ПЕРСОНАЛИИ
PERSONALIA

Серия «Математика»
2025. Т. 51. С. 167—178

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Персоналии

УДК 012
MSC 01A70
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.167

К 85-летнему юбилею члена-корреспондента РАН, профессора А. А. Толстоногова

И. В. Бычков[1], **В. А. Дыхта**[1], **А. Л. Казаков**[1✉], **Н. И. Погодаев**[1], **В. А. Шелехов**[1]

[1] Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация
✉ kazakov@icc.ru

Аннотация. Статья посвящена научной и научно-педагогической деятельности члена-корреспондента Российской академии наук А. А. Толстоногова, которому в марте 2025 г. исполняется 85 лет.

Ключевые слова: релаксация, субдифференциал, процессы выметания, невыпуклые ограничения

Ссылка для цитирования: Бычков И. В., Дыхта В. А., Казаков А. Л., Погодаев Н. И., Шелехов В. А. К 85-летнему юбилею члена-корреспондента РАН, профессора А. А. Толстоногова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 167–178.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.167

Personalia

On the 85th Birthday Anniversary of the RAS Corresponding Member, Professor A. A. Tolstonogov

I. V. Bychkov[1], **V. A. Dykhta**[1], **A. L. Kazakov**[1✉], **N. I. Pogodaev**[1], **V. A. Shelekhov**[1]

[1] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation
✉ kazakov@icc.ru

Abstract. The paper is dedicated to the scientific and scientific-pedagogical activities of the professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences A. A. Tolstonogov, who turns 85 in March 2025.

Keywords: relaxation, subdifferential, sweeping process, nonconvex constraints

For citation: Bychkov I. V., Dykhta V. A., Kazakov A. L., Pogodaev N. I., Shelekhov V. A. On the 85th Birthday Anniversary of the RAS Corresponding Member, Professor A. A. Tolstonogov. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 167–178. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.167

4 марта 2025 г. исполняется 85 лет знаменитому иркутскому математику члену-корреспонденту Российской академии наук, доктору физико-математических наук, профессору А. А. Толстоногову, известному в научном мире специалисту в области многозначного анализа, эволюционных включений и управляемых систем, непрерывных селекторов многозначных отображений с невыпуклыми значениями и их приложений к задачам вариационного исчисления и оптимального управления. Результаты А. А. Толстоногова в этих направлениях снискали ему мировое признание и авторитет.

Родился Александр Александрович 4 марта 1940 г. в с. Дубровное Северо-Казахстанской области (Казахская ССР) в семье служащих.

В 1963 г. окончил факультет летательных аппаратов Казанского государственного авиационного института (КАИ), его дипломная работа была удостоена золотой медали Министерства высшего и среднего образования СССР «За лучшую студенческую научную работу». Получив высшее образование, он поступил на работу в КАИ, где занимал должности инженера, ассистента, старшего преподавателя, доцента. С 1964 по 1967 г. проходил аспирантуру в КАИ на кафедре аэродинамики. В 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые задачи оптимального управления с ограниченными фазовыми координатами». С 1969 по 1974 г. — преподаватель Казанского высшего командно-инженерного училища. Именно в эти годы, как он сам шутит, «из-за армейской скуки» А. А. Толстоногов увлекся функциональным анализом. Постепенно фундаментальная математика так заинтересовала молодого доцента, что он принял решение сменить направление научных исследований. К этому времени относится его возвращение в КАИ на кафедру кибернетики, которую возглавлял доктор физико-математических наук (впоследствии академик) В. М. Матросов.

Летом 1975 г. в составе «казанского десанта», возглавляемого В. М. Матросовым, А. А. Толстоногов переехал в Иркутск. Работал в Сибирском энергетическом институте СО АН СССР в должности заведующего лабораторией математических методов кибернетики Отдела теории систем и кибернетики и, по свидетельству коллег, уже тогда выделялся глубокими математическими познаниями и организаторскими способностями, которые весьма ценил В. М. Матросов.

В 1980 г. Отдел теории систем и кибернетики выделился в самостоятельную научную организацию — Иркутский вычислительный центр (ИрВЦ) СО АН СССР (в настоящее время — Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН). В ИрВЦ А. А. Толстоногов занимал должности заведующего лабораторией (1980–1985 гг.), заместителя директора по научной работе (1985–1993 гг.). В 1984 г. одним из первых в ИрВЦ защитил докторскую диссертацию на тему «Дифференциальные включения в банаховом пространстве» по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Защита состоялась в Свердловске (Екатеринбурге), в Институте математики и механики УНЦ АН СССР (ныне ИММ УрО РАН), одним из оппонентов был выдающийся ученый академик Н. Н. Красовский.

С января 1976 г. начал работать доцентом, а затем профессором кафедры математического анализа ИГУ, позднее он возглавил кафедру прикладной математики. В 1987 г. А. А. Толстоногову присваивается ученое звание профессора, и в 1993–1996 гг. он работает профессором кафедры математики Иркутской государственной экономической академии.

С 1997 г. А. А. Толстоногов — главный научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, с 2000 г. — заведующий лабораторией, затем — заведующий отделом. В 2007–2017 гг. — заместитель и первый заместитель директора по научной работе. В настоящее время — заведующий отделением эволюционных уравнений и управляемых динамических систем, главный научный сотрудник, советник директора.

В 2006 г. А. А. Толстоногов избран членом-корреспондентом РАН по Отделению математических наук РАН по специальности «математика».

А. А. Толстоногов — автор свыше 200 научных работ, в том числе двух монографий [1; 6] и более полутора сотен журнальных статей. Он создал качественную теорию дифференциальных включений в банаховом пространстве с невыпуклой правой частью, которая нашла свое отражение в одной из первых монографий по данной тематике [1]. Эта поистине пионерская работа по теории дифференциальных включений, значения правых частей которых — непустые, компактные, необязательно выпуклые подмножества банахова пространства, давно заняла место в ряду классических публикаций по математике. Дополненный перевод [6] имел большой научный успех за рубежом.

А. А. Толстоногов — научный руководитель пяти кандидатских и консультант двух докторских и диссертаций, всего же из его научной школы вышли 6 докторов и 11 кандидатов наук, он является председателем диссертационного совета при ИДСТУ СО РАН.

А. А. Толстоногов — член Объединенного ученого совета по математике и информатике СО РАН, член Президиума Иркутского филиала СО РАН, главный редактор журнала «Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», который под его руководством стал одним из ведущих математических изданий в России, член редколлегии журнала Discussiones Mathematicae, ser. Differential Inclusions, Control and Optimization, входил в состав редколлегий журналов Set-valued and Var. Anal., Nonlinear Anal., «Сибирский журнал индустриальной математики». В 1987 г. ему присуждена премия Сибирского отделения АН СССР в области фундаментальных наук за цикл работ по теории дифференциальных включений. Заслуженный ветеран СО РАН (1999 г.), заслуженный деятель науки Российской Федерации (2002 г.), заслуженный работник науки и высшей школы Иркутской области (2021 г.), заслуженный деятель науки Сибирского отделения РАН (2024 г.). Награжден орденами Почета (2012 г.) и Александра Невского (2021 г.).

А. А. Толстоногов получил фундаментальные научные результаты:

1. Теоремы о непрерывных селекторах, проходящих по крайним точкам невыпуклозначных отображений в банаховых пространствах, и теоремы о плотности таких селекторов во множестве всех непрерывных селекторов многозначного отображения. Доказательства теорем данного типа базируются на разработанной автором тонкой топологической

технике с применением теоремы Бэра о категориях и введении новых топологий на пространствах функций, интегрируемых по Бохнеру.

2. Теоремы о свойствах релейности решений линейного управляемого дифференциального включения в банаховом пространстве.

3. Теоремы о релаксационной устойчивости задач оптимального управления с невыпуклозначным включением и множеством управлений, позволяющие расширить такие задачи путем их овыпукления с сохранением нижней грани целевого функционала.

4. Доказаны теоремы о существовании абсолютно непрерывных и непрерывных справа BV-решений для процессов выметания Моро с невыпуклым, проксимально регулярным движущимся объемлющим множеством. Изучены топологические свойства таких решений.

5. Для задачи минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях процесса выметания с невыпуклым внешним множеством управлений доказаны существование решения овыпукленной задачи и теорема релаксации.

6. Доказаны теоремы сравнения для эволюционных включений и управляемых систем с максимально монотонными операторами. Предложен новый метод исследования таких систем с зависящими от состояния операторами, а также гибридных систем различного типа.

Полученные А. А. Толстоноговым результаты и предложенные методы показали свою эффективность при изучении невыпуклых задач различной природы и используются как отечественными, так и зарубежными исследователями. О признании результатов А. А. Толстоногова научным сообществом можно судить по высокому индексу цитируемости. По данным Американского математического общества, он цитировался более 1000 раз, а по данным РИНЦ — более 1200 раз.

Остановимся более подробно на результатах, полученных А. А. Толстоноговым за последние три десятилетия.

Непрерывные селекторы многозначных отображений с разложимыми значениями. Многозначное отображение есть функция $F\colon X \to 2^Y$, ставящая в соответствие каждой точке пространства X непустое подмножество пространства Y. В XX в. теория многозначных отображений обогатилась мощными и красивыми результатами. Пожалуй, самый известный из них — теорема Какутани.

Селектором многозначного отображения $F\colon X \to 2^Y$ называется однозначное отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f(x) \in F(x)$ для всех $x \in X$. Далее будем считать, что X — сепарабельное метрическое пространство, а Y — банахово. В этом случае можно говорить о полунепрерывных сверху и снизу многозначных отображениях и их непрерывных селекторах. Непрерывные селекторы играют особую роль в теории многозначных отображений: зачастую они позволяют сводить многозначный случай к однозначному. Теоремам о селекторах посвящены работы А. А. Толстоногова конца 1990-х гг. Классическая теорема Майкла о непрерывном селекторе утверждает, что полунепрерывное многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями имеет непрерывный селектор. Требование выпуклости значений является ключевым при ее доказательстве. Селектор у многозначного отображения с невыпуклыми значениями можно найти, когда $Y = L^p(T; E)$, $1 \le p < +\infty$, суть пространство интегрируемых по Бохнеру функций, определенных на компактном множестве $T \subset \mathbb{R}^k$ и принимающих значения в банаховом пространстве E. Для подмножеств таких пространств имеется альтернативное выпуклости понятие разложимости.

Подмножество $E \subset L^p(T; Y)$ называется разложимым, если из $f, g \in E$ следует, что $\chi_A f + g(1 - \chi_A)g \in E$, для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset T$. Можно показать, что во многих топологических теоремах разложимое множество может быть использовано вместо выпуклого. Например, справедлив «разложимый» аналог теоремы Майкла: полунепрерывное многозначное отображение с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывный селектор.

Тонким результатам о непрерывных селекторах многозначных отображений с разложимыми значениями посвящены работы А. А. Толстоногова [10; 11]. В одной из них доказано существование непрерывного «экстремального» селектора f_{ext}, т. е. селектора, проходящего лишь через крайние точки множеств $F(x)$, $x \in X$. Во второй — установлено, что экстремальный селектор можно найти в любой окрестности произвольного непрерывного селектора.

Теорема 1. *Пусть X — σ-компактное множество, $F\colon X \to 2^{L^p(T;E)}$ — непрерывное многозначное отображение с разложимыми выпуклыми слабо компактными значениями, f — его непрерывный селектор. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется экстремальный селектор f^{ϵ}_{ext} такой, что $\|f(x) - f^{\epsilon}_{ext}(x)\|_{p,w} \le \epsilon$, для всех $x \in X$.*

Здесь на $L^p(T; E)$ введена слабая норма $\|v\|_{p,w} = \sup \left\| \int_A v(t)\, dt \right\|$, $v \in L^p(T; E)$, где супремум взят по семейству множеств вида $A = [a_1, a_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$. Этот результат оказался необычайно удобным инструментом для исследования релаксационных свойств эволюционных включений и соответствующих задач оптимального управления.

Релаксация оптимизационных задач. Рассмотрим две пары $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ и $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$, состоящие из пространства и функционала на нем, и скажем, что пара $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$ есть расширение пары $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$, если 1) существует непрерывное отображение $i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, при котором $i(\mathcal{X})$ плотно в $\mathcal{Y}$, 2) для любого $x \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство $\mathcal{J}(i(x)) \le \mathcal{I}(x)$ и 3) для любого $y \in \mathcal{Y}$ существует такая последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$, что $y = \lim_{n\to\infty} i(x_n)$ и $\mathcal{J}(y) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(x_n)$.

Каждая пара $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ порождает оптимизационную задачу $\inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(x)$. Часто минимум в такой задаче не достигается. Под задачей релаксации понимается поиск пары $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$, которая, во-первых, является расширением пары $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$. Во-вторых, соответствующая ей оптимизационная задача $\min_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{J}(y)$ имеет решение. Из свойств расширения немедленно следует, что $\min_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{J}(y) = \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(x)$. По-видимому, первым результатом такого типа была теорема Н. Н. Боголюбова о релаксационном расширении классической задачи вариационного исчисления:

$$\inf \left\{ \int_{t_0}^{t_1} g\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) \, dt : \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \ x \in C^1\left([t_0, t_1]; \mathbb{R}\right) \right\}.$$

Релаксационное расширение данной задачи имеет такой же вид, однако подынтегральная функция g заменяется своим «овыпуклением» по последнему аргументу. Задача оптимального управления также может быть представлена в виде вариационной пары $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$. В этом случае $\mathcal{X}$ есть множество решений управляемой системы (множество пар траектория-управление), а $\mathcal{I}$ — интегральный функционал на этом множестве. Минимум в задаче $\inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(x)$ может не достигаться по двум причинами: если множество решений $\mathcal{X}$ не компактно и если функционал $\mathcal{I}$ не является полунепрерывным снизу.

Известно, что даже интегральный функционал в классическом вариационном исчислении (без дополнительных предположений о выпуклости подынтегральной функции) не является полунепрерывным снизу ни в какой разумной топологии на пространстве пар $(x, \dot{x})$. Для решения этой проблемы Н.Н. Боголюбов строил релаксационное расширение. Для классических управляемых систем на $\mathbb{R}^n$ известно: если множество допустимых скоростей невыпукло, то, как правило, множество $\mathcal{S}$ траекторий системы, ограниченных на конечный отрезок времени $T \subset \mathbb{R}$, некомпактно в пространстве $C(T; \mathbb{R}^n)$, т. е. ожидать компактности множества траекторий нельзя даже в таком простом случае. Проблему можно решить путем овыпуклення множества допустимых скоростей. Тогда соответствующее множество траекторий $\mathcal{S}_{\mathrm{co}}$ овыпукленной системы станет компактным и будет справедливо $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_{\mathrm{co}}$, т. е. любую траекторию овыпукленной системы можно сколь угодно точно приблизить траекторией исходной системы (теорема Филиппова – Важевского). Впервые теоремы Боголюбова и Филиппова – Важевского объединены для построения релаксационного расширения невыпуклой задачи оптимального управления в работе А. А. Толстоногова с соавторами [2].

Пусть $T = [0, 1]$, а E — сепарабельное банахово пространство. Пара $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ состоит из множества $\mathcal{X} \subset C(T; E)$ траекторий дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$, $\quad x(0) = x_0$, и функционала $\mathcal{I}(x) = \int_T g\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt$. Предположим, что многозначное отображение $F\colon T \times E \to 2^E$ имеет компактные значения, измеримо по t, равномерно липшицево по x и ограничено в том смысле, что все множества $F(x)$, $x \in E$, принадлежат некоторому ограниченному подмножеству пространства E. Кроме того, будем считать, что $g\colon T \times E \times E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

измеримо по t, непрерывно по (x, u) и удовлетворяет условию подлинейного роста $|g(t, x, u)| \leq C(1 + \|x\| + \|u\|)$ для всех $t \in T$ и $x, u \in E$. При таких предположениях задача $\min_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(x)$, вообще говоря, не имеет решений.

Теорема 2. *Релаксационным расширением* $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ *является пара* $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$, *в которой* $\mathcal{Y} \subset C(T; E)$ *есть множество траекторий овыпукленного включения* $\dot{x} \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x)$, $x(0) = x_0$, *а функционал* $\mathcal{J}$ *определен как*

$$\mathcal{J}(x) = \int_T g_F^{**}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt,$$

где через g_F^{**} *обозначена биполяра по последнему аргументу к функции*

$$g_F(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u), & u \in F(t, x), \\ +\infty, & u \notin F(t, x). \end{cases}$$

Эволюционные включения и уравнения с гистерезисом. Вопросам релаксации управляемых систем, описываемых дифференциальными включениями с максимально монотонными операторами, посвящены многие работы А. А. Толстоногова начала 2000-х гг.

Многозначный оператор $A\colon H \to 2^H$, действующий на сепарабельном гильбертовом пространстве, называется монотонным, если для любых $u \in A(x)$ и $v \in A(y)$ выполнено неравенство $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Монотонный оператор является максимальным, если не существует другого монотонного оператора со строго большим графиком. Важнейший пример максимально монотонного оператора — это субдифференциал ∂V выпуклого полунепрерывного снизу функционала $V\colon H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Такой функционал V удобно отождествлять с потенциальной энергией динамической системы, которая стремится к состоянию с наименьшей энергией, двигаясь в направлении антиградиента: $-\dot{x} \in \partial V(x)$. При подходящем выборе потенциала такие включения оказываются эквивалентными различным параболическим уравнениям. Описанная выше «градиентная» динамика может быть модифицирована путем добавления разного рода управляемых возмущений.

Техника непрерывных селекторов, и в частности теорема 1, нашла свое применение при доказательстве плотности пространства $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Еще один класс управляемых систем, для которого метод непрерывных селекторов оказался эффективным, — системы с гистерезисом. Такие задачи были изучены А. А. Толстоноговым в работах 2010-х гг. [3; 8].

Вариационная устойчивость. Скомбинировав технику, берущую начало в теории многозначных отображений, с теоремами современного вариационного исчисления, связанными с понятиями Γ-сходимости и сходимости функционалов по Моско, А. А. Толстоногов создал удобный метод для изучения вариационной устойчивости задач оптимального управления. Абстрактная оптимизационная задача $F_\lambda(x) \to \min, \quad x \in X$, зависящая от параметра $\lambda \in \Lambda$, вариационно устойчива, если малое изменение параметра приводит к малому изменению как значения задачи $\min_{x\in X} F_\lambda(x)$, так и множества ее решений $\operatorname{Argmin}_{x\in X} F(x)$.

Вопросы вариационной устойчивости важны, например, при изучении задач с малыми параметрами и построении численных аппроксимаций оптимизационных задач, ибо лишь аппроксимация, генерирующая вариационно устойчивое семейство, может быть признана корректной. А. А. Толстоноговым была изучена вариационная устойчивость задач оптимального управления уравнениями с максимально монотонными операторами [9] и абстрактными операторами Вольтерра [4].

Существование решений для процессов выметания и включений с максимально монотонными операторами. Многие работы 2010-х гг. посвящены изучению возмущенных процессов выметания. С технической точки зрения о процессе выметания можно думать как об эволюционном включении, в правую часть которого входит слагаемое вида $\partial I_{C(t)}$, где $C(t) \subset H$ — некоторое меняющееся во времени множество, а $I_{C(t)}$ — его индикаторная функция. Как правило, $C(t)$ предполагается замкнутым выпуклым (или проксимально регулярным). С практической точки зрения указанная добавка позволяет моделировать меняющиеся во времени ограничения, с которыми взаимодействует динамическая система. Процессы выметания возникают при описании эластопластичных систем, нерегулярных электрических цепей, в экономике, в моделях движения толпы и в других областях.

Теория существования решений для процессов выметания и эволюционных включений с максимально монотонными операторами к настоящему времени детально разработана. Тем не менее А. А. Толстоногову удалось получить ряд новых результатов. При доказательстве существования решений процесса выметания, как правило, предполагают, что многозначное отображение $C\colon T \to H$, описывающее движущееся множество, является достаточно регулярным. Например, требуют, чтобы для расстояния от точки до движущегося множества имела место оценка $|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \le |v(t) - v(s)| \quad \forall x \in H \quad \forall s, t \in T$, где v — некоторая абсолютно непрерывная функция. Однако для неограниченных множеств $C(t)$, таких как гиперплоскость или полупространство, приведенное выше неравенство не выполняется.

Среди результатов, относящихся к вопросам существования решений уравнений с максимально монотонными операторами, выделим тот [5], в котором уравнение $-\dot{x} \in A(t)x + f(t)$ исследуется методом сравнения, причем в качестве системы сравнения используется процесс выметания $-\dot{x} \in \partial I_{D(t)}(x) + g(t)$, в котором движущееся множество $D(t)$ есть область определения максимально монотонного оператора $A(t)$, $t \in T$.

Теорема 3. *Пусть семейство максимально монотонных операторов $A(t)$, $t \in T$ измеримо и, кроме того, элемент множества $A(t)x$ минимальной нормы, обозначаемый символом $A^0(t)x$, удовлетворяет условию роста $\|A^0(t)x\| \le m(t)l(\|x\|)$, где $m \in L^2(T;\mathbb{R}_+)$, $l\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция. Если процесс выметания с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет решение для любой функции $g \in L^1(T;H)$, то эволюционное включение с тем же начальным условием имеет единственное решение для любой функции $f \in L^1(T;H)$.*

Одной из интересных технических находок А. А. Толстоногова стало применение псевдометрики между максимально монотонными операторами, изначально введенной А. А. Владимировым, а также широкое использование операторов Немыцкого, генерируемых семейством $A(t)$ максимально монотонных операторов: $\mathcal{A}\colon L^2(T;H) \to 2^{L^2(T;H)}$, $\mathcal{A}u = \big\{v \in L^2(T;H) : v(t) \in A(t)u(t) \text{ п.в.}\big\}$. Были найдены условия [7], при которых оператор Немыцкого $\mathcal{A}$ семейства $A(t)$ максимально монотонных операторов сам является максимально монотонным.

Мы вынуждены здесь остановиться, хотя привели очень краткий и далеко не полный обзор выдающихся научных достижений юбиляра.

Мы искренне поздравляем Александра Александровича с замечательной датой, которую он встречает в прекрасной научной форме! Мы надеемся увидеть еще много его блестящих научных статей, полных глубоких идей и тонких рассуждений, и от всей души желаем юбиляру крепкого сибирского здоровья, счастья и благополучия на многие годы!

Список источников

1. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск : Наука, 1986. 296 с.
2. De Blasi F. S., Pianigiani G., Tolstonogov A. A. A Bogolyubov-type theorem with a nonconvex constraint in Banach spaces // SIAM J. Contr. Opt. 2005. Vol. 43, N 2. P. 466–476. https://doi.org/10.1137/S0363012903423156
3. Krejci P., Timoshin S. A., Tolstonogov A. A. Relaxation and optimisation of a phase-field control system with hysteresis // Int. J. Contr. 2018. Vol. 91, N 1. P. 85–100. https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1268270
4. Pogodaev N. I., Tolstonogov A. A. The variational stability of an optimal control problem for Volterra-type equations // Sib. Math. J. 2014. Vol. 55, N 4. P. 667–686. https://doi.org/10.1134/S0037446614040090
5. Tolstonogov A. A. Comparison theorems for evolution inclusions with maximal monotone operators. L2-theory // Sb. Math. 2023. Vol. 214, N 6. P. 853–877. https://doi.org/10.4213/sm9736e
6. Tolstonogov A. Differential inclusions in a Banach space. Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2000. 302 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9490-5
7. Tolstonogov A. A. Maximal Monotonicity of a Nemytskii Operator // Funct. Anal. Appl. 2021. Vol. 55, N 3. P. 217–225. https://doi.org/10.4213/faa3892

8. Tolstonogov A. A. Properties of Solutions of a Control System with Hysteresis // J. Math. Sci. (USA). 2014. Vol. 196, N 3. P. 405–433. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1665-x
9. Tolstonogov A. A. Variational stability of optimal control problems involving subdifferential operators // Sb. Math. 2011. Vol. 202, N 4. P. 583–619. https://doi.org/10.1070/SM2011v202n04ABEH004157
10. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. Vol. 4, N 2. P. 173–203. https://doi.org/10.1007/BF00425964
11. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. Vol. 4, N 3. P. 237–269. https://doi.org/10.1007/BF00419367

References

1. Tolstonogov A.A. *Differencial'nye vklyucheniya v banahovom prostranstve* [Differential inclusions in a Banach space]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986, 296 p. (in Russian)
2. De Blasi F.S., Pianigiani G., Tolstonogov A.A. A Bogolyubov-type theorem with a nonconvex constraint in Banach spaces. *SIAM J. Contr. Opt.*, 2005, vol. 43, no. 2, pp. 466–476. https://doi.org/10.1137/S0363012903423156
3. Krejci P., Timoshin S.A., Tolstonogov A.A. Relaxation and optimisation of a phase-field control system with hysteresis. *Int. J. Contr.*, 2018, vol. 91, no. 1, pp. 85–100. https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1268270
4. Pogodaev N.I., Tolstonogov A.A. The variational stability of an optimal control problem for Volterra-type equations. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 4, pp. 667–686. https://doi.org/10.1134/S0037446614040090
5. Tolstonogov A.A. Comparison theorems for evolution inclusions with maximal monotone operators. L2-theory. *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 6, pp. 853–877. https://doi.org/10.4213/sm9736e
6. Tolstonogov A. *Differential inclusions in a Banach space.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000, 302 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9490-5
7. Tolstonogov A.A. Maximal Monotonicity of a Nemytskii Operator. *Funct. Anal. Appl.*, 2021, vol. 55, no. 3, pp. 217–225. https://doi.org/10.4213/faa3892
8. Tolstonogov A.A. Properties of Solutions of a Control System with Hysteresis. *J. Math. Sci. (USA)*, 2014, vol. 196, no. 3, pp. 405–433. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1665-x
9. Tolstonogov A.A. Variational stability of optimal control problems involving subdifferential operators. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 583–619. https://doi.org/10.1070/SM2011v202n04ABEH004157
10. Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems. *Set-Valued Anal.*, 1996, vol. 4, no. 2, pp. 1730–203. https://doi.org/10.1007/BF00425964
11. Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A. Lp-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Relaxation theorems. *Set-Valued Anal.*, 1996, vol. 4, no. 3, pp. 237–269. https://doi.org/10.1007/BF00419367

Об авторах

Бычков Игорь Вячеславович, д-р техн. наук, проф., акад. РАН, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, bychkov@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-0742-102X

Дыхта Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, dykhta@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-3758-6730

Казаков Александр Леонидович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, kazakov@icc.ru, https://orcid.org/0000-0002-3047-1650

Погодаев Николай Ильич, канд. физ.-мат. наук, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, nickpogo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7062-1764

Шелехов Владимир Алексеевич, канд. техн. наук, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, vash@icc.ru,

About the authors

Igor V. Bychkov, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Acad. of the RAS, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, bychkov@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-0742-102X

Vladimir A. Dykhta, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, dykhta@icc.ru, https://orcid.org/0000-0003-3758-6730

Alexander L. Kazakov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, kazakov@icc.ru, https://orcid.org/0000-0002-3047-1650

Nikolay I. Pogodaev, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, nickpogo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7062-1764

Vladimir A. Shelekhov, Cand. Sci. (Tech.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, vash@icc.ru,

Поступила в редакцию / Received 10.01.2025
Поступила после рецензирования / Revised 24.01.2025
Принята к публикации / Accepted 27.01.2025