Verlag Inc.,1986. 150 p.
21. Karafyllis L., Krstic M. Nonlinear Stabilization Under Sampled and Delayed Measurements, and With Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. Vol. 57, N 5. P. 1141–1154.

References

1. Akmanova S.V. Stabilization of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems with a Constant Sampling Step. *Automation and Remote Control*, 2024, vol. 85, no. 9, pp. 864–878. https://doi.org/10.31857/S0005117924090022
2. Akulenko L.D. *Asymptotic methods of optimal control.* Moscow, Nauka Publ., 1987, 368 p. (in Russian)
3. Ananevsky I.M. Synthesis of control of dynamic systems based on the method of Lyapunov functions. *Modern Mathematics. Fundamental directions*, 2011, vol. 42, pp. 23–29. (in Russian)
4. Anokhin N.V. Control of nonlinear mechanical systems with a deficit of control actions in the vicinity of the equilibrium position. Cand. sci. diss. abstr. (Phys.-Math.). Moscow, 2014, 72 p. (in Russian)
5. Akhundov A.A. Controllability of linear hybrid systems. *Controllable systems*, 1975, no. 14, pp. 4–10. (in Russian)
6. Berezin I.C., Zhidkov N.P. *Methods of calculations.* Moscow, Fizmatlit Publ., vol. 2, 1959, 620 p. (in Russian)
7. Bortakovskii A.S. Sufficient Optimality Conditions for Hybrid Systems of Variable Dimension. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 308, pp. 79–91. https://doi.org/10.1134/S0081543820010071
8. Bortakovskii A.S., Panteleev A.V. Sufficient conditions for optimal control of continuously discrete systems. *Avtom. Telemekh.*, 1987, no. 7, pp. 57–66. (in Russian)
9. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems.* Moscow, Mir Publ., 1977, 650 p.(in Russian)
10. Logunova O.S., Agapitov E.B., Barankova I.I. et al. Mathematical models for studying the thermal state of bodies and controlling thermal processes. *Electrical systems and complexes*, 2019. no. 2 (43). pp. 25–34.(in Russian) https://doi.org/10.18503/2311-8318-2019-2(43)-25-34
11. Maksimov V.P. Continuous-discrete dynamic models. *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-95
12. Maksimov V.P., Chadov A.L. Hybrid models in problems of economic dynamics. *Bulletin of Perm University*, 2011, no. 2 (9), pp. 13–23. (in Russian)
13. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M. Stability and stabilization of linear hybrid discrete-continuous stationary systems. *Proceedings of BSTU. Physical and mathematical sciences and computer science*, 2012, no. 6, pp. 7–10.
14. Propoi A.I. *Elements of the theory of optimal discrete processes.* Moscow, Nauka Publ., 1973, 256 p. (in Russian)
15. Rasina I.V. Iterative Optimization Algorithms for Discrete-Continuous Processes. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 10, pp. 1591-1603. http://doi.org/10.1134/S0005117912100013
16. Cazanova L.A. *On control of discrete systems.* Cand. sci. diss. abstr. (Phy.-Math.). Yekaterinburg, 2002, 95 p. (in Russian)
17. Chebykin L.S. Optimality conditions for discrete-continuous systems. *Optimal control of systems with uncertain information*, Sverdlovsk, USC of the USSR Academy of Sciences Publ., 1980, pp. 132–140. (in Russian)
18. Yumagulov M.G., Akmanova S.V. On stability of equilibria of nonlinear continuous-discrete dynamical systems. *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 85–99. https:// doi.org/10.13108/2023-15-2-85
19. Akmanova S.V., Kopylova N.A. The Stability of Continuous-Discrete Dynamical Systems under Fast Switching. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 5, pp. 1826–1832. https:// doi.org/10.1134/S1995080223050074

20. La Salle J.P. *The Stability and Control of Discrete Processes*. New York, Springer-Verlag Inc. Publ., 1986, 150 p.
21. Karafyllis L., Krstic M. Nonlinear Stabilization Under Sampled and Delayed Measurements, and With Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold. *IEEE Transact. Autom. Control*, 2012, vol. 57, no. 5, pp. 1141–1154.

Об авторах

Акманова Светлана Владимировна, канд. пед. наук, доц., Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова, Магнитогорск, 455000, Российская Федерация, svet.akm_74@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7211-1610

About the authors

Svetlana V. Akmanova, Cand. Sci. (Pedagog.), Assoc. Prof., Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000, Russian Federation, svet.akm_74@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7211-1610

Поступила в редакцию / Received 05.09.2024
Поступила после рецензирования / Revised 19.11.2024
Принята к публикации / Accepted 15.01.2025