Серия «Математика»
2025. Т. 51. С. 130—140

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.716
MSC 03B50, 08A99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.130

Импликативно предполные множества мультиопераций ранга 3

В. И. Пантелеев[1,2]✉

[1] Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Улан-Удэ, Российская Федерация
[2] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ vl.panteleyev@gmail.com

Аннотация. Исследуется критерий полноты на множестве мультиопераций ранга 3 относительно оператора импликативного замыкания. Задача является частным случаем проблемы конечной классификации мультиопераций, заданных на произвольном множестве. Получено описание всех предполных множеств. Описаны выразительные возможности оператора, в том числе найдены условия, при которых множество операций импликативно порождает все множество мультиопераций. Полученный результат может быть использован при изучении мультиопераций, заданных на произвольном множестве.

Ключевые слова: замыкание, мультиоперация, замкнутое множество, суперпозиция, полнота, выразимость

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011 в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова, `https://rscf.ru/project/24-21-00011/`.

Ссылка для цитирования: Пантелеев В. И. Импликативно предполные множества мультиопераций ранга 3 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 130–140.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.130

Research article

Implicatively Precomplete Sets of Multioperations Defined on a Set of Three Elements

Vladimir I. Panteleev[1,2]✉

[1] Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation
[2] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ vl.panteleyev@gmail.com

Abstract. We study the completeness criterion on the set of rank-3 multioperations with respect to the implicative closure operator. The problem is a special case of the problem of finite classification of multioperations defined on an arbitrary set. A description of all precomplete sets is obtained. The expressive possibilities of the operator are described, including the conditions under which a set of operations implicatively generates all sets of multoperations. The obtained result can be used in the study of multioperations defined on an arbitrary set.

Keywords: closure, multioperation, closed set, composition, completeness, representability

Acknowledgements: The study was financially supported by the Russian Science Foundation in Banzarov Buryat State University, grant no. 24-21-00011, `https://rscf.ru/project/24-21-00011/`

For citation: Panteleev V. I. Implicatively Precomplete Sets of Multioperations Defined on a Set of Three Elements. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 130–140. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.130

Введение

Одна из основных проблем, возникающих при классификации операций и мультиопераций, заданных на конечных множествах, относительно оператора суперпозиции — континуальность.

Сокращение континуальных классификаций возможно при замене оператора суперпозиции на более сильные операторы замыкания. Одним из таких является оператор параметрического замыкания, при котором операции выражаются формулами логики предикатов первого порядка [2]. Для построения формул используется логическая связка конъюнкция (&), квантор существования ($\exists$) и отношение равенства на множестве термов. Для булевых операций этот оператор порождает 25 замкнутых классов, а для операций 3-значной логики — 2986 замкнутых классов [1]. Оператор параметрического замыкания приводит к конечной классификации множество операций k-значной логики при любом k ($k \geqslant 2$) [1; 2; 10].

Добавление к конъюнкции других логических связок приводит к появлению всего лишь четырех новых операторов замыкания на множестве операций k-значной логики. Таковыми являются оператор позитивного замыкания (при добавлении дизъюнкции), импликативного замыкания (при добавлении импликации), оператор с полной системой логических связок (добавляется связка отрицание) и конъюнктивно-кванторный оператор замыкания. Подробно об этих расширениях и соответствующие ссылки можно посмотреть в работе [5].

В [7;8] идея параметрического замыкания была применена к множеству гиперопераций ранга 2. На этом множестве оператор параметрического замыкания приводит также к конечной классификации: множество всех гиперфункций разбивается на 13 замкнутых классов.

В [9] рассмотрено расширение параметрического замыкания — оператор позитивного замыкания на множестве мультиопераций ранга 2. Показано, что выразительные возможности этого замыкания оказываются достаточно сильными и приводят к двум классам эквивалентности.

В [4] исследовалось другое расширение оператора параметрического замыкания — оператор импликативного замыкания. При любом k ($k \geqslant 2$) этот оператор порождает конечную классификацию множества частичных операций, а все импликативно предполные классы образуют две серии.

Нами рассматривается импликативное замыкание на множестве мультиопераций, заданных на трехэлементном множестве. Трехэлементное множество служит своего рода «мостиком» для перехода от изучения мультиопераций, заданных на 2-элементном множестве, к мультиоперациям, заданным на произвольном конечном множестве. В представленной работе описаны все импликативно предполные множества.

Заметим, что в литературе, наряду с терминами «операция», «частичная операция», «гипероперация» и «мультиоперация», используются термины «функция», «частичная функция», «гиперфункция» и «мультифункция». Кроме того, для частичных операций используется также и термин «квазиоперация», который мы и будем использовать в настоящей работе.

1. Основные понятия и предварительные результаты

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Для целого положительного n отображение $f : E_k^n \to 2^{E_k}$ называется n-местной мультиоперацией ранга k. Множество всех мультиопераций ранга k обозначается как $\mathcal{M}_k$.

В множестве $\mathcal{M}_k$ выделяют подмножества операций ($\mathcal{O}_k$) и квазиопераций (частичных операций) ($\mathcal{O}_k^*$):

$$\mathcal{O}_k^{(n)} = \{f : |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_k^n\}, \ \mathcal{O}_k = \bigcup_n \mathcal{O}_k^{(n)},$$

$$\mathcal{O}_k^{(n)*} = \{f : |f(\tilde{\alpha})| \leqslant 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_k^n\}, \ \mathcal{O}_k^* = \bigcup_n \mathcal{O}_k^{(n)*},$$

через $|f(\tilde{\alpha})|$ здесь обозначена мощность значения f на наборе $\tilde{\alpha}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать определенные множества только при $k = 3$ и при этом опускать нижний индекс. Для удобства мы также не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Мультиоперации, которые на любом своем наборе принимают значение $\{0,1,2\}$ и $\varnothing$, будем обозначать как «E_3» и «$*$» соответственно. Местность таких операций зависит от контекста.

Суперпозиция с внешней n-местной мультиоперацией f_0 и внутренними m-местными мультиоперациями $f_1,\ldots,f_n$ определяет m-местную мультиоперацию $s(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ следующим образом:
для набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in E_3^m$ по определению[1]

$$s(f_0,f_1,\ldots,f_n)(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\bigcup_{\substack{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\\ i\in\{1,\ldots,n\}}} f_0(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

Заметим, что в соответствии с этим определением, если значение какой-нибудь из внутренних мультиопераций на наборе $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ равно $\varnothing$, то и значение суперпозиции равно $\varnothing$.

Далее мультиоперации будем рассматривать с точностью до фиктивных аргументов. Переменные для обозначения аргументов используем обычным образом, как и понятие «мультиоперация-переменная». Для одноместной мультиоперации $f(x)$ будем использовать запись в виде вектора $(f(0),f(1),f(2))$. Обычным образом используем понятие замыкания относительно суперпозиции множества мультиопераций Q, для которого будем использовать обозначение $[Q]$.

Пусть A — некоторое множество мультиопераций. Определим понятие «мультиоперация над A»:

- если $f\in A$, то f — мультиоперация над A;
- если f — мультиоперация над A, то операция, полученная из f перестановкой или отождествлением аргументов, является мультиоперацией над A;
- если f_0 — n-местная, f_i — m-местные мультиоперации над A или мультиоперации-переменные ($i\in\{1,\ldots,n\}$), то мультиоперация $s(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ есть мультиоперация над A.

В [7; 8] определен оператор параметрического замыкания на множестве гиперопераций. Перенесем это определение на множество мультиопераций.

Символами языка Par являются переменные $x_1,x_2,\ldots$, символы f_i (используемые для обозначения мультиопераций), символ включения $\subseteq$, логическая связка конъюнкция &, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки, запятая.

При параметрическом замыкании используются понятия «терм t языка Par» и «множество переменных терма t» — $FV(t)$:

- любая переменная x является термом, $FV(t)=\{x\}$;

[1] Определение суперпозиции мультиопераций позволяет находить значение мультиопераций не только на двоичных наборах, но и на наборах, составленных из подмножеств множества E_3 [6].

- если $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ — переменные (не обязательно различные), а f — символ n-местной мультиоперации, то $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ есть терм, $FV(t) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$;
- если $t_1, \dots, t_n$ — термы, f — символ n-местной мультиоперации, то $s(f, t_1, \dots, t_n)$ есть терм, $FV(t) = \bigcup\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} FV(t_i)$.

Значение терма t на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_3^m$ значений переменных из множества $FV(t)$ обозначается как $t(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и определяется следующим образом:

– если t есть переменная x, то значение t совпадает со значением x;
– если терм t есть $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, то $t(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = f(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$;
– если терм t есть $s(f, t_1, \dots, t_n)$, то

$$t(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\substack{\beta_i \in t_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ i \in \{1,\dots,n\}}} f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Всякий терм t определяет некоторую мультиоперацию.

Понятие «формула языка Par» (параметрическая формула) вводится следующим образом. Если t_1, t_2 — термы, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой. Остальные формулы определяются так: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $\Phi_1 \,\&\, \Phi_2, (\exists x_i)\Phi_1$ — формула.

Пусть $Q \subseteq \mathcal{M}$, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$, $\Phi(x_1, \dots x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1, \dots x_n, y$, все символы мультиопераций которой являются обозначениями мультиопераций над Q.

Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает мультиоперацию f через операции множества Q, если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ совпадают, в этом случае будем также говорить, что формула определяет отношение. Множество всех мультиопераций, параметрически выразимых через мультиоперации множества Q, назовем параметрическим замыканием множества Q и обозначим $\mathrm{Par}[Q]$. Множество Q, которое совпадает со своим параметрическим замыканием, называется параметрически замкнутым классом.

Для оператора импликативного замыкания в язык Par добавляется логическая связка импликация $(\to)$. Импликативное замыкание множества Q обозначим как $\mathrm{Imp}[Q]$. Так как оператор импликативного замыкания является расширением оператора параметрического замыкания, то всякий импликативно замкнутый класс параметрически замкнут. Логическая связка дизъюнкция выражается через импликацию, поэтому наряду с конъюнкцией и импликацией будем использовать и дизъюнкцию. Множество Q называется импликативно полным, если его импликативное замыкание совпадает с множеством $\mathcal{M}$, и импликативно предполным, если оно не является полным, но становится таковым при добавлении любой мультиоперации, не принадлежащей Q.

Мультиоперации, возвращающие только непустые подмножества, называются гипероперациями. В [8] доказано, что параметрически замкнутые классы гиперопераций ранга 2 замкнуты относительно суперпозиции. Так как при этом в доказательстве нигде не используется ранг, а переменные в формулах не могут принимать значение $\varnothing$, то доказательство переносится и на мультиоперации. Поэтому справедлива

Лемма 1. *Любой параметрически замкнутый класс мультиопераций замкнут относительно операции суперпозиции.*

Лемма 2. *Мультиоперации* $f_1(x) = (012)$, $f_2(x) = (E_3E_3E_3)$, $f_3(x) = (\varnothing\varnothing\varnothing)$ *содержатся в каждом параметрически замкнутом классе.*

Доказательство. Эти операции задаются формулами $y \subseteq x$, $x \subseteq x \& y \subseteq y$ и $(E_3E_3E_3)(x) \subseteq y$ соответственно. $\square$

Лемма 3. *Пусть Q множество мультиопераций. Класс* $\mathrm{Imp}[Q]$ *замкнут относительно операции отрицания.*

Доказательство. Отношение $t_1 \not\subseteq t_2$ задается импликативной формулой

$$\exists y\Big(y \subseteq t_1 \& (y \subseteq t_2 \to y \subseteq \varnothing)\Big).$$

Отношение $x \neq y$ задается формулой $x \not\subseteq y \vee y \not\subseteq x$.

Перенос операции отрицания через конъюнкцию и импликацию осуществляется как обычно.

Формула $\neg\exists\Phi(x,\tilde{y})$ будет истинной тогда и только тогда, когда найдутся три различных элемента, при подстановке которых в $\neg\Phi(x,\tilde{y})$ вместо переменной x получим истинное утверждение, т. е. $\neg\exists\Phi(x,\tilde{y})$ эквивалентна

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \Big(\underset{1\leqslant i<j\leqslant 3}{\&}(x_i \neq x_j) \& (\underset{1\leqslant i\leqslant 3}{\&} \neg\Phi(x_i,\tilde{y}))\Big). \qquad \square$$

Следствие 1. *Формула $y \not\subseteq x$ импликативно выражает мультиоперацию* $u(x) = (\{1,2\}\{0,2\}\{0,1\})$.

Замечание 1. Из леммы 3 следует, что наряду с конъюнкцией и импликацией в построениях формул можно использовать и отрицание. А в таком случае можно воспользоваться тем, как показано в [3], что каждый замкнутый класс в множестве $\mathcal{O}_k$ имеет вид S_G, где G — группа перестановок на E_k, и каждый предполный класс порождается подстановкой, разлагающейся в произведение циклов одной и той же простой длины и, возможно, циклов длины один.

Лемма 4. *Для любого множества $Q \subseteq \mathcal{O}$ справедливо: если $[Q] = \mathcal{O}$, то* $\mathrm{Par}[Q] = \mathcal{M}$.

Доказательство. На множестве E_3 зададим порядок: $0 < 1 < 2$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$. По f построим три операции f_0, f_1, f_2 из $\mathcal{O}$ так, как это представлено в таблице ($(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$, $\{a, b, c\} \subseteq E_3$):

$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	$f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	$f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	$f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$\varnothing$	1	0	0
a	a	a	a
$\{a, b\},\ a < b$	a	b	b
$\{a, b, c\},\ a < b < c$	a	b	c

В множестве $\mathcal{O}$ возьмем две операции $g_1(x_1, x_2, x_3)$ и $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$: $g_1(1, 0, 0) = 0$, а на остальных наборах эта операция возвращает 1. $g_2(y, a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $y = a_1$, или $y = a_2$, или $y = a_3$, на остальных наборах эта операция возвращает 0.

Формула

$$\Phi(y, x_1, \ldots, x_n) \equiv g_1(f_0, f_1, f_2) \subseteq 1 \,\&\, g_2(y, f_0, f_1, f_2) \subseteq 1$$

истинна тогда и только тогда, когда справедливо $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

2. Основной результат

Пусть π — подстановка на E_3, набор $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E_3^n$. Назовем π-орбитой набора $\tilde{a}$ — множество наборов вида $(\pi^l(a_1), \ldots, \pi^l(a_n))$, где $l \in \{1, 2, 3\}$. Будем также считать, что $\pi(\varnothing) = \varnothing$.

Через S_π ($S_\pi^{\mathcal{O}}$, $S_\pi^{\mathcal{O}^*}$) обозначим множество всех мультиопераций (операций, квазиопераций), для которых π — эндоморфизм, т. е.

$$\pi f(x_1, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).$$

Заметим, что справедливы включения: $S_\pi^{\mathcal{O}} \subset S_\pi^{\mathcal{O}^*} \subset S_\pi$.

Следующая лемма является достаточно очевидной.

Лемма 5. *Для любой подстановки π на множестве E_3 множество S_π является импликативно замкнутым классом.*

Теорема 1. *Пусть π — нетождественная подстановка на множестве E_3. Тогда множество S_π является предполным.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ не принадлежит S_π. Это означает, что существует набор $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, для которого

$$\pi f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)).$$

Обозначим $f(a_1, \ldots, a_n)$ через $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Орбиты всех членов набора $(a_1, \ldots, a_n)$ одноэлементны. Тогда соответствующие мультиоперации-константы принадлежат классу S_π, что позволяет получить константу $f_1(x) \equiv B$. При этом $\pi(B) \neq B$.

Если B одноэлементное множество, то $[\{f_1\} \cup S_\pi^{\mathcal{O}}] = \mathcal{O}$, а значит импликативное замыкание множества $\{f_1\} \cup S_\pi$ есть $\mathcal{M}$.

Пусть B неодноэлементное множество. Очевидно, что $B \neq E_3$.

Рассмотрим только случай $B = \{0, 1\}$. В этом случае мощность орбиты элемента 2 не равна единице.

Формула $\Phi(x_1, x_2, y) \equiv B(x_1, x_2) \subseteq u(y)$ порождает константу, равную 2 и не принадлежащую $S_\pi^{\mathcal{O}}$.

Случай 2. В наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ есть элемент, орбита которого содержит не менее 2 элементов.

Если a — неподвижный элемент подстановки π, то константа (aaa) и одноместные мультиоперации $(0, a_i, \pi(a_i))$ при $a = 0$, $(a_i, 1, \pi(a_i))$ при $a = 1$, $(a_i, \pi(a_i), 2)$ при $a = 2$, очевидно, принадлежат S_π. Если же в подстановке нет неподвижных точек, то S_π принадлежат одноместные мультиоперации $(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i))$ $(a_i \in E_3)$.

Подставив эти мультиоперации в f, получим одноместную мультиоперацию $f_1(x)$ вида (ABC), (BAC) или (BCA), где B и C подмножества E_3, которые f возвращает на наборах $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$ соответственно.

Пусть подстановка $\pi = (0)(12)$, в этом случае $f_1(x) = (ABC)$, где B и C не могут одновременно быть равными $\varnothing$, 0, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Если среди B и C есть $\varnothing$, то формула $x \subseteq f_1(y)$ позволяет получить мультиоперацию $f_3(x)$ такую, что $|f_3(0) \cup f_3(1) \cup f_3(2)| \leqslant 2$. Суперпозиция $s(f_3, E_3)$ порождает мультиоперацию-константу $f_4 \equiv D$, не принадлежащую S_π. Если $D = \{a, b\}$, то формула $f_4 \subseteq u(y)$ порождает константу из $\mathcal{O}$, не принадлежащую S_π.

2. Если A, B, C — одноэлементные множества, то $f_1(x)$ не принадлежит $S_\pi^{\mathcal{O}}$.

3. Если A, B, C не удовлетворяют случаю 2, но среди B и C есть одноэлементные подмножества и нет $\varnothing$, то формула $f_1(x) \subseteq y$ порождает квазиоперацию $f_2(x)$, не принадлежащую S_π. При этом $f_2(x)$ либо не принадлежит $S_\pi^{\mathcal{O}}$, либо удовлетворяет условию 1, либо суперпозиция $s(f_2, E_3)$ порождает мультиоперацию-константу f_4 из случая 1.

4. Если среди B и C нет одноэлементных подмножеств, то формула $u(x) \subseteq f_1(y)$ сводит задачу к предыдущим случаям.

Случаи, когда подстановка π имеет вид $\pi = (1)(02)$ или $\pi = (2)(01)$, рассматриваются аналогично, а случай $\pi = (012)$ можно свести к случаю $f_1(x) = (ABC)$. □

Для классов S_π введем обозначения в соответствии с имеющимися в подстановке циклами, не указывая цикл длины 1: S_{01}, S_{02}, S_{12}, S_{012}.

Теорема 2. *Классы S_{01}, S_{02}, S_{12}, S_{012} попарно различны.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из таблицы

	S_{01}	S_{02}	S_{12}	S_{012}
S_{01}	$\bullet$	2	2	2
S_{02}	1	$\bullet$	1	1
S_{12}	0	0	$\bullet$	0
S_{012}	f	f	f	$\bullet$

.

В таблице приведены примеры операций, принадлежащих классу из строки и не принадлежащих классу из столбца, $f(x) = (120)$. □

Теорема 3. *Класс операций S_π^O импликативно порождает класс S_π.*

Доказательство. Пусть мультиоперация $f(x_1, \ldots, x_n) \in S_\pi$. По подстановке π все наборы из E_3^n можно разбить на непересекающиеся орбиты. Очевидно, что f однозначно определяется своими значениями на наборах, являющихся представителями орбит.

Пусть $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_l$ — представители всех орбит, для $i \in \{1, \ldots, l\}$ выполняется $f(\tilde{a}_i) = B_i = \{b_i^1, \ldots, b_i^{s_i}\}$ и $max(|B_1|, \ldots, |B_l|) = r$.

По f построим мультиоперации $f_1, \ldots, f_r$: для $j \in \{1, \ldots r\}$ справедливо

$$f_j(\tilde{a}_i) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } B_i = \varnothing; \\ b_i^j, \text{ если } j \leqslant s_i; \\ b_i^{s_i} \text{ если } j > s_i. \end{cases}$$

Получили r квазиопераций из множества S_π. Каждую из них можно получить из операций, принадлежащих $S_\pi^{\mathcal{O}}$ [4, лемма 7].

Формула

$$\Big(f_1(\tilde{x}) \nsubseteq f_2(\tilde{x}) \to y \subseteq f_1(\tilde{x}) \vee y \subseteq f_2(\tilde{x})\Big)\& \\ \&\Big(f_1(\tilde{x}) \subseteq f_2(\tilde{x}) \to y \subseteq f_1(\tilde{x})\Big) \quad (2.1)$$

задает операцию f_{12}, которая на наборах $\tilde{a}_i$ принимает значения $\{b_i^1, b_i^2\}$.

Подставив в 2.1 операцию f_{12} вместо f_1 и операцию f_3 вместо f_2, получим операцию f_{123}. Повторив этот процесс $r-1$ раз, получим операцию $f_{1\ldots r}$, которая совпадает с f. □

Теорема 4. *Все импликативно предполные классы в M являются классами вида S_π, где π — нетождественная подстановка на E_3.*

Доказательство. Доказательство следует из теорем 1, 2, 3 и замечания 1. Действительно, с одной стороны, классы S_π являются предполными. С другой стороны, если Q — некоторый предполный класс, то множество операций $Q^{\mathcal{O}}$ этого класса импликативно замкнуто, поэтому является классом вида $S_\pi^{\mathcal{O}}$. А каждый такой класс порождает класс S_π. И значит $S_\pi \subseteq Q$. $\square$

3. Заключение

В работе получены первые результаты в исследовании представлений мультиопераций, заданных на произвольных конечных множествах логико-формальными средствами. Следующим шагом мы видим исследование импликативного и параметрического замыканий на множестве мультиопераций произвольного ранга.

Список источников

1. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости операций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, вып. 4. С. 397–416.
2. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М. : Наука, 1979. С. 5–33.
3. Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4, С. 110–126. https://doi.org/10.4213/dm400
4. Марченков С. С. О действии оператора импликативного замыкания на множестве частичных операций многозначной логики // Дискретная математика. 2020. Т. 32, вып. 1, С. 60–73 https://doi.org/10.4213/dm1574
5. Марченков С. С. Логические расширения оператора параметрического замыкания // Дискретная математика. 2022. Т. 34, вып. 3. С. 52–62. https://doi.org/10.4213/dm1711
6. Пантелеев В. И., Тагласов Э. С. ES_I-замыкание мультиопераций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов. Интеллектуальные системы // Теория и приложения. 2021. Т. 25, вып. 2. С. 55–80.
7. Рябец Л. В. Операторы параметрического и позитивного замыкания на множестве гиперфункций ранга 2 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20, вып. 3. С. 79–84.
8. Рябец Л. В. Параметрически замкнутые классы гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 17. С. 46–61.
9. Шаранхаев И. К. О позитивной полноте и позитивно замкнутых множествах мультифункций ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20, № 2. С. 1313–1319. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.079
10. Barris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 101, N 3. P. 427–430. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1987-0908642-5

References

1. Danilchenko A.F. Parametric expressibility of functions of three-valued logic. *Algebra and Logic*, 1977, vol. 16, iss. 4, pp. 266–280. https://doi.org/10.1007/BF01669278 (in Russian)
2. Kuznecov A.V. Means for detection of nondeducibility and inexpressibility. *Logical Inference*, Moscow, Nauka Publ., 1979, pp. 5–33.
3. Marchenkov S.S. On the expressibility of functions of many-valued logic in some logical-functional classes. *Discrete Math. Appl.*, 1999, vol. 9, no. 6, pp. 110–126. https://doi.org/10.1515/dma.1999.9.6.563 (in Russian)
4. Marchenkov S.S. On the action of the implicative closure operator on the set of partial functions of the multivalued logic. *Discrete Math. Appl.*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 155–164 https://doi.org/10.1515/dma-2021-0014 (in Russian)
5. Marchenkov S. S. Logical extensions of the parametric closure operator. *Discrete Math. Appl.*, 2023, vol. 33, no. 6, pp. 371–379. https://doi.org/10.1515/dma-2023-0033 (in Russian)
6. Panteleev V.I., Taglasov E.S. ES_I-closure of rank 2 multifunctions: completeness criterion, classification and types of bases. *Intelligent systems. Theory and applications*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 55–80. (in Russian)
7. Riabets L.V. Parametric and positive closure operators on the set of rank 2 hyperfunctions. *Intelligent systems. Theory and applications,* 2016, vol. 20, no. 3, pp. 79–84.
8. Riabets L.V. Parametric Closed Classes of Hyperfunctions on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 17, pp. 46–61. (in Russian)
9. Sharankhaev I.K. On positive completeness and positively closed sets of multifunctions of rank 2. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 2. pp. 1313–1319. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.079 (in Russian)
10. Barris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1987, vol. 101, no. 3, pp. 427–430. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1987-0908642-5

Об авторах

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, д-р физ.-мат. наук, доц., Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Улан-Удэ, 670000, Российская Федерация; Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, vl.panteleyev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

About the authors

Vladimir I. Panteleev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 670000, Russian Federation; Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, vl.panteleyev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

Поступила в редакцию / Received 14.10.2024
Поступила после рецензирования / Revised 29.11.2024
Принята к публикации / Accepted 04.12.2024