Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 152—169

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 510.643; 517.11
MSC 03F25, 03B35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152

Базис глобально допустимых правил логики S4

В. В. Римацкий[1]✉

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ Gemmeny@rambler.ru

Аннотация. Задание базовых правил вывода имеет фундаментальное значение для логики. Наиболее общим вариантом возможных правил вывода являются допустимые правила вывода: в логике L правило вывода допустимо, если множество теорем L замкнуто относительно данного правила.

Изучение допустимых правил вывода было стимулировано постановкой проблем о разрешимости по допустимости (Фридман) и наличии конечного базиса допустимых правил (Кузнецов) в логике Int. В начале 2000-х гг. для большинства базовых неклассических логик и некоторых табличных логик проблема Фридмана – Кузнецова была решена с помощью описания явного базиса для допустимых правил.

Следующим этапом изучения допустимых правил вывода неклассических логик можно считать понятие глобально допустимого правила вывода. *Глобально допустимыми правилами в логике L называем те правила вывода, которые допустимы сразу во всех (финитно аппроксимируемых) расширениях данной логики.* Такие правила развивают и обобщают понятие допустимого правила вывода.

Исследование посвящено изучению базисов для глобально допустимых правил логики $S4$. Описан алгоритм построения (конструкция) множества правил вывода в редуцированной форме, образующих базис для глобально допустимых в логике $S4$ правил вывода.

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, глобально допустимые правила вывода

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 23-21-00213).

Ссылка для цитирования: Римацкий В. В. Базис глобально допустимых правил логики S4 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 152–169.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152

Research article

Basis of Globally Admissible Rules for Logic S4

Vitaliy V. Rimatskiy[1✉]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ Gemmeny@rambler.ru

Abstract. Setting the basic rules of inference is fundamental to logic. The most general variant of possible inference rules are admissible inference rules:in logic L, a rule of inference is admissible if the set of theorems L is closed with respect to this rule.
The study of admissible inference rules was stimulated by the formulation of problems about decidability by admissibility (Friedman) and the presence of a finite basis of admissible rules (Kuznetsov) in Int logic. In the early 2000s, for most basic non-classical logics and some tabular logics, the Fridman-Kuznetsov problem was solved by describing an explicit basis for admissible rules.
The next stage in the study of admissible inference rules for non-classical logics can be considered the concept of a globally admissible inference rule. *Globally admissible rules in the logic L are those inference rules that are admissible simultaneously in all (with finite model property) extensions of the given logic.* Such rules develop and generalize the concept of an admissible inference rule.
The presented work is devoted to the study of bases for globally admissible rules of logic $S4$. An algorithm for constructing a set of inference rules in a reduced form was described, forming the basis for globally admissible inference rules in $S4$ logic.

Keywords: modal logic, frame and model Kripke, admissible and globally admissible inference rule

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Scientific Foundation (Project No.23-21-00213).

For citation: Rimatskiy V. V. Basis of Globally Admissible Rules for Logic S4. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 152–169. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152

1. Введение

Задание базовых правил вывода имеет фундаментальное значение для логики. Наиболее общим вариантом возможных правил вывода являются, введенные Лоренценом в 1955 г. [10], допустимые правила вывода. В логике L правило вывода допустимо, если множество теорем L замкнуто относительно данного правила. Прямо из определения следует, что совокупность всех допустимых правил — наиболее общий концепт правил, совместимых с логикой L, которые можно добавить к логике, не изменяя множество доказуемых в L теорем, при этом значительно усилив ее дедуктивную силу.

Изучение допустимых правил вывода было стимулировано проблемой Фридмана [5]: существует ли алгоритм распознавания допустимости правила вывода в интуиционистской логике? Для широкого класса неклассических логик ($Int, KC, K4, S4, S5, S4.3$ и др.) проблема разрешимости по допустимости правил вывода была решена В. В. Рыбаковым в середине 1980-х гг. (см., например, [4; 14]). Однако разрешающий алгоритм оказался вычислительно сложным и громоздким и не позволял описать допустимые правила в легко обозримом виде.

К проблеме А. Кузнецова (1975 г.) восходит другой способ описания всех допустимых в логике правил: задание некоторого (конечного, явного) набора допустимых правил, из которого все остальные допустимые в логике правила будут выводиться как следствия, т. е. задание (конечного или явного) базиса. Наличие такого базиса позволяет вывести из него все правила, допустимые в логике. Оказалось, что большинство базовых логик не имеют конечного базиса для допустимых правил вывода (см. [14]). Для широкого класса логик (включая большинство базовых и некоторые табличные логики) явный базис допустимых правил был получен в [7–9; 12; 13]в начале 2000-х гг.

Помимо использования допустимых правил вывода для описания нетривиальных семантических свойств неклассических логик (см. [3;6]), можно также предложить следующий подход. Следующим этапом изучения допустимых правил вывода неклассических логик стало глобально допустимое правило вывода, т. е. необходимо расширить исследование допустимых правил и рассмотреть правила, допустимые не только в заданной модальной логике L или $S4$, а в целом классе ее финитно аппроксимируемых расширений. Понятие глобально допустимого правила вывода было введено в 2005 г. в [15]. *Глобально допустимыми правилами в логике L называем те правила вывода, которые допустимы сразу во всех (финитно аппроксимируемых) расширениях данной логики. Базисом глобально допустимых правил вывода в логике называется заданный набор правил, которые глобально допустимы в логике L, и все глобально допустимые в данной логике правила выводятся из них.* Такие правила развивают и обобщают понятие допустимого правила вывода.

На сегодняшний день известно относительно немного результатов, посвященных изучению глобально допустимых правил вывода. В короткой заметке [15] была доказана редукция глобальной допустимости к табличной допустимости: правило глобально допустимо в логике L, если и только если оно допустимо во всех табличных расширениях логики L. В [2] получен явный (бесконечный) базис правил вывода, глобально допустимых в модальных предтабличных логиках $PT2, PT3$. В [3] был описан явный базис глобально допустимых правил для (бесконечного класса) расширений логики $S4$ со слабым свойством ко-накрытий.

Представленная работа продолжает изучение глобально допустимых правил логики $S4$. Был описан алгоритм построения (конструкция) базиса для глобально допустимых правил вывода в логике $S4$ (в редуцированной форме). Основной результат заключается в доказательстве того, что полученные правила глобально допустимы в логике $S4$ и любое глобально допустимое в логике $S4$ правило выводится из заданного набора. Таким образом, описан конструктивный (рекурсивный) базис для глобально допустимых в логике $S4$ правил вывода.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства рекомендуем [14]). Далее мы рассматриваем только логики, расширяющие $S4$, поэтому все фреймы рефлексивны и транзитивны.

Фрейм $F := \langle W, R\rangle$ есть пара, где W — непустое множество и R — бинарное отношение на множестве W. Базисное множество и сам фрейм далее часто будем обозначать одной и той же буквой. Если $\langle W, R\rangle$ — некоторый фрейм, то непустое множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy\&yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным,* если $|C| > 1$; в противном случае — *одноэлементным, или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Фрейм $\mathcal{F} = \langle W_1, R_1\rangle$ называется *открытым подфреймом* фрейма $\mathcal{G} = \langle W_2, R_2\rangle$ (обозначаем $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$), если выполняется

$$W_1 \subseteq W_2,\ R_2 \cap W_1^2 = R_1 \text{ и } \forall a \in W_1\, \forall b \in W_2\, (aR_2b \Longrightarrow b \in W_1).$$

Моделью Крипке, или просто моделью, будем называть тройку $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ V\rangle$, где $\mathcal{F} := \langle W, R\rangle$ — фрейм и V — означивание множества пропозициональных переменных P на фрейме $\mathcal{F}$, т. е. $V : P \to 2^W$. Если $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ — модели, то модель $\mathcal{M}_1$ называется *открытой подмоделью модели* $\mathcal{M}_2$ (обозначаем $\mathcal{M}_1 \sqsubseteq \mathcal{M}_2$), если: 1) фрейм $\langle W_1,\ R_1\rangle$ — открытый подфрейм фрейма $\langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$ и $\forall p \in Dom(V_1)\ V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$.

Отображение фреймов $f : \langle F,\ R\rangle \to \langle G,\ S\rangle$ называется *p-морфизмом,* если выполняется: 1) $aRb \Longrightarrow f(a)Sf(b)$; 2) $f(x)Sz \Longrightarrow \exists y \in F : f(y) = z \,\&\, xRy$. Отображение $f : \mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle \to \mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ называем также *p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1$ в модель $\mathcal{M}_2$, если: 1) f есть p-морфизм фрейма $\mathcal{F}_1 = \langle W_1,\ R_1\rangle$ во фрейм $\mathcal{F}_2 = \langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) означивания V_1, V_2 определены для одного и того же множества переменных; 3) $\forall\, p \in Dom(V_1),\ \forall a \in W_1 (a \models_{V_1} p \iff f(a) \models_{V_2} p)$.

Основным свойством взятия открытых подмоделей и p-морфизмов является сохранение истинности формул.

Утверждение 1. [14] *1) Если $\mathcal{M}_1$ — открытая подмодель модели $\mathcal{M}_2$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из* *множества $Dom(V_1)$, $\mathcal{M}_2 \models \alpha$ влечет $\mathcal{M}_1 \models \alpha$; 2) если отображение f есть p-морфизм модели $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$ на модель $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, справедливо $\forall a\in W_1(a\models_{V_1} \alpha \iff f(a) \models_{V_2} \alpha)$.*

Пусть $\mathcal{F}_i = \langle W_i,\ R_i\rangle$, $i \in I$ — семейство попарно не пересекающихся фреймов, т. е. $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j \in I$. *Прямым объединением* этого семейства называется фрейм $\sqcup_{i\in I}\mathcal{F}_i = \langle W,\ R\rangle$, где $W = \cup_{i\in I}W_i$, $R = \cup_{i\in I}R_i$. Прямое объединение моделей определяется аналогично.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является λ-*фреймом*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ — множество формул, истинных на $\mathcal{F}$, есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

По Лемме 2.5.26 [14] прямое объединение фреймов (или моделей) сохраняет истинность формул: $\sqcup_{i\in I}\mathcal{F}_i \models_V \alpha \iff \forall i\,(\mathcal{F}_i \models_{V_i} \alpha)$. Значит, прямое объединение λ-фреймов также являетcя λ-фреймом.

Будем говорить, что сгустки $C_1, C_2, \dots, C_n$ некоторого фрейма F *попарно не сравнимы по отношению* R, если справедливо: $\forall C_i, C_j, 1 \leq i,j \leq n,\ \forall x \in C_i, y \in C_j(\neg(xRy)\&\neg(yRx))$, т. е. из элементов одного сгустка данного множества сгустков недостижимы по отношению R элементы другого сгустка. Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.*

Пусть $\mathcal{F} = \langle F, R\rangle$ — некоторый фрейм. Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x|aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент a (сгусток $C(a)$) *порождает как корень* подфрейм a^R ($C(a)^R$ соответственно) фрейма F. Аналогично для множества $X \subseteq F$ определяем $X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$ и $X^{<R} = X^R\setminus X$, и также будем говорить, что множество $X \subseteq F$ порождает подфрейм X^R или $X^{<R}$ соответственно. Далее, помимо стандартного обозначения фреймов прописными латинскими буквами ($F,\ \mathcal{F}, G, \dots$), также будем использовать и обозначения $a^R,\ C^R,\ X^R, \dots$ для подфреймов (фреймов), порожденных элементом $a \in F$, сгустком $C \in F$ или множеством $X \subseteq F$ соответственно.

Фрейм $\mathcal{F}$ — *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$, такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент a (и сгусток $C(a)$) называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Сгусток $C(a)$ из $\mathcal{F}$ есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R\setminus C(a) = X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$. Говорим, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq \mathcal{F}$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. λ-*ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень λ-фрейм.

Глубиной элемента x фрейма (модели) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Подмножество $\mathcal{X}$ заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульно определимым, или формульным*, если существует формула α, такая, что $\forall x \in \mathcal{M}\big[x \Vdash_V \alpha \iff x \in \mathcal{X}\big]$. Соответственно, *элемент* $x \in \mathcal{M}$ *является формульным*, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$ говорим, что *r истинно на $\mathcal{F}$ при означивании V* (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только $\forall x \in \mathcal{F}\,\forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{F}\,(x \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathcal{F}$*, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathcal{F} \models r$).

Правило вывода

$$r = \{\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_k(x_1, \ldots, x_n)/\beta(x_1, \ldots, x_n)\}$$

называется *допустимым* в логике λ [обозначаем $r \in Ad(\lambda)$], если для любых формул $\delta_1, \ldots, \delta_n$ из $(\forall j \alpha_j(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \lambda)$ следует $\beta(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \lambda$.

Модель $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики λ* тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1, \ldots, p_n$ выполняется $\alpha \in \lambda \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$ (см. Опр. 3.3.2 [14]).

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя гл. 3 [14], опишем конструкцию и свойства этой модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n, и все элементы каждого сгустка имеют попарно различные означивания. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m, и добавим к этой антицепи снизу копию каждого сгустка C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии: 1) фрейм, порожденный сгустком C как корнем, является λ-фреймом: $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фрейм; 2) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1 как модель.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства этой модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2 (Th. 3.3.6, 3.3.7 [14]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели — формульный.*

Утверждение 3 (Th. 3.3.3 [14]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, правило вывода r допустимо в λ, если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных r.*

В данном исследовании нам также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что *правило r имеет редуцированную форму*, если $r := \{\bigvee_{1\leq j\leq m} \phi_j / x_0\}$, где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i},\ a_i, b_i \in \{0,1\};\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Для каждого члена ϕ_j посылки правила в редуцированной форме определим также множества
$\theta_1(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 0\}$; $\theta_2(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 0\}$.
$\theta_3(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 1\}$; $\theta_4(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 1\}$.
Для правила r в редуцированной форме множество всех формул ϕ_j в посылке обозначим как $Pr(r)$.

Утверждение 4 (см. [14]). *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на $S4$-алгебрах и $S4$-фреймах; R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4$.*

Напомним определение глобально допустимого правила вывода, введенное в [15]. Правило вывода *r глобально допустимо в логике L*, если r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики L*, если: 1) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; 2) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L.

Основным результатом [15] была редукция глобальной допустимости правила в логике $S4(Int)$ к допустимости во всех табличных расширениях этой логики.

Теорема 1 (см. Т.3 [15]). *Правило вывода r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $S4(Int)$ $\iff$ r допустимо во всех табличных логиках (в том числе порожденных конечными корневыми $S4$-фреймами), расширяющих $S4(Int)$.*

3. Вспомогательный результат (Р-свойство)

Используя результаты [1], можно рассмотреть следующие случаи и далее рассматривать правила, модели $\mathfrak{M}(r, X)$ которых удовлетворяют некоторым свойствам (в остальных случаях можно сразу утверждать глобальную (не-)допустимость заданного правила в логике $S4$ и тем самым ограничить множество возможных случаев).

Пусть задано правило r в редуцированной форме и модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для этого правила.

(1) Если для всех $\phi \in Pr(r)$ выполняется $\theta_1(\phi) \neq \theta_2(\phi)$, то данное правило глобально допустимо в логике $S4$.

Действительно, в этом случае посылка правила опровергается на вырожденных сгустках первого слоя n-характеристической модели (на таких сгустках должно выполняться $\theta_1(\phi) = \theta_2(\phi)$).

(2) Существует хотя бы одна формула $\phi_0 \in Pr(r)$, для которой выполняется $x_0 \notin \theta_1(\phi_0)$. При этом $\theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)$.

В противном случае заключение правила везде будет истинно, т. е. правило истинно на любой конечной модели, и значит, по лемме 3 [1] глобально допустимо. При равенстве $\theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0)$ по теореме 6 [1] правило не допустимо глобально в логике $S4$.

(3) локальная компонента $K_c(\phi_0) = \phi_0^R \cup \phi^1 \cup \bigcup\{\phi \in \mathfrak{M}(r, X) : \exists z \in (\phi_0^R \cup \phi^1)(\phi R z)\} \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$, где ϕ^1 порождает вырожденный сгусток первого слоя, не насыщенна по ко-накрытиям, т. е. существует хотя бы одна нетривиальная антицепь элементов модели $K_c(\phi_0)$ без ко-накрытия. Иначе, по теореме 2 [1] правило r не допустимо глобально в $S4$.

Таким образом, далее рассматриваем правила вывода в редуцированной форме, модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для которых удовлетворяет свойствам:

(1) $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) : \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$, (2) $\exists\, \phi_0 \in Pr(r) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0))$, (3) локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщенна по ко-накрытиям.

Как показывают примеры, правило, модель $\mathfrak{M}(r, X)$ которого удовлетворяет этим свойствам, может быть как глобально допустимым в логике $S4$, так и нет.

Теорема 2. *Пусть модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет следующим свойствам: (1) $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) : \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$, (2) $\exists\, \phi_0 \in Pr(r) : x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)$, (3) локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщенна по ко-накрытиям. Пусть также для любого непустого множества дизъюнктов $Z \subseteq X$ существует нетривиальная антицепь $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$, такая, что:*

(1) существует нетривиальная антицепь $\mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0) : f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R$ для некоторого p-морфизма f,

(2) $\exists\phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$ *— ко-накрытие для* $\mathcal{Y}$ *в* $K_c(\phi_0)$*; т. е.* $\theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_1(\phi_{\mathcal{Y}}) \cup \bigcup_{\mathcal{Y}}\{\theta_2(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$ & $\theta_4(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_3(\phi_{\mathcal{Y}}) \cap \bigcap_{\mathcal{Y}}\{\theta_4(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$,

(3) антицепь $\mathcal{A}$ *не имеет ко-накрытия в* $\mathfrak{M}(r, X)$*, т. е. выполняется:*
$\forall\phi_a \in Pr(r) \quad (\theta_2(\phi_a) \neq \theta_1(\phi_a)\cup\bigcup_{\mathcal{A}}\theta_2(\phi_i)$ & $\theta_4(\phi_a) \neq \theta_3(\phi_a)\cap\bigcap_{\mathcal{A}}\theta_4(\phi_i))$.

Тогда правило r *глобально допустимо в* $S4$.

При этом будем говорить, что модель $\mathfrak{M}(r, X)$*, удовлетворяющая условиям этой теоремы, имеет* p**-свойство.**

Доказательство. Пусть данное правило не допустимо в некоторой табличной логике λ. Тогда по теореме 3.5.1 [14] правило r опровергается при некотором формульном означивании V на характеристической модели $Ch_m(\lambda)$ для некоторого m: $\forall\, a \in Ch_m(\lambda)\ a \models_V \phi_j,\ \phi_j \in Pr(r)$; $\exists\, b \in Ch_m(\lambda) : b \not\models_V x_0$.

Выполним теперь сжимающий p-морфизм модели $Ch_m(\lambda)$ (т .е. послойно склеиваем все дубли при заданном означивании). Рассмотрим также локальную компоненту $K_c(b) = b^R \cup \{e\} \bigcup\{x : xRz \& z \in b^R \cup \{e\}\}$, где элемент $e \in S_1(Ch_m(\lambda))$ порождает одноэлементный сгусток первого слоя (такой элемент существует по построению модели). Данная локальная компонента является открытой подмоделью модели $Ch_m(\lambda)$. Следовательно, по свойству открытой подмодели, правило r опровергается на ней.

Пусть множество Z — это множество членов посылки правила, имеющих непустое множество истинности на $K_c(b)$, т. е. $Z := \{\phi \in Pr(r) : V(\phi) \cap K_c(b) \neq \emptyset\}$.

Утверждение 5. $K_c(b) \cong \mathfrak{M}(r, Z)$

Доказательство. (I) Пусть элемент $t \in S_1(K_c(b))$ & $t \models_V \phi_t$. Такая формула из посылки уникальна для данного элемента (т. е другие формулы из посылки на нем не могут быть истинны) по определению модели $\phi_t \in \mathfrak{M}(r, Z)$.

a) Если мощность сгустка $C(t)$ равна 1 (т. е. данный элемент порождает вырожденый сгусток первого слоя), то из расположения элемента заключаем: $\theta_1(\phi_t) = \theta_2(\phi_t),\ \theta_3(\phi_t) = \theta_4(\phi_t) \qquad (*)$.

Если мощность сгустка $C(\phi_t)$ также равна 1, то изоморфизм сгустков доказан. Если мощность сгустка $C(\phi_t)$ строго больше 1 или его глубина строго больше 1, то существует элемент $\phi_a \in \mathfrak{M}(r, Z)$, достижимый из ϕ_t, т. е. $\theta_2(\phi_a) \subseteq \theta_2(\phi_t)$. Тогда для некоторой переменной $p \in \theta_1(\phi_a)$ в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ будет выполняться $\phi_t \models_V \Diamond p$ & $p \notin \theta_2(\phi_t)$ или $\phi_t \models_V \neg\Diamond p$ & $p \notin \theta_4(\phi_t)$, что противоречит $(*)$.

b) Если мощность сгустка $C(t)$ сторого больше 1, то существуют элементы $a_1, \dots a_k (\neq t) \in C(t), k \geq 1$. При этом выполнено $a_i \models \phi_i \& \phi_i \neq$

ϕ_t & $\theta_2(\phi_t) = \theta_2(\phi_i)$). Так как все эти элементы принадлежат одному сгустку, то справедливо $\theta_2(\phi_t) = \theta_2(\phi_1) = \cdots = \theta_2(\phi_k)$. Следовательно, элементы $\phi_t, \phi_1, \dots \phi_k$ также принадлежат одному сгустку $C(\phi_t)$. Как и ранее, легко показать, что сгустки $C(\phi_t)$ и $C(t)$ изоморфны.

Обратно, пусть $\phi_t \in S_1(\mathfrak{M}(r, Z))$. Следовательно, по определению этой модели существует элемент $t \in K_c(b)$, такой, что $t \models_V \phi_t$.

Если мощность сгустка $C(\phi_t)$ равна 1, то выполняется $(*)$. Значит, из данного элемента t не достижимы другие элементы (в модели нет дублей), и изоморфизм сгустков $C(t)$ и $C(\phi_t)$ доказан. Если мощность сгустка $C(\phi_t)$ сторого больше 1, то существует элемент $\phi_a \in C(\phi_t)$, достижимый из ϕ_t. И значит, для элементов некоторого сгустка модели выполняется: $\theta_2(\phi_t) = \theta_2(\phi_a),\ \theta_4(\phi_t) = \theta_4(\phi_a)$.

Отсюда следует, что для элементов t, a, на которых истинны эти формулы ϕ_t и ϕ_a, выполняется $t^R \setminus \{t\} = a^R \setminus \{a\}$ (т. е. множества достижимых из них элементов совпадают). Так как в модели нет дублей, то эти элементы также принадлежат одному и тому же сгустку первого слоя, и изоморфизм сгустков доказан.

Таким образом, выполняется $S_1(K_c(b)) \cong S_1(\mathfrak{M}(r, Z))$.

(II) Пусть для элементов глубины не более k утверждение доказано. Возьмем элемент $t \in S_{k+1}(K_c(b))$ & $t \models_V \phi_t$. И пусть данный элемент (сгусток элемента) является ко-накрытием некоторой антицепи: $C(t)R\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R$ & $\forall i\, b_i \models_V \phi_i, \phi_i \in Pr(r)$. Из расположения данного элемента заключаем:

$\Diamond t = \{x : t \models_V \Diamond x\} = \{p : t \models_V p\} \cup \bigcup_{b_i} \Diamond b_i = \theta_2(\phi_t) \cup \bigcup_i \theta_2(\phi_i)$

$\neg\Diamond t = \{x : t \models_V \neg\Diamond x\} = \{p : t \models_V \neg p\} \cap \bigcap_{b_i} \neg\Diamond b_i = \theta_3(\phi_t) \cap \bigcap_i \theta_4(\phi_i)$.

По индуктивной гипотезе $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \cong \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R$.

Покажем, что элемент ϕ_t — ко-накрытие для $\{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R$ в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$.

Предположим противное, и пусть в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ элемент ϕ_t является ко-накрытием антицепи

$$\{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_k\} \text{ и } \{\phi_1, \dots \phi_n\}^R \ncong \{\phi_1, \dots \phi_k\}^R.$$

Следовательно, для данного элемента одновременно будет выполняться следующие соотношения:

$$\theta_2(\phi_t) = \theta_2(\phi_t) \cup \bigcup_{1 \le i \le n} \theta_2(\phi_i) \ \&\ \theta_4(\phi_t) = \theta_3(\phi_t) \cap \bigcap_{1 \le i \le n} \theta_4(\phi_i)$$

$$\theta_2(\phi_t) = \theta_2(\phi_t) \cup \bigcup_{1 \le i \le k} \theta_2(\phi_i) \ \&\ \theta_4(\phi_t) = \theta_3(\phi_t) \cap \bigcap_{1 \le i \le k} \theta_4(\phi_i).$$

Но тогда один и тот же элемент будет ко-накрытием двух различных антицепей, что невозможно по определению модели $\mathfrak{M}(r, Z)$.

Таким образом, по индукции получаем $K_c(b) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, Z)$.

Обратно, пусть элемент $\phi_t \in S_{k+1}(\mathfrak{M}(r, Z))$ — ко-накрытие для некоторой антицепи $\{\phi_1, \dots \phi_n\}^R$ глубины не более k в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$. По индуктивной гипотезе найдется антицепь элементов

$$\{b_1, b_2 \dots b_n\} \subseteq S_{\leq k}(K_c(b)) \ \&\ \forall i\ b_i \models_V \phi_i, \phi_i \in Pr(r),$$

такая, что $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \cong \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R$.

По определению множества Z существует элемент $t \in K_c(b)$, такой, что $t \models_V \phi_t$. Покажем, что данный элемент является ко-накрытием для антицепи $\{b_1, b_2 \dots b_n\} \subseteq S_{\leq k}(K_c(b))$.

Предположим противное. Пусть элемент t является ко-накрытием для антицепи $\{z_1, \dots z_k\}$ и выполняется $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \ncong \{z_1, \dots z_k\}^R$. По доказанному ранее найдется антицепь элементов модели $\mathfrak{M}(r, Z)$, такая, что $\{z_1, z_2 \dots z_k\}^R \cong \{\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n\}^R$. Но тогда элемент ϕ_t снова будет ко-накрывать две различные антицепи в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$, что невозможно по построению данной модели. Противоречие.

Таким образом, по индукции получаем $\mathfrak{M}(r, Z) \sqsubseteq K_c(b)$. Утверждение доказано. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. По условию теоремы в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ существуют антицепи $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}$ и элемент ϕ_y с указанными свойствами. По определению множества Z существуют элементы в $K_c(b)$, такие, что

$$\{a_1, \dots a_n\}^R \cong \mathcal{A}^R \ \&\ \{y_1, \dots y_k\}^R \cong \mathcal{Y}^R \ \&\ y_0^R \cong \phi_y^R = \{\phi_y\} \cup \mathcal{Y}^R.$$

По условию теоремы существует p-морфизм $\mathcal{Y}^R$ на $\mathcal{A}^R$. Следовательно, существует p-морфизм подфрейма $\{y_1, \dots y_k\}^R$ на подфрейм $\{a_1, \dots a_n\}^R$. Элемент y_0 является ко-накрытием для антицепи $\{y_1, \dots y_k\}$ и порождает как корень λ-фрейм. Так как p-морфизм сохраняет истинность формул, то образ $e = f(y)$ этого элемента y является ко-накрытием для антицепи $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_n\}$ в $K_c(b)$. По исходному предположению на элементе e должна быть истинна некоторая формула ϕ_e из посылки правила.

В силу расположения этого элемента e для формулы ϕ_e должно выполняться:

$$\theta_2(\phi_e) = \theta_1(\phi_e) \cup \bigcup_{\mathcal{A}} \theta_2(\phi_i) \ \&\ \theta_4(\phi_e) = \theta_3(\phi_e) \cap \bigcap_{\mathcal{A}} \theta_4(\phi_i)).$$

Однако по условию теоремы такой формулы в посылке правила не существует. Противоречие. $\square$

4. Конструктивный базис

В [1] была введена модель $\mathfrak{M}h(k)$, с помощью которой были получены некоторые свойства глобально допустимых правил. Напомним вкратце процесс построения этой модели.

Возьмем множество переменных $Var(k) = \{x_0, x_1, \dots x_k\}$ и построим все возможные формулы ϕ от этих переменных, для которых выполняется $\theta_1(\phi) \subseteq \theta_2(\phi)$. Множество всех таких формул обозначим $\Phi(k)$. Число всевозможных таких формул не превосходит 2^{2k+2}. Далее при построении модели будем использовать стандартное означивание: $\phi \models_V p \iff p \in \theta_1(\phi)$. Заметим, что для любого сгустка C, образованного элементами (формулами) $\phi \in \Phi(k)$, по определению отношения между ними выполняется $(\phi_1, \phi_2 \in C \iff \theta_2(\phi_1) = \theta_2(\phi_2))$.

Построение модели $\mathfrak{M}h(k)$.

(I) Первый слой $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ образует множество всех возможных сгустков $C_i^1, i \in I_1$, составленных из элементов $\phi^1 \in \Phi(k)$, таких что: 1) каждый сгусток не содержит различных элементов с одинаковым означиванием; 2) различные сгустки не изоморфны между собой как модели; 3) выполняется $\forall \phi^1 \in C_i^1\ \phi^1 \models_V \phi^1$.

(II) Для построения второго слоя $S_2(\mathfrak{M}h(k))$ берем произвольные антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ и добавляем к ним снизу как ко-накрытия сгустки $C_i^2, i \in I_2$, следующим образом:

(A) для каждой тривиальной антицепи $\mathcal{X} = \{C(\phi^1)\}$ берем все возможные элементы ϕ^2 множества $\Phi(k)$, такие, что $\theta_2(\phi^1) \subseteq \theta_2(\phi^2)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^2 = C(\phi^2)$, образованные элементами ϕ^2, такие, что: 1) C_i^2 не изоморфны подмодели сгустка $C(\phi^1)$; 2) выполняется $\forall \phi \in C_i^2\ \phi \models_V \phi$; 3) различные ко-накрытия C_i^2 для антицепи $\mathcal{X}$ не изоморфны между собой как модели.

(B) для каждой нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ выбираем все элементы ϕ^2 множества $\Phi(k)$, такие, что $\bigcup_{\phi^1 \in \mathcal{X}} \theta_2(\phi^1) \subseteq \theta_2(\phi^2)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^2 = C(\phi^2)$, образованные такими элементами ϕ^2, так, чтобы: 1) выполнялось $\forall \phi \in C_i^2\ \phi \models_V \phi$); 2) различные ко-накрытия C_i^2 для антицепи $\mathcal{X}$ не изоморфны между собой как модели.

Заметим, что для любой антицепи $\mathcal{X}$ существует элемент ϕ_c^2, такой, что

$$\bigcup_{\phi^1 \in \mathcal{X}} \theta_2(\phi^1) = \theta_2(\phi_c^2) \ \&\ \theta_1(\phi_c^2) = \theta_2(\phi_c^2),$$

т. е. любая нетривиальная антицепь имеет при таком построении ко-накрытие. Несложно показать (как это было сделано при доказательстве утверждения 1 [1]), что верно $\phi_c^2 \models_V \phi_c^2$.

(III) Продолжаем описанный процесс построения до глубины $k+2$, пока величина $\min_{\phi\in S_{k+2}(\mathfrak{M}h(k))}|\theta_2(\phi)|$ для ко-накрытий нетривиальных антицепей не станет равна $k+1$. Полученную в результате построения модель обозначим как $\mathfrak{M}h(k)$. По построению выполняется $\forall\phi\in\mathfrak{M}h(k)$ $(\phi\models_V\phi)$, и модель не содержит дублей (в каждом сгустке элементы имеют попарно различные означивания и ко-накрытия произвольной антицепи не изоморфны как модели).

Понятно, что каждая открытая подмодель W модели $\mathfrak{M}h(k)$ определяет некоторое правило в редуцированной форме вида $r=\{\{\phi:\phi\in W\}/x_0\}$. Далее, на некоторых элементах ϕ_0 этой модели заключение x_0 правила в редуцированной форме ложно (т. е. $x_0\notin\theta_1(\phi_0)$). Значит, открытая подмодель ϕ_0^R, порожденная как корнем этим элементом ϕ_0, опровергает правило вида $r=\{\{\phi:\phi\in\phi_0^R\}/x_0\}$.

Определим теперь *K-насыщенную локальную компоненту (открытую подмодель)* $K_c(y)$ элемента $y\in\mathfrak{M}h(k)$ следующим образом. Выберем произвольный элемент $y\in\mathfrak{M}h(k)$ глубины $d(y)\le k+2$, такой, что $x_0\notin\theta_1(y)$ & $\theta_1(y)\neq\theta_2(y)$ (т. е. на этом элементе опровергается заключение правила в редуцированной форме). Возьмем подмодель $\mathcal{G}=y^R\cup\phi^0$, где

$$\phi^0=\bigwedge_{0\le i\le k}\neg x_i\wedge\bigwedge_{0\le i\le k}\neg\Diamond x_i\ \&\ \phi^0\in S_1(\mathfrak{M}h(k))\ \&\ C(\phi_0)=\{\phi_0\}.$$

Теперь послойно, начиная с первого слоя подмодели $\mathcal{G}$, к каждой нетривиальной антицепи сгустков Y (не содержащих сгустков глубины D) модели $\mathcal{G}$ добавляем одноэлементное ко-накрытие ϕ_c^Y, такое, что $\bigcup_{\phi\in Y}\theta_2(\phi)=\theta_2(\phi_c^Y)$ & $\theta_1(\phi_c^Y)=\theta_2(\phi_c^Y)$. По построению модели $\mathfrak{M}h(k)$ каждая нетривиальная антицепь имеет такое ко-накрытие ϕ_c^i. Продолжая этот процесс до заданной глубины D, получим в результате модель $K_c(y,D)$. Заметим, по построению каждая нетривиальная антицепь (не содержащая сгустков максимальной глубины D) имеет в $K_c(y)$ одноэлементное ко-накрытие (т. е. полученная подмодель насыщенна ко-накрытиями для нетривиальных антицепей), и в первом слое существует хотя бы один одноэлементный сгусток $\{\phi^0\}$, для которого выполняется $\theta_1(\phi^0)=\theta_2(\phi^0)$ & $\theta_3(\phi^0)=\theta_4(\phi^0)$. Очевидно, что правило $r(K_c(y))=\{\bigvee\{\phi:\phi\in K_c(y)\}/x_0\}$ опровергается на модели $K_c(y)$.

Лемма 1. *(Лемма 5 [1]) Правило $r(K_c(y))$ недопустимо глобально в логике $S4$.*

Теперь в модели $K_c(y)$ выберем произвольные нетривиальные антицепи X,Y (не содержащие сгустков максимальной глубины D), такие, что для некоторого p-морфизма g выполняется $g(Y^R)=X^R$. По построению модели $K_c(y)$ данные антицепи имеют одноэлементные ко-накрытия ϕ_x, ϕ_y соответственно. Затем удалим (выбросим) элемент ϕ_x

и все элементы, из которых он достижим. Полученную модель обозначим как $K_d(y,k,X,Y)$ (где d — глубина модели; y — элемент (формула из посылки), на котором опровергается заключение правила; k — число переменных в правиле).

Полученная подмодель определяет правило вывода

$$r(K_d(y,k,X,Y)) = \{\bigvee\{\phi : \phi \in K_d(y,k,X,Y)\}/x_0\},$$

которое опровергается на $K_d(y,k,X,Y)$.

Заметим, что полученная модель удовлетворяет условиям теоремы 2 (это легко проверить), и значит, правило вывода $r(K_d(y,k,X,Y))$ глобально допустимо в $S4$. Действительно, по построению существует элемент (формула из посылки) y, такой, что $x_0 \notin \theta_1(y)$ & $\theta_1(y) \neq \theta_2(y)$. Также по построению существует одноэлементный сгусток первого слоя, порожденный элементом ϕ^0. Антицепи X, Y выбраны таким образом, чтобы условия теоремы 2 выполнялись.

Покажем, что множество таких правил образует (конструктивный) базис для глобально допустимых правил вывода. Рассмотрим множество правил $\mathcal{R}_c = \{r(K_d(y,k,X,Y)) : d > 1, k \geq 1\}$ по всем возможным $y \in K_c(y,D), k, d$ $(d > 1, k \geq 1)$ с нужными свойствами и антицепями $X, Y \subseteq K_c(y)$ (не содержащими сгустков максимальной глубины D), таких, что для некоторого p-морфизма g выполняется $g(Y^R) = X^R$.

Теорема 3. *Множество $\mathcal{R}_c$ является базисом для глобально допустимых в $S4$ правил вывода.*

Доказательство. По определению множества $\mathcal{R}_c$ все правила из $\mathcal{R}_c$ глобально допустимы в $S4$. Предположим теперь, что из множества $\mathcal{R}_c$ не выводится некоторое глобально допустимое в $S4$ правило r (в редуцированной форме), т. е. существует табличная логика λ_0 над $S4$, в которой $\mathcal{R}_c \not\vdash_{\lambda_0} r$. Следовательно, по теореме 1.4.11 [14] найдется конечная λ_0-модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, разделяющая множество правил $\mathcal{R}_c$ и правило r: $\forall q \in \mathcal{R}_c$ $(\mathcal{M} \models_V q,$ & $\mathcal{M} \not\models_V r)$. Так как правило r опровергается на модели $\mathcal{M}$, посылка правила истинна на всех элементах этой модели, а заключение x_0 ложно на некотором элементе z: $\forall x \in \mathcal{M}$ $x \models_V Pr(r)$, $\exists z \in \mathcal{M}(z \not\models_V x_0)$. Следовательно, найдется формула $\phi_z \in Pr(r) : z \models_V \phi_z$. Но тогда выполняется $x_0 \notin \theta_1(\phi_z)$.

Отсюда также следует, что алгебра $\mathcal{M}^+$, порожденная моделью $\mathcal{M}$, не принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{F}^Q_w(\lambda_0)$, порожденному свободной алгеброй счетного ранга из многообразия алгебр $Var(\lambda_0)$. Следовательно, во фрейме $\mathcal{F}$ модели $\mathcal{M}$ существует нетривиальная антицепь сгустков X, не имеющая λ_o-ко-накрытия (иначе, если каждая нетривиальная антицепь имеет λ_o-ко-накрытие, то существует p-морфизм из фрейма n-характеристической модели на фрейм $\mathcal{F}$, что влечет недопустимость заданного правила в логике λ_0).

Покажем, что на данной модели $\mathcal{M}$ опровергается некоторое правило из множества $\mathcal{R}_c$, что противоречит исходному предположению. Для этого преобразуем фрейм $\mathcal{F}$ следующим образом. Во фрейме $\mathcal{F}$ рассмотрим его открытый подфрейм X^R. Пусть минимальная мощность сгустков в $S_1(X^R)$ равна числу t. К фрейму $\mathcal{F}$ добавим (как дизъюнктное объединение) сгусток C_t мощности t.

Затем послойно, начиная с первого слоя, добавим одноэлементные ко-накрытия к тем антицепям подфрейма $X^R \sqcup C_t$, которые не имеют одноэлементных ко-накрытий, т. е. для данного подфрейма построим его полный ко-последователь, расширяя при этом исходный фрейм $\mathcal{F}$, следующим образом.

Возьмем все нетривиальные антицепи из $S_1(X^R \sqcup C_t)$, не имеющие одноэлементные ко-накрытия, и к каждой такой антицепи добавим единственный рефлексивный элемент как ко-накрытие. Затем выбираем антицепи из $S_{\leq 2}(X^R \sqcup C_t)$ плюс добавленные на первом шаге элементы и повторяем процесс добавления ко-накрытий. Продолжаем процесс до максимальной глубины элементов из $\mathcal{F}$. Полученный в результате фрейм обозначим как $\mathcal{G}$, и выполняется $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$.

Легко проверить, что в результате этого расширения исходного фрейма появится некоторая антицепь Y, такая, что:

1) $X^R \sqsubseteq Y^R$ (антицепь всех элементов из $S_1(X^R \sqcup C_t)$ имеет ко-накрытие c_1; антицепь всех элементов $S_{\leq 2}(X^R \sqcup C_t)$ плюс c_1 имеет ко-накрытие c_2 и т. д.; антицепь X плюс некоторый c_l (добавленный на предыдущем шаге построения) есть Y и также имеет ко-накрытие);

2) $g(Y^R) = X^R$ для некоторого p-морфизма g (сгусток C_t склеиваем со сгустком минимальной мощности из $S_1(X^R)$, а затем послойно склеиваем все дубли, пока не дойдем до R-минимальных элементов в Y).

Теперь, как при доказательстве теоремы 4 [1], с. 153, несложно показать, что полученный фрейм $\mathcal{G}$ является открытым подфреймом фрейма $K_d(b, l, X, Y)$, где $b = \phi_z$, $l \geq k$ — число переменных в формулах (элементах) модели $K_d(b, l, X, Y) \sqsubseteq \mathfrak{M}h(l)$. В свою очередь, $\mathcal{M} \sqsubseteq \langle K_d(b, l, X, Y)\rangle$. Следовательно, множество формул из посылки правила r, выполнимых на модели $\mathcal{M}$, является подмножеством формул из посылки правила $r(K_d(y, k, X, Y))$:
$\{\phi \in Pr(r) : \exists\, z \in \mathcal{M}(z \models \phi)\} \subseteq \{\phi \in Pr(K_d(y, k, X, Y))\}\}$.

Отсюда сразу заключаем, что правило $K_d(y, k, X, Y)$ опровергается на модели $\mathcal{M}$: на каждом элементе модели посылка правила истинна, а заключение — нет. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения. $\square$

5. Заключение

В статье исследуются правила вывода, глобально допустимые в логике $S4$ (т. е. допустимые сразу во всех финитно аппроксимируемых расширениях $S4$). Построен конструктивный (рекурсивный) базис для глобально допустимых в логике $S4$ правил, а именно, описана процедура построения некоторого набора правил вывода в редуцированной форме. Полученные правила глобально допустимы в $S4$, и любое глобально допустимое в $S4$ правило вывода выводится из заданного набора. Полученный базис является бесконечным. В связи с этим возникает вопрос о наличии конечного или явного базиса для глобально допустимых правил не только для $S4$, но для большинства базовых логик ($Grz, GL, S4.3$ и т. д.).

Список источников

1. Римацкий В. В. Глобально допустимые правила вывода // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 138–160. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138
2. Римацкий В. В., Кияткин В. Р. Независимый базис допустимых правил вывода предтабличных логик и их расширений // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 79–89.
3. Римацкий В. В. Явный базис WCP-глобально допустимых правил вывода // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 2. С. 219–246. https://doi.org/10.33048/alglog.2023.62.204
4. Рыбаков В. В. Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 55–68.
5. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic // Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. 40, N 3. P. 113–130.
6. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 113, N 1-3. P. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
7. Iemhoff R., On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic // Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66, N 2. P. 281–294.
8. Jeřábek E., Admissible rules of modal logics // Journal of Logic and Computation. 2005. Vol. 15, N 4. P. 411–431.
9. Jeřábek E., Independent bases of admissible rules // Logic Journal of the IGPL. 2005. Vol. 16, N 3. P. 249–267.
10. Lorenzen P. Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg, 1955.
11. Rimatskiy V.V. Description of modal logics which enjoy co-cover property // Siberian Electronic Mathematical Reports. Vol. 19, Is. 1. P. 316–325.
12. Rybakov V. V. Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4 // Mathematical Logic Quarterly. 2001. Vol. 147, N 2. P. 441–451.
13. Rybakov V. V., Terziler M., Remazki V. V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC // Mathematical Logic Quarterly, 2001. Vol. 46, N 2. P. 207–218.

14. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. New-York ; Amsterdam : Elsevier Sci. Publ., 1997. Vol. 136. 611 p.
15. Rybakov V. V., Rimatski V. V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics // Bulletin of the Section of Logic. 2005. Vol. 34, N 2. P. 1–7.

References

1. Rimatskiy V.V. Globally Admissible Inference Rules. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 138–160. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138(in Russian)
2. Rimatskiy V.V., Kiyatkin V.R. Independent bases for admissible rules of pretabular modal logic and its extensions. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 79–89.(in Russian) http://semr.math.nsc.ru.
3. Rimatskiy V.V. An explixit basis for WCP-globally admissible inference rules. Algebra and Logic. 2023. vol. 62, no. 2. C. 149 – 165. https://doi.org/10.1007/s10469-024-09733-6
4. Rybakov V.V. Basis for admissible inference rules of logic $S4$ and Int. *Algebra and Logic*, 1985, vol. 24, no. 1, pp. 55–68.
5. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1975, vol. 40, no. 3, pp. 113–130.
6. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, vol. 113, no. 1-3, pp. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
7. Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 2001, vol. 66, no. 2. pp. 281–294.
8. Jeřábek E., Admissible rules of modal logics. *Journal of Logic and Computation. 2005*, vol. 15, no. 4, pp. 411–431.
9. Jeřábek E. , Independent bases of admissible rules. *Logic Journal of the IGPL*, 2005, vol. 16, no. 3, pp. 249–267.
10. Lorenzen P. *Einfung in Operative Logik und Mathematik*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1955.
11. Rimatskiy V.V. Description of modal logics which enjoy co-cover property. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 19, is. 1, pp. 316–325.
12. Rybakov V.V., Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4. *Mathematical Logic Quarterly*, 2001, vol. 147, no. 2, pp. 441–451.
13. Rybakov V.V., Terziler M., Remazki V.V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC. *Mathematical Logic Quarterly*, 2001, vol. 46, no. 2. pp. 207–218.
14. Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* New-York, Amsterdam, Elsevier Sci. Publ., 1997, vol. 136, 611 p.
15. Rybakov V.V., Rimatski V.V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics. *Bulletin of the Section of Logic*, 2005, vol. 34, no. 2, pp. 1–7.

Об авторах

Римацкий Виталий Валентинович, канд. физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, Красноярск, Gemmeny@rambler.ru

About the authors

Vitaliy V. Rimatskiy, Cand. Sci. (Phys.-Math), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, Gemmeny@rambler.ru

Поступила в редакцию / Received 11.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 23.05.2024
Принята к публикации / Accepted 27.05.2024