Серия «Математика»
2025. Т. 51. С. 101—115

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 512.542.3
MSC 20D15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.101

О регулярности силовских p-подгрупп групп Шевалле типов F_4, E_6 над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$

С. Г. Колесников[1✉], А. И. Половинкина [1]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ sklsnkv@mail.ru

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия регулярности силовской p-подгруппы P группы Шевалле типа F_4 или E_6, определенной над кольцом классов вычетов целых чисел по модулю p^m, когда простое число p отлично от $37, 41, 43, 47$. Для перечисленных значений p группа P регулярна, если экспонента m не превосходит числа 3; при m больше, чем 3, ответ остается неизвестным.

Ключевые слова: регулярная p-группа, силовская подгруппа, группа Шевалле

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Ссылка для цитирования: Колесников С. Г., Половинкина А. И. О регулярности силовских p-подгрупп групп Шевалле типов F_4, E_6 над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 101–115.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.101

Research article

On Regularity of Sylow p-Subgroups of the Chevalley Group of Types F_4, E_6 Over the Ring $\mathbb{Z}_{p^m}$

Sergey G. Kolesnikov[1✉], Anna I. Polovinkina[1]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ sklsnkv@mail.ru

Abstract. In this paper, we find necessary and sufficient conditions for the regularity of the Sylow p-subgroup P of the Chevalley group of types F_4 or E_6 defined over the ring of integers modulo p^m when p is a prime different from $37, 41, 43, 47$. For the listed values of p, the group P is regular if the exponent m does not exceed 3; for m greater than 3, the answer remains unknown.

Keywords: regular p-group, Sylow subgroup, Chevalley group

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

For citation: Kolesnikov S. G., Poloivnkina A. I. On Regularity of Sylow p-Subgroups of the Chevalley Group of Types F_4, E_6 Over the Ring $\mathbb{Z}_{p^m}$. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 101–115. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.101

1. Введение

Конечная p-группа G называется регулярной, если для любых $A, B \in G$ и для любого натурального числа $n = p^\alpha$ имеет место равенство $(AB)^n = A^n B^n C_1^n \dots C_k^n$, где $C_1, \dots, C_k$ — подходящие элементы коммутанта группы, порожденной A и B. В [2; 7] и [3] рассматривался следующий аналог вопроса 8.3 Б. А. Ф. Верфрица из [9] об описании регулярных силовских p-подгрупп общей линейной группы, определенной над кольцом вычетов целых чисел по p-примарному модулю:

пусть Φ — приведенная неразложимая система корней нормального типа, $\mathbb{Z}_{p^m}$ — кольцо классов вычетов целых чисел по модулю p^m, m — натуральное число, $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ — силовская p-подгруппа элементарной группы Шевалле типа Φ над $\mathbb{Z}_{p^m}$. Для каких Φ, p и m группа $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна?

В [3] была установлена регулярность группы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$, когда $|\Phi| + |\Pi(\Phi)| < p$. Позже, в [7] сформулированый вопрос был полностью решен для групп типа G_2. Наконец, в [2] для Φ типа A_n, B_n, C_n, D_n было доказано, что при $m = 1, 2$ группа $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна тогда и только тогда, когда $mh(\Phi) - 1 < p$ (здесь и далее $h(\Phi)$ — число Кокстера системы Φ). Напомним, что, согласно [4], ступень нильпотентности группы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$, $\Phi \neq G_2$, равна $mh(\Phi) - 1$, кроме случаев $p = 2$ и $\Phi = B_n, C_n, F_4$. Так как при $p = 2$ группа $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ неабелева (кроме случая $\Phi = A_1$ и $m = 1$), то она регулярна, если $mh(\Phi) - 1 < p$.

В настоящей работе исследуется сформулированный выше вопрос для групп Шевалле, ассоциированных с системами корней исключительных типов F_4 и E_6. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть Φ — система корней типа F_4 или E_6, p — простое число и $m \in \{1, 2, 3\}$. Силовская p-подгруппа элементарной группы Шевалле типа Φ над кольцом вычетов целых чисел $\mathbb{Z}_{p^m}$ регулярна тогда и только тогда, когда $mh(\Phi) - 1 < p$.*

Свойство регулярности наследуется на подгруппы и фактор группы. Поэтому из теоремы 1 следует, что группа $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ для $\Phi = F_4, E_6$ не является регулярной, когда $h(\Phi) \geqslant p+1$ и $m \geqslant 1$ или $h(\Phi) \geqslant (p+1)/2$ и $m \geqslant 2$, или $h(\Phi) \geqslant (p+1)/3$ и $m \geqslant 3$. Таким образом, в настоящее время вопрос о регулярности рассматриваемых групп остается открытым лишь в следующих случаях: $p \in \{37, 41, 43, 47\}$ и $m > 3$.

Поскольку группа Шевалле над полем $GF(p^n)$ содержит в качестве подгруппы группу Шевалле над простым подполем, из сказанного выше и теоремы 1 также вытекает

Следствие 1. *Силовская p-подгруппа простой группы Шевалле $F_4(p^n)$ или $E_6(p^n)$ регулярна тогда и только тогда, когда $p \geqslant 13$.*

2. Вспомогательные результаты

Группа $E\Phi(R)$ и ее подгруппы. Зафиксируем ассоциативно-коммутативное кольцо R с единицей 1 и приведенную неразложимую систему корней Φ. Через $E\Phi(R)$ обозначим элементарную группу Шевалле типа Φ над R, которая по определению порождается корневыми элементами:

$$E\Phi(R) = \langle x_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in R \rangle.$$

Подгруппа, порожденная корневыми элементами, соответствующими положительным корням r, обозначается через $U\Phi(R)$:

$$U\Phi(R) = \langle x_r(t) \mid r \in \Phi^+,\ t \in R \rangle,$$

и называется унипотентной подгруппой. Зафиксировав в Φ^+ определенный порядок, мы можем однозначно разложить произвольный элемент $g \in U\Phi(R)$ в произведение корневых элементов $x_r(t_r)$, где $r \in \Phi^+$, $t_r \in R$, в соответствии с выбранным порядком.

Пусть J — квазирегулярный идеал в R. С натуральными степенями $J^k = \langle a^k \mid a \in J \rangle$ идеала J свяжем серию подгрупп

$$C\Phi(J^k) = \langle x_r(t),\ h_r(1+t) \mid r \in \Phi,\ t \in J^k \rangle,$$

которые называются конгруэнц-подгруппами по модулю идеала J^k. Подгруппы $C\Phi(J^k)$ являются ковровыми в смысле [4] и нормальными в $E\Phi(R)$. Если в системе корней Φ зафиксирован определенный порядок, то всякий элемент $g \in C\Phi(J^k)$ однозначно разложим в произведение корневых элементов $x_r(t_r)$, где $r \in \Phi$, $t_r \in J^k$, следующих в выбранном порядке, и диагональных элементов $h_r(1+u_r)$, где $r \in \Pi(\Phi)$, $u_r \in J^k$, соответствующих фундаментальным корням r.

Пусть $R = \mathbb{Z}_{p^m}$. Тогда идеал $J = \langle p \rangle$ является квазирегулярным в R и, согласно [4], произведение подгрупп $U\Phi(R) \cdot C\Phi(J)$ является силовской p-подгруппой в $E\Phi(R)$. Таким образом, $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m}) \simeq U\Phi(R)\cdot C\Phi(J)$ и мы будем отождествлять эти подгруппы.

Коммутаторное строение групп $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ и $C\Phi(J^k)$. Следуя [4], на декартовом произведении $\Phi\cup\{0\}\times\mathbb{N}$ определим целозначные функции $f(r,k)$ и $g(r,k)$, полагая $g(r,k)=k$ и $f(r,k)=-\left[(\mathrm{ht}(r)-k)/h(\Phi)\right]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, ht — функция высоты корня и $\mathrm{ht}(0)=0$. Очевидно, что подгруппа $C\Phi(J^k)$ совпадает с подгруппой

$$\langle x_r(t), h_r(1+u)\mid r\in\Phi,\ t,u\in J^{g(r,k)}\rangle,$$

а группа $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ с первой подгруппой серии $(k=1,2,\ldots)$

$$G^{(k)}=\langle x_r(t), h_s(1+u)\mid r\in\Phi, s\in\Pi(\Phi),\ t\in J^{f(r,k)}, u\in J^{f(0,k)}\rangle.$$

В [4] доказано, что если число $p(\Phi)!$, где $p(\Phi)=\max_{r,s\in\Phi}\{2(r,s)/(r,r)\}$, взаимно просто с p, то ряд $G^{(1)}\supset G^{(2)}\supset\ldots\supset G^{(mh)}=\langle 1\rangle$ является нижним центральным рядом группы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ и для любых натуральных чисел i,j имеют место равенства

$$[C\Phi(J^i), C\Phi(J^j)]=C\Phi(J^{i+j}).$$

Напомним, что в $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ справедливы соотношения $(r,s\in\Phi)$:

1) *аддитивность корневых и мультипликативность диагональных элементов:*

$$x_r(t)x_r(u)=x_r(t+u),\qquad t,u\in J^{f(r,1)};$$

$$h_r(t)h_r(u)=h_r(tu),\qquad t,u\in 1+J^{f(0,1)};$$

2) *соотношения между корневыми и диагональными элементами:*

$$[x_r(t),h_s(u)]=x_r(t(u^{(r,h_s)}-1)),\qquad t\in J^{f(r,1)}, u\in J^{f(0,1)},$$

где $h_s=2s/(s,s)$ и $(\ ,\ )$ — скалярное произведение;

3) *коммутаторная формула Шевалле:*

$$[x_s(u),x_r(t)]=\prod_{\substack{ir+js\in\Phi,\\ i,j>0}} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),\quad t\in J^{f(r,1)}, u\in J^{f(s,1)},$$

где числа $C_{ij,rs}$ выражаются через структурные константы комплексной простой алгебры Ли типа Φ;

4) *соотношения между противоположными корневыми элементами:* $(c=1-tu)$

$$[x_r(t),x_{-r}(u)]=x_r(c^{-1}t^2u)h_r(c)x_{-r}(-c^{-1}tu^2),\quad t\in J^{f(r,1)}, u\in J^{f(-r,1)}.$$

Из приведенных результатов, используя собирательную формулу, нетрудно выводится следующая

Лемма 1. *Подгруппа* $\left[G^{(k)}\right]^p$ *группы* $G^{(1)} = P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ *содержится в* $G^{(k+p-1)}$, *если* $p < h(\Phi)$, *иначе она содержится в* $G^{(k+h(\Phi))}$.

Здесь и далее для произвольной подгруппы H группы G и произвольного натурального числа n считаем $H^n = \langle h^n \mid h \in H\rangle$.

Коммутаторное исчисление в $E\Phi(R)$. Как обычно, через $[B, A]$ обозначаем коммутатор элементов B и A, равный $B^{-1}A^{-1}BA$. По определению полагаем $[B,\, {}_0A] = B$ и $[B,\, {}_wA] = [[B,\, {}_{w-1}A], A]$ для любого целого $w \geqslant 1$. Первая из следующих трех теорем доказана в [2], две другие получаются небольшой модификацией доказательств аналогичных теорем из [2].

Теорема 2. *Пусть* R *— ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,* Φ *— приведенная неразложимая система корней,* $s_1, \ldots, s_l \in \Phi^+$ *— различные корни высоты* m, $\Delta = \{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq \Pi(\Phi)$. *Положим* $A = x_{r_1}(1)\ldots x_{r_k}(1)$, $B = x_{s_1}(t_1)\ldots x_{s_l}(t_l)$, *где* $t_1, \ldots, t_l \in R$. *Тогда для любого натурального числа* w *имеем*

$$[B,\, {}_wA] = \prod_{\mathrm{ht}(r)=m+w} x_r\left(\sum_{j=1}^{l} t_j K^{\Delta}_{r,s_j}\right)\ldots, \tag{2.1}$$

где $K^{\Delta}_{r,s} = \sum N_{s,q_1}N_{s+q_1,q_2}\ldots N_{s+q_1+\cdots+q_{w-1},q_w}$ *и суммирование ведется по всем возможным кортежам* $(q_1, \ldots, q_w)$ *длины* w, *таким, что* $q_1, \ldots, q_w \in \Delta$ *и для любого целого* i, $1 \leqslant i \leqslant w$, *сумма* $q_1 + \ldots + q_i$ *лежит в* Φ.

В формуле (2.1) многоточием обозначено произведение корневых элементов, отвечающих корням высоты больше, чем $m + w$.

Теорема 3. *Пусть* R *— ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,* $J = \langle t_1, \ldots, t_l\rangle \subset R$ *— квазирегулярный идеал; пусть также* Φ *— приведенная неразложимая система корней,* $s_1, \ldots, s_l \in \Phi^-$ *— различные корни высоты* m, $\Delta = \{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq \Pi(\Phi)$. *Положим* $A = x_{r_1}(1)\ldots x_{r_k}(1)$, $B = x_{s_1}(t_1)\ldots x_{s_l}(t_l)$. *Тогда для любого натурального числа* w *такого, что* $m + w < 0$, *имеем*

$$[B,\, {}_wA] = \prod_{\mathrm{ht}(r)=m+w} x_r\left(\sum_{j=1}^{l} t_j K^{\Delta}_{r,s_j}\right)\ldots \pmod{C\Phi(J^2)}. \tag{2.2}$$

В формуле (2.2) многоточием обозначено произведение корневых элементов, отвечающих корням высоты большей, чем $m + w$, и диагональных элементов. Заметим, что коммутаторы

$$[B,\, {}_wA], w = 1, \ldots, -m-1,$$

лежат в подгруппе $C\Phi(J)$ нормальной в $C\Phi(J^2)$ и, как сказано выше, все элементы из $C\Phi(J)$ допускают однозначное разложение в произведение корневых и диагональных элементов.

Теорема 4. *Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, $t \in R$, а идеал $J = tR$ квазирегулярен. Пусть также Φ — приведенная неразложимая система корней ранга n и числом Кокстера $h = h(\Phi)$, $\Pi(\Phi) = \{r_1, \ldots, r_n\}$, r_0 — корень максимальной высоты. Положим $A = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_n}(1)$ и $B = x_{-r_0}(t)$. Тогда для любого целого w, такого, что $h \leqslant w \leqslant 2h - 2$, имеем*

$$[B, {}_wA] = \prod_{\mathrm{ht}(r)=1-h+w} x_r\left(-t\rho(\Phi, r)\right) \ldots \pmod{C\Phi(J^2)}, \tag{2.3}$$

где $\rho(\Phi, r) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (h_{r_i}, r_j) K_{-r_i,-r_0} K_{r,r_j}$.

В формуле (2.3) многоточием обозначено произведение корневых элементов, отвечающих корням высоты больше, чем $m + w$.

Вычисление чисел $K^{\Delta}_{r,s}$. На множестве положительных корней определим ориентированный граф $G(\Phi^+, \Delta)$, где, как и выше, $\Delta \subseteq \Pi(\Phi)$. Вершинами $G(\Phi^+, \Delta)$ являются корни множества Φ^+. Две вершины s и r соединяем направленным от s к r ребром в том и только том случае, если существует такой фундаментальный корень $q \in \Delta$, что $r = s + q$. С графом $G(\Phi^+, \Delta)$ свяжем матрицу $N_+(\Delta) = (n_{sr})$ порядка $|\Phi^+| \times |\Phi^+|$, элемент n_{sr} которой равен константе $N_{s,r-s}$, если существует ребро (s, r) в $G(\Phi^+, \Delta)$, и нулю в противном случае. Аналогичным образом определяются граф $G(\Phi^-, \Delta)$ и матрица $N_-(\Delta)$. Справедлива

Теорема 5. *Пусть $r, s \in \Phi^+$ ($r, s \in \Phi^-$), $\Delta \subseteq \Pi(\Phi)$, причем $w = \mathrm{ht}(r) - \mathrm{ht}(s) > 0$. Тогда число $K^{\Delta}_{r,s}$ равно элементу, стоящему на пересечении строки s и столбца r, матрицы $(N_+(\Delta))^w$ (соответственно $(N_-(\Delta))^w$).*

Доказательство. Разложим $N_+(\Delta)$ в сумму элементарных матриц: $N_+(\Delta) = \sum_{r',s' \in \Phi^+} n_{r',s'} e_{r',s'}$. Напомним, что у $e_{r',s'}$ на месте (r', s') стоит единица и нули — на остальных местах. Из формулы умножения элементарных матриц $e_{r',s'} e_{p',q'} = \delta_{s',p'} e_{r',q'}$, где $\delta_{s',p'}$ — символ Кронекера, следует, что элемент, стоящий на пересечении строки s и столбца r в $(N_+(\Delta))^w$, равен

$$K = \sum n_{s,r_1} n_{r_1,r_2} \ldots n_{r_{w-1},r_w}, \qquad r_w = r,$$

где суммирование ведется по всем корням $r_1, \ldots, r_{w-1} \in \Phi^+$. Однако произведение $n_{s,r_1} n_{r_1,r_2} \ldots n_{r_{w-1},r}$ отлично от нуля в том и только том случае, если все его сомножители отличны от нуля. Следовательно, $r_1 -$

$s = q_1 \in \Delta, \dots, r - r_{w-1} = q_{w-1} \in \Delta$, и поэтому для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant w$, сумма $s + q_1 + \dots + q_i = r_i$ является корнем. Значит, $K = K^{\Delta}_{r,s}$. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. □

Условия регулярности. Как правило, при исследовании конечной p-группы G на регулярность используется следующий критерий [5, теорема 12.4.2]: G регулярна тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in G$ существует элемент $C \in \langle A, B\rangle'$ такой, что $(AB)^p = A^p B^p C^p$. Помимо него, нам также потребуется доказанная в [2]

Теорема 6. *Пусть G — регулярная p-группа, $p > 2$, и $A, B \in G$. Предположим, что всякий коммутатор от A и B : 1) имеющий более двух вхождений B, равен 1, 2) веса больше, чем $p-1$, имеет порядок не больше, чем p. Тогда существует элемент $D \in \langle A, B\rangle'$ такой, что*

$$D^{-p}[B, {}_{p-1}A]\,[B, {}_{p-2}A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} \,[[B, {}_{p-2-i}A], [B, {}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \in G^{(p+1)}. \tag{2.4}$$

Очевидно, что если найдутся такие $A, B \in G$, что $B^{-p}A^{-p}(AB)^p \notin [\langle A, B\rangle']^p$, или для любого $D \in \langle A, B\rangle'$ произведение (2.4) не лежит в $G^{(p+1)}$, то группа G нерегулярна.

3. Доказательство теоремы 1

Всюду ниже мы используем представление систем корней F_4 и E_6 из [1, таблицы V, VIII]. В частности, r_1, r_2, r_3, r_4 — фундаментальные корни F_4, а $r_1, \dots, r_6$ — фундаментальные корни E_6; r_0 — корень максимальной высоты. Также в целях экономии места будем использовать обозначение $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ для корня $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4$ из F_4 и аналогичные обозначения для корней из E_6.

При вычислении коммутаторов в группе Шевалле мы полагаем равными единице знаки всех структурных констант соответствующей комплексной простой алгебры Ли, отвечающих экстраспециальным парам корней. Значения всех констант можно найти в [8] и [10].

Случай $m = 1$. Группы $PF_4(\mathbb{Z}_2)$ и $PE_6(\mathbb{Z}_2)$ неабелевы, а значит, и нерегулярны. Если $p > 2$, то, согласно [4], ступени нильпотентности групп $PF_4(\mathbb{Z}_p)$, $PE_6(\mathbb{Z}_p)$ равны $mh(\Phi) - 1 = 1 \cdot 12 - 1 = 11$. Поэтому они регулярны для всех простых чисел $p \geqslant 13$. Остается рассмотреть случаи, когда $p \in \{3, 5, 7, 11\}$.

Тип E_6. Пусть $G = PE_6(\mathbb{Z}_p)$ и $G = G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ — члены нижнего центрального ряда G. Рассмотрим в G подгруппу H, порожденную элементами $A = x_{r_2}(1) \dots x_{r_6}(1)$ и $B = x_{r_1}(1)$. Поскольку r_1 входит в разложение любого положительного корня системы E_6 с коэффициентом 0 или 1, всякий коммутатор от A и B, имеющий более одного вхождения B, равен единице. Значит,

$$(AB)^p = A^p B^p [B, A]^{\binom{p}{2}} [B,_2 A]^{\binom{p}{3}} \dots [B,_{p-1} A]^{\binom{p}{p}}.$$

Множители $[B, A]^{\binom{p}{2}}, \dots, [B,_{p-2} A]^{\binom{p}{p-1}}$, ввиду кратности p их показателей степеней, по лемме 1 лежат вместе с $[H']^p$ в нормальной подгруппе $G^{(p+1)}$, которая порождается корневыми элементами $x_r(t)$ с $\mathrm{ht}(r) > p$. Следовательно, $B^{-p} A^{-p} (AB)^p \equiv [B,_{p-1} A] \pmod{G^{(p+1)}}$. По теореме 2

$$[B,_{p-1} A] = \prod_{\mathrm{ht}(r)=p} x_r(K^{\Delta}_{r,r_1}) \pmod{G^{(p+1)}}, \quad \Delta = \{r_2, \dots, r_6\}.$$

Используя таблицы чисел $K^{\Delta}_{r,s}$ из [10], находим

$$[B,_2 A] = x_{101100}(K^{\Delta}_{101100,r_1}) \dots = x_{101100}(1) \dots \not\equiv 1 \pmod{G^{(4)}},$$

$$[B,_4 A] = x_{101111}(K^{\Delta}_{101111,r_1}) \dots = x_{101111}(1) \dots \not\equiv 1 \pmod{G^{(6)}},$$

$$[B,_6 A] = x_{111211}(K^{\Delta}_{111211,r_1}) \dots = x_{111211}(5) \dots \not\equiv 1 \pmod{G^{(8)}},$$

$$[B,_{10} A] = x_{122321}(K^{\Delta}_{122321,r_1}) \dots = x_{122321}(12) \dots \not\equiv 1 \pmod{G^{(12)}}.$$

Отсюда заключаем, что $B^{-p} A^{-p} (AB)^p \notin [H']^p$ для всех $p \in \{3, 5, 7, 11\}$.

Тип F_4. Пусть $G = PF_4(\mathbb{Z}_p)$ и $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ — члены нижнего центрального ряда G. Положим $A = x_{r_2}(1) x_{r_3}(1) x_{r_4}(1)$, $B = x_{r_1}(1)$ и пусть $H = \langle A, B \rangle$, $\Delta = \{r_2, r_3, r_4\}$. Для каждого $p \in \{3, 5, 7, 11\}$ вычислим по модулю $G^{(p+1)}$ элемент

$$D_p = [B,_{p-1} A][B,_{p-2} A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{(p-3)/2} [[B,_{p-2-i} A], [B,_i A]]^{(-1)^{i+1}}.$$

Имеем

$$D_3 = [B,_2 A][B, A, B]^{-1} \equiv x_{1110}(K^{\Delta}_{1110,r_1}) \equiv x_{1110}(1) \pmod{G^{(4)}}.$$

Далее, коммутаторы, имеющие два вхождения B, содержатся в корневой подгруппе $x_{r_0}(\mathbb{Z}_p)$, совпадающей с $G^{(11)}$, поэтому

$$D_5 = [B,_4 A][B,_3 A, B]^{-1} [[B,_2 A], [B, A]] \equiv [B,_4 A] \equiv$$

$$\equiv x_{1220}(K^{\Delta}_{1220,r_1})\, x_{1121}(K^{\Delta}_{1221,r_1}) \equiv x_{1220}(2)\, x_{1121}(3) \pmod{G^{(6)}}.$$

$$D_7 = [B,_6 A][B,_5 A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{2} [[B,_{5-i} A], [B,_i A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv [B,_6 A] \equiv$$

$$\equiv x_{1222}(K^{\Delta}_{1222,r_1})\ x_{1231}(K^{\Delta}_{1231,r_1}) \equiv x_{1222}(16)\ x_{1231}(5) \pmod{G^{(8)}}.$$

Наконец, вычислив все коммутаторы произведения, находим

$$D_{11} = [B, {}_{10}A][B, {}_{9}A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{4} [[B, {}_{9-i}A], [B, {}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} =$$

$$= x_{r_0}(0 - 42 - 42 - 42 - 42 - 42) = x_{r_0}(-210) = x_{2342}(10).$$

Поскольку для всех $p \in \{3, 5, 7, 11\}$ имеем $D_p \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ G^{(p+1)})$, а по лемме 1 $[H']^p \subseteq G^{(p+1)}$, то это означает нерегулярность групп $PF_4(\mathbb{Z}_3)$, $PF_4(\mathbb{Z}_5)$, $PF_4(\mathbb{Z}_7)$, $PF_4(\mathbb{Z}_{11})$.

Случай $m = 2$. Если $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$, то группы $PF_4(\mathbb{Z}_{p^2})$, $PE_6(\mathbb{Z}_{p^2})$ не являются регулярными, поскольку их фактор-группы по конгруэнц-подгруппам, построенным по идеалу $J = \langle p \rangle$, изоморфны нерегулярным, как показано выше, группам $PF_4(\mathbb{Z}_p)$, $PE_6(\mathbb{Z}_p)$. Далее, когда $p > 11$, ступени нильпотентности групп $PF_4(\mathbb{Z}_{p^2})$ и $PE_6(\mathbb{Z}_{p^2})$ равны $mh(\Phi) - 1 = 2{\cdot}12 - 1 = 23$, поэтому они регулярны для всех простых чисел $p > 23$. Таким образом, остается рассмотреть случаи, когда $p \in \{13, 17, 19, 23\}$.

Рассмотрим подгруппу H в $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^2})$, порожденную элементами $A = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_n}(1)$ и $B = x_{-r_0}(p)$. Элемент B содержится в конгруэнц-подгруппе $C\Phi(J)$, которая нормальна в $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^2})$, является элементарной абелевой p-группой и централизует B. Поэтому коммутант H имеет период p и, следовательно, $(AB)^p = A^p B^p [B, {}_{p-1}A]$. По теореме 4

$$[B, {}_{p-1}A] = \prod_{\mathrm{ht}(r) = p-h} x_r(-\rho(\Phi, r)p) \ldots \quad (\mathrm{mod}\ C\Phi(J^2)).$$

Покажем, что для каждой из рассматриваемых систем корней Φ и каждого простого числа $p \in \{13, 17, 19, 23\}$ существует корень $r \in \Phi$ высоты $p-h$ такой, что $\rho(\Phi, r) \not\equiv 0 \pmod{p}$ и, значит, $1 \neq [B, {}_{p-1}A] \notin [H']^p = \langle 1 \rangle$. Отсюда, очевидно, следует нерегулярность рассматриваемых подгрупп.

Тип F_4. Используя таблицу, в которой указаны найденные в [8] значения чисел $K_{r,s}$, необходимых для вычисления $\rho(F_4, r)$,

		r	1000	1220	1222	2342
$K_{-r_1,-r_0}$	42	K_{r,r_1}	1	2	16	42
$K_{-r_2,-r_0}$	-168	K_{r,r_2}	0	-6	-66	-168
$K_{-r_3,-r_0}$	75	K_{r,r_3}	0	4	60	150
$K_{-r_4,-r_0}$	-12	K_{r,r_4}	0	0	-10	-24

и матрицу,

$$\Gamma(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

в которой приведены значения произведений (h_{r_i}, r_j), находим, что $\rho(F_4, 1000) = 252 \equiv 5 \pmod{13}$, $\rho(F_4, 1200) = 4992 \equiv 11 \pmod{17}$, $\rho(F_4, 1222) = 59670 \equiv 10 \pmod{19}$, $\rho(F_4, 2342) = 151164 \equiv 8 \pmod{23}$.

Тип E_6. Имеем

		r	100000	111110	111211	122321
$K_{-r_1,-r_0}$	12	K_{r,r_1}	10	-2	5	12
$K_{-r_2,-r_0}$	-42	K_{r,r_2}	0	3	-16	-42
$K_{-r_3,-r_0}$	-75	K_{r,r_3}	0	8	-30	-75
$K_{-r_4,-r_0}$	168	K_{r,r_4}	0	-12	66	168
$K_{-r_5,-r_0}$	-75	K_{r,r_5}	0	3	-30	-75
$K_{-r_6,-r_0}$	12	K_{r,r_6}	0	0	5	12

и

$$\Gamma(E_6) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

откуда $\rho(E_6, 100000) = 99 \equiv 5 \pmod{13}$, $\rho(E_6, 111110) = -10920 \equiv 11 \pmod{17}$, $\rho(E_6, 111211) = 59670 \equiv 10 \pmod{19}$, $\rho(E_6, 122321) = 151164 \equiv 8 \pmod{23}$.

Случай $m = 3$. Далее нам потребуется лемма, доказанная в [7] для Φ типа G_2, однако она имеет место и для рассматриваемых типов Φ.

Лемма 2. *Пусть $\Phi(\mathbb{Z}_{p^3})$ — элементарная группа Шевалле типа $\Phi = F_4, E_6$ над $\mathbb{Z}_{p^3}$, $\Pi(\Phi) = \{r_1, \ldots, r_n\}$, r_0 — корень максимальной высоты. Положим $A = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_n}(1)$, $B = x_{-r_0}(p)$ и пусть $d \in \langle A, B \rangle'$. Тогда d^p раскладывается в произведение*

$$d^p = [B, A]^{p\alpha_1} \ldots [B,_t A]^{p\alpha_t}, \qquad t = 3h(\Phi) - 2,$$

для подходящих натуральных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$.

Тип F_4. Пусть $G = PF_4(\mathbb{Z}_{p^3})$ и $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots$ — члены нижнего центрального ряда группы G. Положим $A = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_4}(1)$, $B = x_{-r_0}(p)$ и $H = \langle A, B \rangle$. Используя последовательно теоремы 3, 4 и 2, вычислим коммутаторы $[B,_i A]$, $i = 5, \ldots, 22$, по модулю подгрупп $G^{(i+2)}$. Имеем

$$[B,_5 A] \equiv x_{-1122}(2p)\, x_{-1221}(3p) \pmod{G^{(7)}},$$

$$[B,_6 A] \equiv x_{-1121}(5p)\, x_{-1220}(6p)\, x_{-0122}(-2p) \pmod{G^{(8)}},$$

$$[B,_7 A] \equiv x_{-1111}(5p)\, x_{-1120}(16p)\, x_{-0121}(-7p) \pmod{G^{(9)}},$$

$$[B,_8 A] \equiv x_{-0111}(-12p)\, x_{-0120}(-30p)\, x_{-1110}(21p) \pmod{G^{(10)}},$$

$$[B,_9 A] \equiv x_{-0011}(12p)\, x_{-0110}(-63p)\, x_{-1100}(42p) \pmod{G^{(11)}},$$

$$[B,{}_{10}A] \equiv x_{-r_1}(42p)\ x_{-r_2}(-168p)\ x_{-r_3}(75p)\ x_{-r_4}(-12p) \pmod{G^{(12)}}.$$

$$[B,{}_{11}A] \equiv h_{r_1}(1+42p)\ h_{r_2}(1-168p)\ h_{r_3}(1+75p)\ h_{r_4}(1-12p) \pmod{G^{(13)}}.$$

$$[B,{}_{12}A] \equiv x_{r_1}(-252p)\ x_{r_2}(528p)\ x_{r_3}(-330p)\ x_{r_4}(99p) \pmod{G^{(14)}},$$

$$\begin{aligned}
[B,{}_{13}A] &\equiv x_{0011}(429p)\ x_{0110}(-858p)\ x_{1100}(780p) && \pmod{G^{(15)}},\\
[B,{}_{14}A] &\equiv x_{0111}(1287p)\ x_{0120}(1716p)\ x_{1110}(-1638p) && \pmod{G^{(16)}},\\
[B,{}_{15}A] &\equiv x_{0121}(-3003p)\ x_{1111}(2925p)\ x_{1120}(4992p) && \pmod{G^{(17)}},\\
[B,{}_{16}A] &\equiv x_{0122}(6006p)\ x_{1220}(-4992p)\ x_{1121}(-10920p) && \pmod{G^{(18)}},\\
[B,{}_{17}A] &\equiv x_{1122}(27846p)\ x_{1221}(15912p) && \pmod{G^{(19)}},\\
[B,{}_{18}A] &\equiv x_{1222}(-59670p)\ x_{1231}(-15912p) && \pmod{G^{(20)}},\\
[B,{}_{19}A] &\equiv x_{1232}(75582p) && \pmod{G^{(21)}},\\
[B,{}_{20}A] &\equiv x_{1242}(-151164p) && \pmod{G^{(22)}},\\
[B,{}_{21}A] &\equiv x_{1342}(151164p) && \pmod{G^{(23)}},\\
[B,{}_{22}A] &\equiv x_{2342}(-151164p) && \pmod{G^{(24)}}.
\end{aligned}$$

Пусть $p = 29$. Так как $[x_{2342}(-151164p), A] = 1$, то $[B,{}_iA] \in G^{(i+3)}$ при $i > 22$. Значит, коммутаторы $[B,{}_{28}A]$, $[B,{}_{27}A,B]$ и $[[B,{}_{27-i}A],[B,{}_iA]]$ при $i = 1,2,3,4$ лежат в $G^{(30)}$. Поэтому

$$D_{29} = [B,{}_{28}A][B,{}_{27}A,B]^{-1}\prod_{i=1}^{13}[[B,{}_{27-i}A],[B,{}_iA]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$\equiv \prod_{i=5}^{13}[[B,{}_{27-i}A],[B,{}_iA]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$(26,10,0)\cdot(26,0,20)\cdot(0,25,5)\cdot(0,9,12)\cdot(13,16,11)\times$$

$$(13,19,9)\cdot(25,22,5)\cdot(24,4,22)\cdot(26,3,16) \equiv$$

$$\equiv x_{1220}(8p^2)\ x_{1121}(21p^2)\ x_{0122}(13p^2) \pmod{G^{(30)}}.$$

Здесь мы использовали сокращение $(\alpha,\beta,\gamma) = x_{1220}(\alpha p^2)\ x_{1121}(\beta p^2)\ x_{0122}(\gamma p^2)$. Из леммы 2 и полученных соотношений следует, что если $D \in \langle A,B\rangle'$ и $D^{-p}D_{29} \in G^{(30)}$, то показатели $\alpha_1,\ldots,\alpha_{15}$ должны быть кратны p, а α_{16} удовлетворять системе сравнений: $8 \equiv 25\alpha \pmod{29}$, $21 \equiv 13\alpha \pmod{29}$, $13 \equiv 3\alpha \pmod{29}$, которая, как легко проверить, несовместна. Значит, не существует $D \in \langle A,B\rangle'$ такого, что $D^{-p}D_{29} \in G^{(30)}$ и, следовательно, группа $PF_4(\mathbb{Z}_{29^3})$ нерегулярна.

Пусть $p = 31$. Имеем

$$
\begin{aligned}
D_{31} = [B, {}_{30}A][B, {}_{29}A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{14} [[B, {}_{29-i}A], [B, {}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv \\
\equiv \prod_{i=7}^{14} [[B, {}_{29-i}A], [B, {}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv \\
\equiv (27, 22) \cdot (8, 28) \cdot (0, 28) \cdot (11, 14) \cdot (26, 23) \cdot (23, 6) \cdot (22, 23) \cdot (20, 29) \equiv \\
\equiv x_{1222}(13p^2)\, x_{1231}(18p^2) \pmod{G^{(32)}}.
\end{aligned}
$$

Как и выше, получаем неразрешимую систему сравнений: $13 \equiv 5\alpha \pmod{31}$, $18 \equiv 22\alpha \pmod{31}$.

Тип E_6. Пусть $G = PE_6(\mathbb{Z}_{p^3})$ и $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots$ — члены нижнего центрального ряда группы G. Положим $A = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_6}(1)$, $B = x_{-r_0}(p)$ и $H = \langle A, B \rangle$. Используя последовательно теоремы 3, 4 и 2, вычислим коммутаторы $[B, {}_{i}A]$, $i = 5, \ldots, 22$, по модулю подгрупп $G^{(i+2)}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
[B, {}_{5}A] &\equiv x_{-111210}(-3p)\, x_{-111111}(2p)\, x_{-011211}(3p) \pmod{G^{(7)}}, \\
[B, {}_{6}A] &\equiv x_{-111110}(-5p)\, x_{-011210}(-6p)\, x_{-101111}(2p) \times \\
&\quad x_{-011111}(5p) \pmod{G^{(8)}}, \\
[B, {}_{7}A] &\equiv x_{-111100}(-5p)\, x_{-101110}(-7p)\, x_{-011110}(-16p) \times \\
&\quad x_{-001111}(7p)\, x_{-010111}(5p) \pmod{G^{(9)}}, \\
[B, {}_{8}A] &\equiv x_{-101100}(12p)\, x_{-011100}(-21p)\, x_{-001110}(-30p) \times \\
&\quad x_{-010110}(-21p)\, x_{-000111}(12p) \pmod{G^{(10)}}, \\
[B, {}_{9}A] &\equiv x_{-101000}(-12p)\, x_{-001100}(63p)\, x_{-010100}(-42p) \times \\
&\quad x_{-000110}(-63p)\, x_{-000011}(12p) \pmod{G^{(11)}}, \\
[B, {}_{10}A] &\equiv x_{-r_1}(12p)\, x_{-r_2}(-42p)\, x_{-r_3}(-75p) \times \\
&\quad x_{-r_4}(168p)\, x_{-r_5}(-75p)\, x_{-r_6}(12p) \pmod{G^{(12)}}, \\
[B, {}_{11}A] &\equiv h_{r_1}(1 + 12p)\, h_{r_2}(1 - 42p)\, h_{r_3}(1 - 75p) \times \\
&\quad h_{r_4}(1 + 168p)\, h_{r_5}(1 - 75p)\, h_{r_6}(1 + 12p) \pmod{G^{(13)}}, \\
[B, {}_{12}A] &\equiv x_{r_1}(-99p)\, x_{r_2}(252p)\, x_{r_3}(330p) \times \\
&\quad x_{r_4}(-528p)\, x_{r_5}(330p)\, x_{r_6}(-99p) \pmod{G^{(14)}}, \\
[B, {}_{13}A] &\equiv x_{101000}(-429p)\, x_{001100}(858p)\, x_{010100}(-780p) \times \\
&\quad x_{000110}(-858p)\, x_{000011}(429p) \pmod{G^{(15)}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
[B,{}_{14}A] &\equiv x_{101100}(-1287p)\ x_{011100}(1638p)\ x_{001110}(1716p)\times \\
&\quad x_{010110}(1638p)\ x_{000111}(-1287p) \pmod{G^{(16)}}, \\
[B,{}_{15}A] &\equiv x_{111100}(-2925p)\ x_{101110}(-3003p)\ x_{011110}(-4992p)\times \\
&\quad x_{001111}(3003p)\ x_{010111}(2925p) \pmod{G^{(17)}}, \\
[B,{}_{16}A] &\equiv x_{111110}(10920p)\ x_{011210}(4992p)\times \\
&\quad x_{101111}(-6006p)\ x_{011111}(-10920p) \pmod{G^{(18)}}, \\
[B,{}_{17}A] &\equiv x_{111210}(-15912p)\ x_{111111}(27846p)\times \\
&\quad x_{011211}(15912p) \pmod{G^{(19)}}, \\
[B,{}_{18}A] &\equiv x_{112210}(15912p)\ x_{111211}(-59670p)\times \\
&\quad x_{011221}(-15912p) \pmod{G^{(20)}}, \\
[B,{}_{19}A] &\equiv x_{112211}(75582p)\ x_{111221}(75582p) \pmod{G^{(21)}}, \\
[B,{}_{20}A] &\equiv x_{112221}(-151164p) \pmod{G^{(22)}}, \\
[B,{}_{21}A] &\equiv x_{112321}(151164p) \pmod{G^{(23)}}, \\
[B,{}_{22}A] &\equiv x_{122321}(-151164p) \pmod{G^{(24)}},
\end{aligned}$$

Пусть $p = 29$. Имеем

$$D_{29} = [B,{}_{28}A][B,{}_{27}A,B]^{-1}\prod_{i=1}^{13}[[B,{}_{27-i}A],[B,{}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$\equiv \prod_{i=5}^{13}[[B,{}_{27-i}A],[B,{}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$(10,26,*,*)\cdot(0,26,*,*)\cdot(25,0,*,*)\cdot(9,0,*,*)\cdot(16,13,*,*)\times$$

$$(19,13,*,*)\cdot(22,25,*,*)\cdot(4,5,*,*)\cdot(3,26,*,*)\equiv$$

$$\equiv x_{111110}(21p^2)\ x_{011210}(18p^2)x_{101111}(*)\ x_{011111}(*) \pmod{G^{(30)}}.$$

Получаем неразрешимую систему сравнений: $21 \equiv 16\alpha \pmod{29}$, $18 \equiv 4\alpha \pmod{29}$.

Пусть $p = 31$. Имеем

$$D_{31} = [B,{}_{30}A][B,{}_{29}A,B]^{-1}\prod_{i=1}^{14}[[B,{}_{29-i}A],[B,{}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$\equiv \prod_{i=7}^{14}[[B,{}_{29-i}A],[B,{}_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$

$$\equiv (22,4,*)\cdot(28,23,*)\cdot(28,0,*)\cdot(14,20,*)\cdot(23,2,*)\cdot(6,8,*)\times$$
$$(23,9,*)\cdot(29,11,*) \equiv x_{112210}(18p^2)\ x_{111211}(15p^2)\ x_{011221}(*) \pmod{G^{(32)}}.$$

Получаем неразрешимую систему сравнений: $18 \equiv 9\alpha \pmod{31}$, $15 \equiv 5\alpha \pmod{31}$.

4. Заключение

Для групп Шевалле исключительных лиевых типов исследовался аналог вопроса Б. А. Ф Верфрица 8.3 из Коуровской тетради. Перечислены все пары (p,m), где p — простое число, отличное от $37, 41, 43, 47$, а m — натуральное число, для которых силовская p-подгруппа элементарной группы Шевалле типа F_4 или E_6 над кольцом вычетов целых чисел по модулю p^m является регулярной.

Список источников

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы IV-VI. М. : Мир, 1972. 334 с.
2. Егорычев Г. П., Колесников С. Г., Леонтьев В. М. Необходимые и достаточные условия регулярности силовских р-подгрупп групп Шевалле над Z_p и Z_{p^2} // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 63, № 3. С. 500–520. https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.305
3. Колесников С. Г. О регулярных силовских p-подгруппах групп Шевалле над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$ // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 46, № 6. С. 1289–1295. https://doi.org/10.1007/s11202-006-0114-6
4. Левчук В. М. Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле // Украинский математический журнал. 1992. Т. 44, № 6. С. 786–795.
5. Холл М. Теория групп. М. : ИН, 1962. 466 с.
6. Carter R. Simple groups of Lie type. Ney York : Wiley and Sons, 1972. 332 p.
7. Kolesnikov S. G, Leontiev V. M. One necessary condition for the regularity of a p-group and its application to Wehrfritz's problem // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19, № 1. С. 138–163. https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.013
8. Kolesnikov S. G., Polovinkina A. I. The Table of the Structure Constants for the Complex Simple Lie Algebra of Type F_4 and its Application to the Calculation of Commutators in the Chevalley Group of Type F_4 over Fields and Rings, arXiv:2312.03439.
9. Mazurov V. D., Huhro E. I. The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory. 16th ed. Novosibirsk, 2006.
10. Polovinkina A. I., Kolesnikov S. G., The Table of the Structure Constants for the Complex Simple Lie Algebra of Type E_6 and Chevalley Commutator Formulas in the Chevalley Group of Type E_6 over a Field, arXiv:2403.10038.

References

1. Bourbaki N. *Gruppy i algebry Li. Glavy IV-VI* [Groupes et algebres de Lie. Chapitres IV-VI]. Moscow, Mir Pibl., 1972, 334 p. (in Russian)

2. Egorychev G.P., Kolesnikov S.G., Leontiev V.M. Neobhodimye i dostatochnye usloviya regulyarnosti silovskih p-podgrupp grupp Shevalle nad $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_{p^2}$ [Necessary and sufficient conditions for the regularity of Sylow p-subgroups of Chevalley groups over Z_p and Z_{p^2}]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2023, vol. 64, no. 3, p. 500–520. https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.305 (in Russian)
3. Kolesnikov S.G. O regulyarnyh silovskih p-podgruppah grupp Shevalle nad kolcom $\mathbb{Z}_{p^m}$ [On the regular Sylow p-subgroups of Chevalley groups over $\mathbb{Z}_{p^m}$]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2006, vol. 46, no. 6, pp. 1289–1295. https://doi.org/10.1007/s11202-006-0114-6 (in Russian)
4. Levchuk V.M. Kommutatornoe stroenie nekotoryh podgrupp grupp Shevalle [Commutator structure of some subgroups of Chevalley groups]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* [Ukrainian mathematical journal], 1992, vol. 44, no. 6, pp. 786–795. (in Russian)
5. Hall M. *Teoriya grupp* [The Theory of Groups]. Moscow, IN Publ., 1962, 466 p. (in Russian)
6. Carter.R. Simple groups of Lie type. New-York, Wiley and Sons, 1972, 332 p.
7. Kolesnikov S.G., Leontiev V.M. One necessary condition for the regularity of a p-group and its application to Wehrfritz's problem. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 138–163. https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.013
8. Kolesnikov S.G., Polovinkina A.I. The Table of the Structure Constants for the Complex Simple Lie Algebra of Type F_4 and its Application to the Calculation of Commutators in the Chevalley Group of Type F_4 over Fields and Rings, arXiv:2312.03439.
9. Mazurov V.D., Huhro E.I. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 16th ed.* Novosibirsk, 2006.
10. Polovinkina A.I., Kolesnikov S.G. The Table of the Structure Constants for the Complex Simple Lie Algebra of Type E_6 and Chevalley Commutator Formulas in the Chevalley Group of Type E_6 over a Field, arXiv:2403.10038.

Об авторах

Колесников Сергей Геннадьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, sklsnkv@mail.ru

Половинкина Анна Ильинична, аспирант, Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, apolovinkina1399@gmail.com

About the authors

Sergey G. Kolesnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, sklsnkv@mail.ru

Anna I. Polovinkina, Postgraduate, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, apolovinkina1399@gmail.com

Поступила в редакцию / Received 22.07.2024
Поступила после рецензирования / Revised 10.09.2024
Принята к публикации / Accepted 13.09.2024