Серия «Математика»
2025. Т. 51. С. 82—100

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 512.563, 519.716.322, 519.719.2
MSC 06E30, 90C25, 46N10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82

Вогнутые продолжения булевоподобных функций и некоторые их свойства

Д. Н. Баротов[1]✉

[1] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация
✉ DNBarotov@fa.ru

Аннотация. Выявлены вогнутые продолжения дискретных функций, определенных на вершинах n-мерного единичного куба, n-мерного произвольного куба и n-мерного произвольного параллелепипеда. Конструктивно доказано, что, во-первых, любая дискретная функция f_D, определенная на вершинах $\mathbb{G}$ — одного из этих трех множеств, имеет бесконечно много вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$ и, во-вторых, существует функция f_{NR}, являющаяся минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$. Также доказано, что функция f_{NR} на $\mathbb{G}$ непрерывна и единственна.

Ключевые слова: дискретные функции, вогнутые продолжения дискретных функций, псевдобулевы функции, булевы функции

Ссылка для цитирования: Баротов Д. Н. Вогнутые продолжения булевоподобных функций и некоторые их свойства // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 82–100.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82

Research article

Concave Continuations of Boolean-like Functions and Some of Their Properties

Dostonjon N. Barotov[1✉]

[1] Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation
✉ DNBarotov@fa.ru

Abstract. In this paper, we present concave continuations of discrete functions defined on the vertices of an n-dimensional unit cube, an n-dimensional arbitrary cube, and an n-dimensional arbitrary parallelepiped. It is constructively proved that, firstly, for any discrete function f_D defined on the vertices of $\mathbb{G}$, where $\mathbb{G}$ is one of these three sets, the cardinality of the set of its concave continuations on $\mathbb{G}$ is equal to infinity, and, secondly, there is a function f_{NR} that is the minimum among all its concave continuations on $\mathbb{G}$. The uniqueness and continuity of the function f_{NR} on $\mathbb{G}$ are also proved.

Keywords: discrete functions, concave continuations of discrete functions, pseudo-Boolean functions, Boolean functions

For citation: Barotov D. N. Concave Continuations of Boolean-like Functions and Some of Their Properties. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 82–100. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82

1. Введение

Задача решения системы булевых уравнений является увлекательной и одной из важных задач математических, компьютерных и многих других наук [16; 22]. В частности, в области криптографии она имеет приложения при анализе и взломе блочных шифров [11; 18]. Одно из первых успешных применений решения системы булевых уравнений в криптографической задаче было продемонстрировано в [18]. В связи с этим, с одной стороны, совершенствуются существующие методы и алгоритмы, с другой стороны, разрабатывается и адаптируется множество новых направлений исследования и алгоритмов решения систем булевых уравнений [10; 11; 19]. Одним из таких направлений является преобразование системы булевых уравнений в систему уравнений над полем действительных чисел, поскольку в этой области известно множество методов и алгоритмов решения систем. В свою очередь, преобразованная система может быть сведена либо к задаче численной оптимизации, что позволяет применять, анализировать и комбинировать оптимизационные методы вычислительной математики [5;6;12–14; 20;21], либо к MILP или QUBO, решаемой классическими алгоритмами дискретной оптимизации или квантовыми алгоритмами [17; 25], либо к системе полиномиальных уравнений, решаемой на множестве целых чисел [10], либо к эквивалентной системе полиномиальных уравнений, решаемой и анализируемой символьными методами [15; 19].

Имеется много способов, позволяющих преобразовать системы булевых уравнений к задаче численной непрерывной оптимизации, поскольку принципиальное отличие таких методов от «переборных» алгоритмов локального поиска состоит в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по градиенту (антиградиенту) производится по всем переменным одновременно [1;5;6;9;12–14;20;21;25]. Но одна из основных проблем, возникающих при применении этих методов, заключается в том, что оптимизируемая целевая функция в искомой области может иметь множество локальных экстремумов, что существенно усложняет их практическое использование [5;12–14;20;21]. Недавно в [1–4] выявлены выпуклые и вогнутые продолжения булевых функций на множество $[0,1]^n$ и изучены их свойства. Также благодаря построенным выпуклым (вогнутым) продолжениям булевых функций на $[0,1]^n$, в частности, конструктивно доказано, что задача решения системы булевых уравнений может быть сведена к задаче минимизации (максимизации) целевой функции, любой локальный минимум (максимум) которой в искомой области является глобальным минимумом (максимумом), и тем самым проблема локальных экстремумов для таких задач полностью решена.

В данной статье проводится исследование, которое является продолжением исследований, проведенных, в частности, в [1; 2; 4–7; 12–15] и обобщением исследования, проведенного в [3], а именно изучается существование и единственность вогнутого продолжения произвольной дискретной функции f_D, определенной на вершинах $\mathbb{G}$, где $\mathbb{G} \in \{[0,1]^n, [a,b]^n, [c_1,d_1] \times [c_2,d_2] \times ... \times [c_n,d_n]\}$, в частности для любой булевой функции, на множество $\mathbb{G}$. В результате исследования получены некоторые новые теоретические результаты. Во-первых, для любой дискретной функции f_D, определенной на вершинах $\mathbb{G}$, конструируется функция вида $f_C : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, которая является ее вогнутым продолжением на множество $\mathbb{G}$. Также благодаря f_C конструктивно доказывается, что любая дискретная функция f_D, определенная на вершинах $\mathbb{G}$, имеет бесконечно много вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$. Во-вторых, для любой дискретной функции f_D, определенной на вершинах $\mathbb{G}$, строится функция вида $f_{NR} : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, являющаяся минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$, а также доказывается единственность и непрерывность на $\mathbb{G}$ функции f_{NR}.

2. Используемые обозначения и определения

Пусть $\mathbb{K}^n = [0,1]^n$ — n-мерный единичный куб, $V(\mathbb{K}^n) = \{0,1\}^n$ — множество вершин куба $\mathbb{K}^n$.

Пусть $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{K}^n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big\{ \big(\lambda_{(0,0,\ldots,0)}, \lambda_{(0,0,\ldots,1)}, \ldots, \lambda_{(1,1,\ldots,1)}\big) \in \mathbb{K}^{2^n} : \sum\limits_{(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in V(\mathbb{K}^n)} \lambda_{(b_1,b_2,\ldots,b_n)} \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n, 1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)\Big\}$ — множество весовых коэффициентов, используемых для представления точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде выпуклой комбинации вершин куба $\mathbb{K}^n$.

Пусть $\mathbb{K}^n(a,b) = [a,b]^n$ — n-мерный куб, зависящий от a и b, где $-\infty < a < b < +\infty$, $V(\mathbb{K}^n(a,b)) = \{a,b\}^n$ — множество вершин куба $\mathbb{K}^n(a,b)$.

Пусть $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{K}^n(a,b)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big\{ \big(\lambda_{(a,a,\ldots,a)}, \lambda_{(a,a,\ldots,b)}, \ldots, \lambda_{(b,b,\ldots,b)}\big) \in \mathbb{K}^{2^n} : \sum\limits_{(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in V(\mathbb{K}^n(a,b))} \lambda_{(z_1,z_2,\ldots,z_n)} \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n, 1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)\Big\}$ — множество весовых коэффициентов, используемых для представления точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде выпуклой комбинации вершин куба $\mathbb{K}^n(a,b)$.

Пусть $\mathbb{P}_c^d = \prod\limits_{k=1}^{n} [c_k, d_k]$ — n-мерный параллелепипед (координатный параллелепипед), зависящий от $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где $-\infty < c_i < d_i < +\infty$, $\;i \in \{1, \ldots, n\}$, $V(\mathbb{P}_c^d) = \prod\limits_{k=1}^{n} \{c_k, d_k\}$ — множество вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$.

Пусть $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big\{ \big(\lambda_{(c_1,c_2,\ldots,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,\ldots,d_n)}, \ldots, \lambda_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)}\big) \in \mathbb{K}^{2^n} : \sum\limits_{(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,\ldots,z_n)} \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n, 1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)\Big\}$ — множество весовых коэффициентов, используемых для представления точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде выпуклой комбинации вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$.

Определение 1. *Отображение вида* $f_B : V(\mathbb{K}^n) \to \{0,1\}$ *назовем булевой функцией.*

Определение 2. *Отображение вида* $f_D : V(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{R}$ *назовем псевдобулевой функцией.*

Определение 3. *Отображение вида* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, *где* $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a,b), \mathbb{P}_c^d\}$, *назовем вогнутой функцией на множестве* $\mathbb{G}$, *если для любых* $x, y \in \mathbb{G}$ *и любого* $\alpha \in [0,1]$ *выполнено неравенство*

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y) \geq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y).$$

Определение 4. *Отображение вида* $f_C : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, *где* $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a,b), \mathbb{P}_c^d\}$, *назовем вогнутым продолжением на множество* $\mathbb{G}$ *дискретной* *функции вида* $f_D : V(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$, *если функция* f_C *на* $\mathbb{G}$ *вогнутая и имеет место* $f_C(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f_D(b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V(\mathbb{G})$.

Определение 5. *Отображение вида* $f_{NR} \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, *где* $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a, b), \mathbb{P}_c^d\}$, *назовем минимумом среди всех вогнутых продолжений на* $\mathbb{G}$ *дискретной функции вида* $f_D : V(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$, *если оно является вогнутым продолжением на* $\mathbb{G}$ *дискретной функции* f_D *и для любого* $f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *вогнутого продолжения на* $\mathbb{G}$ *дискретной функции* f_D *и любого* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{G}$ *имеет место* $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f_C(x_1, x_2, ..., x_n)$.

3. Вогнутые продолжения дискретных функций вида $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$ на множество $\mathbb{P}_c^d$

Начнем изложение с обоснования того факта, что для любого $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{G}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a, b), \mathbb{P}_c^d\}$, соответствующее множество

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{G}}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

не пусто, причем если $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in V(\mathbb{G})$, то оно состоит из одного элемента, в котором на месте $\lambda_{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}$ стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Для этого достаточно обосновать справедливость следующей вспомогательной леммы:

Лемма 1. *Для любого* $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{P}_c^d$ *множество*

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

не пусто, причем если $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in V(\mathbb{P}_c^d)$, *то оно состоит из одного элемента, в котором на месте* $\lambda_{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}$ *стоит единица, а на остальных местах стоят нули.*

Доказательство. Сначала докажем, что если $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{P}_c^d$, то $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \neq \varnothing$. Покажем, что имеет место включение

$$\left(\lambda^*_{(c_1, c_2, \ldots, c_n)}, \lambda^*_{(c_1, c_2, \ldots, d_n)}, ..., \lambda^*_{(d_1, d_2, \ldots, d_n)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*),$$

где лямбда с индексом $(z_1, z_2, ..., z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ определяется по формуле

$$\lambda^*_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right). \qquad (3.1)$$

Для этого достаточно проверить справедливость следующих свойств:

1°. Для любого $(z_1, z_2, ..., z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ выполнено $\lambda^*_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \geq 0$.

2°. Имеет место равенство $\sum\limits_{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^*_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = 1$.

3°. Имеет место равенство

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^*_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot z_j = x_j^*, \quad j \in \{1,2,...,n\}.$$

Проверим эти свойства:

1°. Ввиду $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{P}_c^d$ и $(z_1, z_2, ..., z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ имеем

$$\frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} \in [0,1], \quad \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \in \{0,1\} \quad \forall k \in \{1,2,...,n\},$$

следовательно,

$$0 \le \left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1\right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \le 1 \quad \forall k \in \{1,2,...,n\}.$$

Отсюда, ввиду (3.1), получим, что $\lambda^*_{(z_1,z_2,...,z_n)} \ge 0$.

2°. Действительно,

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^*_{(z_1,z_2,...,z_n)} =$$

$$= \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1\right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) =$$

$$= \sum_{(z_1,z_2,...,z_{n-1})\in \prod_{j=1}^{n-1}\{c_j,d_j\}} \left[\left(\left(2\frac{c_n - c_n}{d_n - c_n} - 1\right) \cdot \frac{x_n^* - c_n}{d_n - c_n} + 1 - \frac{c_n - c_n}{d_n - c_n} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1\right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{(z_1,z_2,...,z_{n-1})\in \prod_{j=1}^{n-1}\{c_j,d_j\}} \left[\left(\left(2\frac{d_n - c_n}{d_n - c_n} - 1\right) \cdot \frac{x_n^* - c_n}{d_n - c_n} + 1 - \frac{d_n - c_n}{d_n - c_n} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1\right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) \right] =$$

$$= \sum_{(z_1,z_2,...,z_{n-1})\in \prod_{j=1}^{n-1}\{c_j,d_j\}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1\right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) =$$

$$= \ldots = \sum_{z_1 \in \{c_1, d_1\}} \prod_{k=1}^{1} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) =$$

$$= \left(\left(2\frac{c_1 - c_1}{d_1 - c_1} - 1 \right) \cdot \frac{x_1^* - c_1}{d_1 - c_1} + 1 - \frac{c_1 - c_1}{d_1 - c_1} \right) +$$

$$+ \left(\left(2\frac{d_1 - c_1}{d_1 - c_1} - 1 \right) \cdot \frac{x_1^* - c_1}{d_1 - c_1} + 1 - \frac{d_1 - c_1}{d_1 - c_1} \right) = 1.$$

3°. Действительно,

$$\sum_{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^*_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \cdot z_j =$$

$$= \sum_{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) \cdot z_j =$$

$$= \sum_{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1} \ldots, z_n) \in \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \{c_i, d_i\}} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(-\frac{x_j^* - c_j}{d_j - c_j} + 1 \right) \cdot c_j \right] + \sum_{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1} \ldots, z_n) \in \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \{c_i, d_i\}} \left[\frac{x_j^* - c_j}{d_j - c_j} \cdot d_j \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) \right] =$$

$$= \sum_{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1} \ldots, z_n) \in \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \{c_i, d_i\}} x_j^* \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) =$$

$$= x_j^* \cdot \sum_{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1} \ldots, z_n) \in \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \{c_i, d_i\}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) =$$

$$= x_j^* \cdot 1 = x_j^*,$$

так как из свойства 2° следует, что

$$\sum_{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1} \ldots, z_n) \in \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \{c_i, d_i\}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\left(2\frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_k^* - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{z_k - c_k}{d_k - c_k} \right) = 1.$$

Теперь докажем, что если $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in V(\mathbb{P}_c^d)$, то множество

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

состоит из одного элемента, в котором на месте $\lambda_{(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}$ стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Тогда

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(c_1, c_2, ..., c_n) =$$

$$= \Bigg\{ \left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) \in \mathbb{K}^{2^n} :$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = (c_1, c_2, ..., c_n) \quad \text{и}$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 1 \Bigg\}.$$

В силу $c_i < d_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \in [0, 1] \quad \forall (v_1, v_2, ..., v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ и $\sum\limits_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 1$ приравняв покоординатно заметим, что

$$\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_1, v_2, ..., v_n) = (c_1, c_2, ..., c_n) \\ 0, & \text{если } (v_1, v_2, ..., v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(c_1, c_2, ..., c_n)\}, \end{cases}$$

так как если предположить, что

$$\exists (v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(c_1, c_2, ..., c_n)\} : \lambda_{(v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*)} > 0,$$

то хотя бы одна координата вектора $-(c_1, c_2, ..., c_n)+$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = \lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)} \cdot (0, 0, ..., 0)$$

$$+ \sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)\setminus\{(c_1,c_2,...,c_n)\}} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1 - c_1, v_2 - c_2, ..., v_n - c_n)$$

будет положительна и, следовательно, он не будет равен $(0, 0, ..., 0)$.

Случай 2. Пусть $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = (d_1, d_2, ..., d_n)$. Тогда

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(d_1, d_2, ..., d_n) =$$

$$\Bigg\{ \left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) \in \mathbb{K}^{2^n} :$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = (d_1, d_2, ..., d_n) \quad \text{и}$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 1\Big\}.$$

В силу $c_i < d_i \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$, $\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \in [0,1] \quad \forall (v_1,v_2,...,v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ и $\sum\limits_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 1$ приравняв покоординатно нетрудно заметить, что

$$\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_1,v_2,...,v_n) = (d_1,d_2,...,d_n) \\ 0, & \text{если } (v_1,v_2,...,v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(d_1,d_2,...,d_n)\}, \end{cases}$$

так как если предположить, что

$$\exists (v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(d_1,d_2,...,d_n)\} : \lambda_{(v_1^*,v_2^*,...,v_n^*)} > 0,$$

то хотя бы одна координата вектора $-(d_1,d_2,...,d_n)+$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1,v_2,...,v_n) = \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)} \cdot (0,0,...,0)$$

$$+ \sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)\setminus\{(d_1,d_2,...,d_n)\}} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1-d_1, v_2-d_2, ..., v_n-d_n)$$

будет отрицательна и, следовательно, он не будет равен $(0,0,...,0)$.

Случай 3. Пусть $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(c_1,c_2,...,c_n),(d_1,d_2,...,d_n)\}$. Тогда

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \Big\{ \big(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\big) \in \mathbb{K}^{2^n} :$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} \cdot (v_1,v_2,...,v_n) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \quad \text{и}$$

$$\sum_{(v_1,v_2,...,v_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 1\Big\}.$$

В этом случае существуют числа $p, q \in \mathbb{N}$ и множества $\{i_1, i_2, ..., i_p\}$, $\{j_1, j_2, .., j_q\}$ такие, что $\{i_1, i_2, ..., i_p\} \sqcup \{j_1, j_2, .., j_q\} = \{1,2,...,n\}$ и $x_k^* = \begin{cases} c_k, & \text{если } k \in \{i_1, i_2, ..., i_p\} \\ d_k, & \text{если } k \in \{j_1, j_2, .., j_q\} \end{cases}$. Теперь, во-первых, исходя из рассуждения, аналогичного рассуждению в случае 1, получим, что если $k \in \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ и v_k — k-я координата вектора $(v_1,v_2,...,v_n)$ равна d_k, то $\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 0$, во-вторых, исходя из рассуждения, аналогичного рассуждению в случае 2, получим, что если $k \in \{j_1, j_2, .., j_q\}$ и v_k — k-я координата вектора $(v_1, v_2, ..., v_n)$ равна c_k, то $\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = 0$. Отсюда

$$\lambda_{(v_1,v_2,...,v_n)} = \begin{cases} 1, \text{ если } (v_1, v_2, ..., v_n) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \\ 0, \text{ если } (v_1, v_2, ..., v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d) \setminus \{(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)\} \end{cases}.$$

Лемма доказана. □

Теперь обоснуем, что для любой дискретной функции вида $f_D : V(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a,b), \mathbb{P}_c^d\}$, можно построить вещественную функцию вида $f_C : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, являющуюся вогнутым продолжением на $\mathbb{G}$ функции f_D. Для этого достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть дана произвольная дискретная функция вида $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$. Пусть $f_{min} = \min\limits_{(v_1,v_2,...,v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_D(v_1, v_2, ..., v_n)$ — минимум функции f_D на $V(\mathbb{P}_c^d)$. Тогда вещественная функция вида*

$$f_C(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{min} + \sum_{(v_1,v_2,...,v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \Bigg[(f_D(v_1, v_2, ..., v_n) - f_{min}) \cdot$$
$$\cdot \min \Bigg\{ (2\frac{v_1 - c_1}{d_1 - c_1} - 1) \cdot \frac{x_1 - c_1}{d_1 - c_1} + 1 - \frac{v_1 - c_1}{d_1 - c_1},$$
$$..., (2\frac{v_n - c_n}{d_n - c_n} - 1) \cdot \frac{x_n - c_n}{d_n - c_n} + 1 - \frac{v_n - c_n}{d_n - c_n} \Bigg\} \Bigg] \qquad (3.2)$$

является ее вогнутым продолжением на $\mathbb{P}_c^d$.

Доказательство. Хорошо известно, что минимум набора линейных функций является вогнутой функцией, следовательно,

$$\min \left\{ (2\frac{v_1 - c_1}{d_1 - c_1} - 1)\frac{x_1 - c_1}{d_1 - c_1} + 1 - \frac{v_1 - c_1}{d_1 - c_1}, ..., (2\frac{v_n - c_n}{d_n - c_n} - 1)\frac{x_n - c_n}{d_n - c_n} + 1 - \frac{v_n - c_n}{d_n - c_n} \right\}$$

является вогнутой функцией. Отсюда, в силу $f_D(v_1, v_2, ..., v_n) - f_{min} \geq 0 \ \ \forall (v_1, v_2, ..., v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$, имеем вогнутость функции $f_C(x_1, x_2, ..., x_n)$ на $\mathbb{P}_c^d$ как сумму некоторых вогнутых функций. Для завершения доказательства леммы остается показать, что

$$f_C(a_1, a_2, ..., a_n) = f_D(a_1, a_2, ..., a_n) \ \ \forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in V(\mathbb{P}_c^d).$$

Действительно, в силу

$$(2\frac{v_k - c_k}{d_k - c_k} - 1) \cdot \frac{a_k - c_k}{d_k - c_k} + 1 - \frac{v_k - c_k}{d_k - c_k} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_k = v_k \\ 0, \text{ если } a_k \neq v_k \end{cases},$$

где $k \in \{1, 2, ..., n\}$ и $a_k, v_k \in \{c_k, d_k\}$, имеем

$$f_C(a_1, a_2, ..., a_n) = f_{min} + (f_D(a_1, a_2, ..., a_n) - f_{min}) \cdot 1+$$

$$+ \sum_{\substack{(v_1, v_2, ..., v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d) \\ (v_1, v_2, ..., v_n) \neq (a_1, a_2, ..., a_n)}} (f_D(v_1, v_2, ..., v_n) - f_{min}) \cdot 0 = f_D(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. Нетрудно проверить, что построенное вогнутое продолжение вида (3.2) дискретной функции f_D, вообще говоря, не является минимумом.

Действительно, если $n = 2$, $\mathbb{P}_c^d = [0, 1] \times [0, 1]$ и

$$f_D(b_1, b_2) = f_B(b_1, b_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } (b_1, b_2) \in \{(0, 0), (0, 1)\} \\ 1, & \text{если } (b_1, b_2) \in \{(1, 0), (1, 1)\} \end{cases},$$

то, с одной стороны, ввиду леммы 2, имеем, что

$$f_C(x_1, x_2) = \min(x_1, 1 - x_2) + \min(x_1, x_2)$$

есть вогнутое продолжение на $[0, 1]^2$ булевой функции $f_B(b_1, b_2)$, но, с другой стороны, нетрудно заметить, что функция $f_C^*(x_1, x_2) = x_1$ также является вогнутым продолжением на $[0, 1]^2$ булевой функции $f_B(b_1, b_2)$ и удовлетворяет неравенству $f_C^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < f_C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Далее обоснуем, что для произвольной дискретной функции вида $f_D : V(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a, b), \mathbb{P}_c^d\}$, существует бесконечно много функций, каждая из которых является ее вогнутым продолжением на $\mathbb{G}$. Для этого достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Любая дискретная функция вида $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$ имеет бесконечно много вогнутых продолжений на $\mathbb{P}_c^d$.*

Доказательство.

Существование. Согласно лемме 2, функция f_C, определенная формулой (3.2), является вогнутым продолжением на $\mathbb{P}_c^d$ дискретной функции f_D.

Бесконечность. Докажем от противного: пусть имеется конечное множество $S_C = \{g_1(x_1, x_2, ..., x_n), g_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_N(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ вогнутых продолжений дискретной функции f_D на $\mathbb{P}_c^d$. Тогда $\exists N_0 \in \{1, 2, ..., N\}$ такое, что $\forall k \in \{1, 2, ..., N\}$ справедливо неравенство

$$g_{N_0}\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}, ..., \frac{c_n + d_n}{2}\right) \geq g_k\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}, ..., \frac{c_n + d_n}{2}\right). \tag{3.3}$$

Рассмотрим специальную функцию вида

$$g_{new}(x_1, x_2, ..., x_n) = g_{N_0}(x_1, x_2, ..., x_n)+$$

$$+A \cdot \min(x_1 - c_1, d_1 - x_1, x_2 - c_2, d_2 - x_2, ..., x_n - c_n, d_n - x_n), \qquad (3.4)$$

где A — любое положительное число. Нетрудно заметить, что, во-первых, функция g_{new} также является вогнутым продолжением на $\mathbb{P}_c^d$ дискретной функции f_D, а во-вторых, в силу $A > 0$, выполнено неравенство

$$g_{N_0}\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}, ..., \frac{c_n + d_n}{2}\right) < g_{new}\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}, ..., \frac{c_n + d_n}{2}\right),$$

следовательно, ввиду выбора N_0, предъявленное g_{new} — вогнутое продолжение на $\mathbb{P}_c^d$ дискретной функции f_D — не принадлежит множеству S_C. Получили противоречие. Теорема доказана. □

Замечание 2. Теорема 1 также доказывает, что для произвольной дискретной функции $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$ не существует максимума среди ее вогнутых продолжений на $\mathbb{P}_c^d$.

Теперь обоснуем, что для произвольной дискретной функции $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$ существует минимум среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{P}_c^d$, а именно докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для произвольной дискретной функции вида*

$$f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$$

вещественная функция вида

$$f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{\left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)},...,\lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)} \Bigg[$$

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1, z_2, ..., z_n)\Bigg] \qquad (3.5)$$

является единственным минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{P}_c^d$.

Доказательство. В силу леммы 1, компактности множества

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$$

при $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{P}_c^d$ и непрерывности функции

$$s\left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) = \sum_{(z_1,z_2,...,z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1, z_2, ..., z_n)$$

по теореме Вейерштрасса имеем, что в любой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}_c^d$ функция f_{NR} корректно определена. Покажем, что если $g_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольное вогнутое продолжение дискретной функции f_D на $\mathbb{P}_c^d$, то выполнено

$$g_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f_{NR}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}_c^d. \qquad (3.6)$$

Пусть $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{P}_c^d$. Тогда, в силу выпуклости множества $\mathbb{P}_c^d$

$$\exists : \lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)} :$$

$$\left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*).$$

Теперь, в силу вогнутости функции g_C и неравенства Йенсена [23], получим

$$g_C(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = g_C\left(\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot (z_1, z_2, ..., z_n)\right) \geq$$

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot g_C(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \Big[\lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)}$$

$$\cdot f_D(z_1, z_2, ..., z_n)\Big] \quad \forall \left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*).$$

В частности,

$$g_C(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geq f_{NR}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) =$$

$$\max_{\left(\lambda_{(c_1,...,c_n)},...,\lambda_{(d_1,...,d_n)}\right)\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*,...,x_n^*)} \left[\sum_{(z_1,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,...,z_n)} \cdot f_D(z_1, ..., z_n)\right].$$

В силу произвольности $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, из последнего неравенства получим справедливость (3.6).

Остается показать, что функция f_{NR} также является вогнутым продолжением на $\mathbb{P}_c^d$ дискретной функции f_D. Для этого достаточно показать справедливость следующих свойств:

1°. $f_{NR}(a_1, a_2, ..., a_n) = f_D(a_1, a_2, ..., a_n) \quad \forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$.

2°. Функция $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве $\mathbb{P}_c^d$ вогнута.

Проверим эти свойства:

1°. Действительно,

$$f_{NR}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_{\left(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)},...,\lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\right)\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(a_1,a_2,...,a_n)} \Bigg[$$

$$\left. \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n) \right] =$$

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)\setminus\{(a_1,a_2,...,a_n)\}} 0 \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n) +$$

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)=(a_1,a_2,...,a_n)} 1 \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n) = f_D(a_1,a_2,...,a_n),$$

так как, согласно лемме 1, для любого $(a_1,a_2,...,a_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)$ множество $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(a_1,a_2,...,a_n)$ состоит из одного элемента, в котором на месте $\lambda_{(a_1,a_2,...,a_n)}$ стоит единица, а на остальных местах нули.

2°. Пусть $x^*, x^{**} \in \mathbb{P}_c^d$ и $\alpha \in [0,1]$. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса, существуют

$$(\lambda^*_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda^*_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda^*_{(d_1,d_2,...,d_n)}) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$$

и $(\lambda^{**}_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda^{**}_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda^{**}_{(d_1,d_2,...,d_n)}) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1^{**}, x_2^{**}, ..., x_n^{**})$ такие, что

$$f_{NR}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^*_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n),$$

$$f_{NR}(x_1^{**}, x_2^{**}, ..., x_n^{**}) = \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda^{**}_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n).$$

Тогда $\quad f_{NR}(\alpha x^* + (1-\alpha)x^{**}) =$

$$f_{NR}(\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_1^{**}, \alpha x_2^* + (1-\alpha)x_2^{**}, ..., \alpha x_n^* + (1-\alpha)x_n^{**}) =$$

$$\max_{(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)},...,\lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)})\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(\alpha x^* + (1-\alpha)x^{**})} \Bigg[$$

$$\left. \sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n) \right] \geq$$

$$\sum_{(z_1,z_2,...,z_n)\in V(\mathbb{P}_c^d)} (\alpha \cdot \lambda^*_{(z_1,z_2,...,z_n)} + (1-\alpha) \cdot \lambda^{**}_{(z_1,z_2,...,z_n)}) \cdot f_D(z_1,z_2,...,z_n) =$$

$$\alpha \cdot f_{NR}(x_1^*, ..., x_n^*) + (1-\alpha) \cdot f_{NR}(x_1^{**}, ..., x_n^{**}) = \alpha \cdot f_{NR}(x^*) + (1-\alpha) \cdot f_{NR}(x^{**}),$$

так как нетрудно заметить, что справедливо включение

$$\big(\alpha\lambda^*_{(c_1,c_2,...,c_n)} + (1-\alpha)\lambda^{**}_{(c_1,c_2,...,c_n)}, ..., \alpha\lambda^*_{(d_1,d_2,...,d_n)} + (1-\alpha)\lambda^{**}_{(d_1,d_2,...,d_n)}\big) \in$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_1^{**}, \alpha x_2^* + (1-\alpha)x_2^{**}, ..., \alpha x_n^* + (1-\alpha)x_n^{**}).$$

Из произвольности $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $(x_1^{**}, x_2^{**}, ..., x_n^{**})$ следует вогнутость функции f_{NR} на $\mathbb{P}_c^d$.

Единственность. В силу произвольности $g_C(x_1, x_2, ..., x_n)$, единственность следует из (3.6). Теорема доказана. □

Замечание 3. Ввиду леммы 1, используя схему, приведенную в [8;24], нетрудно проверить, что функция f_{NR}, определенная формулой (3.5), непрерывна на $\mathbb{P}_c^d$.

В конце работы, как следствие теорем 1 и 2, отметим факт, который, с одной стороны, непосредственно следует из теорем 1 и 2, а с другой стороны, является обобщением результата, приведенного в [3].

Следствие 1. *Любая дискретная функция вида $f_D : V(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n(a,b)\}$, имеет бесконечно много вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$, причем вещественная функция вида*

$$f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{G}}(x_1, x_2, ..., x_n)} \left[\sum_{z \in V(\mathbb{G})} \lambda_{(z_1, z_2, ..., z_n)} \cdot f_D(z_1, z_2, ..., z_n) \right]$$

является единственным минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{G}$.

4. Заключение

Полученные результаты, в частности, могут быть использованы при преобразовании систем булевых и псевдобулевых уравнений в задачи численной оптимизации и последующем поиске их решений.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за конструктивные замечания и предложения, позволившие существенно улучшить качество статьи.

Список источников

1. Баротов Д. Н. Выпуклое продолжение булевой функции и его приложения // Дискретный анализ и исследование операций. 2024. Т. 31, № 1. С. 5–18.
2. Баротов Д. Н. О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций // Математические заметки. 2024. Т. 115, № 4. С. 533–551.
3. Баротов Д. Н. Вогнутые продолжения булевых функций и некоторые их свойства и приложения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49, С. 105–123. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.105
4. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 145. С. 20–28.

5. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения // Вычислительные методы и программирование. 2023. Т. 24. 10–23. https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r102
6. Баротов Д. Н., Музафаров Д. З., Баротов Р. Н. Об одном методе решения систем булевых алгебраических уравнений // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2021. Т. 8, № 1. С. 17–23.
7. Баротов Д. Н., Музафаров Д. З., Баротов Р. Н. Алгебраический метод проверки четности битов // Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2021). Вологда : Вологод. гос. ун-т, 2021. С. 193–195.
8. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М. : Наука, 1990. 488 с.
9. Файзуллин Р. Т., Дулькейт В. И., Огородников Ю. Ю. Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 285–294.
10. Abdel-Gawad A. H., Atiya A. F., Darwish N. M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain // Information Sciences. 2010. Vol. 180, N 2. P. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010
11. Bard G. V. Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis. University of Maryland, College Park, 2007.
12. Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations / D. Barotov, Osipov A., S. Korchagin, E. Pleshakova, D. Muzafarov, R. Barotov, D. Serdechnyy // Mathematics. 2021. Vol. 9, 3299. https://doi.org/10.3390/math9243299
13. Barotov D. N. Target Function without Local Minimum for Systems of Logical Equations with a Unique Solution // Mathematics. 2022. Vol. 10, 2097. https://doi.org/10.3390/math10122097
14. Barotov D. N., Barotov R. N. Polylinear Transformation Method for Solving Systems of Logical Equations // Mathematics. 2022. Vol. 10, 918. https://doi.org/10.3390/math10060918
15. The Development of Suitable Inequalities and Their Application to Systems of Logical Equations / D. N. Barotov, R. N. Barotov, V. Soloviev, V. Feklin, D. Muzafarov, T. Ergashboev, K. Egamov // Mathematics. 2022. Vol. 10, 1851. https://doi.org/10.3390/math10111851
16. Brown F. M. Boolean Reasoning: The logic of Boolean Equations. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1990.
17. Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing / E. Burek, M. Wronski, K. Mank, M. Misztal // IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing. 2022. Vol. 10, N 2. P. 678–689.
18. Faugere J. C., Joux A. Algebraic cryptanalysis of hidden field equation (HFE) cryptosystems using Grobner bases // Annual International Cryptology Conference. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2003. P. 44–60.
19. Faugere J. C. A new efficient algorithm for computing Grobner bases (F4) // Journal of pure and applied algebra. 1999. Vol. 139, N 1-3. P. 61–88. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00005-5
20. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 1994. Vol. 6, N 3. P. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864

21. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem // Journal of Computer Science and Technology. 1999. Vol. 14, N 1. P. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF02952482
22. Hammer P. L., Rudeanu S. Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. Berlin : Springer Verlag, 1968.
23. Jensen J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes // Acta mathematica. 1906. Vol. 30, N 1. P. 175–193. https://doi.org/10.1007/BF02418571
24. Meyer R. R. Continuity properties of linear programs. Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin 53706, Technical Report, № 373, 1979.
25. Converting of Boolean Expression to Linear Equations, Inequalities and QUBO Penalties for Cryptanalysis / A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, G. B. Lesovik // Algorithms. 2022. Vol. 15, 33. https://doi.org/10.3390/a15020033

References

1. Barotov D.N. Convex continuation of a Boolean function and its applications. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2024, vol. 18, no. 1, pp. 1–9. https://doi.org/10.1134/S1990478924010010
2. Barotov D.N. On the existence and properties of convex continuations of Boolean functions. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 115, no. 4, pp. 489–505. https://doi.org/10.1134/S0001434624030210
3. Barotov D.N. Concave continuations of Boolean functions and some of their properties and applications. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 105–123. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.105 (in Russian)
4. Barotov D.N., Barotov R.N. Construction of smooth convex extensions of Boolean functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, no. 145, pp. 20–28. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28 (in Russian)
5. Barotov D.N., Barotov R.N. Polylinear Continuations of Some Discrete Functions and an Algorithm for Finding Them. *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie)*, 2023, vol. 24, pp. 10–23. https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r102 (in Russian)
6. Barotov D.N., Muzafarov D.Z., Barotov R.N. On one method for solving systems of Boolean algebraic equations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2021, vol. 8, no. 1, pp. 17–23. (in Russian)
7. Barotov D.N., Muzafarov D.Z., Barotov R.N. Algebraic method for checking bit parity. *Intellectual information technologies and intellectual business*. Vologda, Vologda State University Publ., 2021, pp. 193–195. (in Russian)
8. Minu M. *Mathematical programming. Theory and algorithms*. Moscow, Nauka Publ., 1990, 488 p. (in Russian)
9. Faizullin R.T., Dul'keit V.I., Ogorodnikov Yu.Yu. Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.*, 2013, vol. 19, no. 2. pp. 285–294. (in Russian)
10. Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain.*Information Sciences*, 2010, vol. 180, no. 2, pp. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010

11. Bard G.V. *Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis*. University of Maryland, College Park, 2007.
12. Barotov D., Osipov A., Korchagin S., Pleshakova E., Muzafarov D., Barotov R., Serdechnyy D. Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations. *Mathematics*, 2021, vol. 9, 3299. https://doi.org/10.3390/math9243299
13. Barotov D.N. Target Function without Local Minimum for Systems of Logical Equations with a Unique Solution. *Mathematics*, 2022, vol. 10, 2097. https://doi.org/10.3390/math10122097
14. Barotov D.N., Barotov R.N. Polylinear Transformation Method for Solving Systems of Logical Equations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, 918. https://doi.org/10.3390/math10060918
15. Barotov D.N., Barotov R.N., Soloviev V., Feklin V., Muzafarov D., Ergashboev T., Egamov K. The Development of Suitable Inequalities and Their Application to Systems of Logical Equations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, 1851. https://doi.org/10.3390/math10111851
16. Brown F.M. *Boolean Reasoning: The logic of Boolean Equations*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1990.
17. Burek E., Wronski M., Mank K., Misztal M. Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, 2022. vol. 10, no. 2. pp. 678–689. https://doi.org/10.1109/TETC.2022.3143152
18. Faugere J.C., Joux A. Algebraic cryptanalysis of hidden field equation (HFE) cryptosystems using Grobner bases. *Annual International Cryptology Conference*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 44–60.
19. Faugere J.C. A new efficient algorithm for computing Grobner bases (F4). *Journal of pure and applied algebra*, 1999, vol. 139, no. 1-3, pp. 61–88. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00005-5
20. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 1994, vol. 6, no. 3, pp. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864
21. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem. *Journal of Computer Science and Technology*, 1999, vol. 14, no. 1, pp. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF02952482
22. Hammer P.L., Rudeanu S. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Springer Verlag, Berlin, 1968.
23. Jensen J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, 1906, vol. 30, no. 1, pp. 175–193. https://doi.org/10.1007/BF02418571
24. Meyer R.R. *Continuity properties of linear programs*. Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin 53706, Technical Report, no. 373, 1979.
25. Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B. Converting of Boolean Expression to Linear Equations, Inequalities and QUBO Penalties for Cryptanalysis. *Algorithms*, 2022, vol. 15, 33. https://doi.org/10.3390/a15020033

Об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович, ст. преп., Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, 109456, Российская Федерация, DNBarotov@fa.ru, https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

About the authors

Dostonjon N. Barotov, Senior Lecturer, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, 109456, Russian Federation, DNBarotov@fa.ru, https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

Поступила в редакцию / Received 28.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 17.06.2024
Принята к публикации / Accepted 22.10.2024