Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 143—151

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 512.5
MSC 20G15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.143

О порождении группы $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны

Я. Н. Нужин[1]✉, Т. Б. Шаипова[1]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ nuzhin2008@rambler.ru

Аннотация. Результаты исследования относятся к следующей общей задаче: найти естественные конечные порождающие множества элементов данной линейной группы над конечно порожденным коммутативным кольцом. Особый интерес вызывают кольца коэффициентов, которые порождаются одним элементом, например кольцо целых чисел или кольцо целых гауссовых чисел. Доказано, что проективная общая линейная группа размерности n над кольцом целых гауссовых чисел тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда n больше 4 и 4 не делит n. Ранее М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Д. В. Левчук и авторы данной статьи решили аналогичную задачу для специальной и проективной специальной линейных групп.

Ключевые слова: проективная общая линейная группа, кольцо целых гауссовых чисел, порождающие тройки инволюций

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1429).

Ссылка для цитирования: Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б. О порождении группы $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 143–151.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.143

Research article

On Generation of the Group $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of which Commute

Yakov N. Nuzhin[1✉], **Tatyana B. Shaipova**[1]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

✉ nuzhin2008@rambler.ru

Abstract. The results of the paper relate to the following general problem. Find natural finite generating sets of elements of a given linear group over a finitely generated commutative ring. Of particular interest are coefficient rings that are generated by a single element, for example, the ring of integers or the ring of Gaussian integers. We prove that a projective general linear group of dimension n over the ring of Gaussian integers is generated by three involutions two of which commute if and only if n is greater than 4 and 4 does not divide n. Earlier, M. A. Vsemirnov, R. I. Gvozdev, D. V. Levchuk and the authors of this paper solved a similar problem for the special and projective special linear groups.

Keywords: projective general linear group, the ring of Gaussian integers, generating triples of involutions

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

For citation: Nuzhin Ya. N., Shaipova T. B. On Generation of the Group $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of which Commute. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 143–151. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.143

1. Введение

Группу, порожденную тремя инволюциями, две их которых перестановочны, будем называть $(2\times 2, 2)$-порожденной. Класс таких групп замкнут относительно гомоморфных образов, если по определению единичную группу считаем таковой и не исключаем совпадения двух или всех трех инволюций.

В работе [1] М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев и авторы данной статьи дали окончательный ответ на следующий вопрос: для каких размерностей n специальная и проективная специальная линейные группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ являются $(2\times 2,2)$-порожденными? Оказалось, что группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ (соответственно $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$) тогда и только тогда является $(2\times 2,2)$-порожденной, когда $n\geq 5$ и $n\neq 6$ (соответственно когда $n\geq 5$). В [1] были рассмотрены остававшиеся три случая SL_5, PSL_6 и SL_{10}, там же можно найти историю этого вопроса (см. также [2]). Ясно, что общая линейная группа $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной, поскольку в ней есть матрицы с определителем, отличным от ± 1, а определитель любой её инволюции равен ± 1. Мы даем ответ на аналогичный вопрос для проективной общей линейной группы $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Доказана

Теорема 1. *Группа $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда является $(2\times 2,2)$-порожденной, когда $n\geq 5$ и 4 не делит n.*

2. Обозначения и предварительные результаты

Заметим, что прообразы не обязаны порождать всю исходную группу, если образы порождают фактор-группу. Однако справедливо следующее утверждение, доказательство которого элементарно, и мы его опускаем.

Лемма 1. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Для произвольного набора элементов $g_1,\dots,g_m\in G$ следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $G/H=\langle g_1H,\dots,g_mH\rangle$;

2) $G=\langle g_1,\dots,g_m,H\rangle$.

Здесь и ниже для любого непустого подмножества M некоторой группы через $\langle M\rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множеством M. Далее, K — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1, K^* — его мультипликативная группа, E_n — единичная матрица степени n, а e_{rs} — $(n\times n)$-матрица с 1 на позиции (r,s) и нулями в остальных местах. Матрицы

$$t_{rs}(x)=E_n+xe_{rs},\ r,s=1,2,\dots,n,\ r\neq s,\ x\in K,$$

называются *элементарными трансвекциями*, мы их будем называть просто трансвекциями. Положим также

$$t_{rs}(K)=\langle t_{rs}(x)\mid x\in K\rangle,\ r,s=1,2,\dots,n,\ r\neq s.$$

Группы $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ и их фактор-группы по центру $PGL_n(K)$, $PSL_n(K)$ определены во введении. Через $D_n(K)$ соответственно $C_n(K)$ обозначим подгруппу всех диагональных соответственно скалярных матриц в $GL_n(K)$. По определению

$$C_n(K)=\{diag(k,k,\dots,k)\mid k\in K^*\}.$$

Линейную группу типа X_n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов будем обозначать через $X_n(q)$.

Лемма 2. *Независимо от того, порождается ли группа $SL_n(K)$ своими трансвекциями, справедливо равенство*

$$GL_n(K) = SL_n(K) \leftthreetimes \langle diag(k, 1, \dots, 1) \mid k \in K^* \rangle. \tag{2.1}$$

В частности, если t — примитивный элемент конечного поля $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то

$$GL_n(q) = SL_n(q) \leftthreetimes \langle diag(t, 1, \dots, 1) \rangle. \tag{2.2}$$

Доказательство. Если $k \in K^*$, $A \in GL_n(K)$ и $det(A) = k$, то определитель матрицы $B = A \cdot diag(k^{-1}, 1, \dots, 1)$ равен 1 и, очевидно, $A = B \cdot diag(k, 1, \dots, 1)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Если группа K^* имеет конечный порядок и $(n, |K^*|) = 1$, то*

$$GL_n(K) = SL_n(K) \times C_n(K),$$

в частности,

$$PGL_n(K) \simeq SL_n(K) = PSL_n(K).$$

Доказательство. В силу предположения $(n, |K^*|) = 1$ пересечение $SL_n(K) \cap C_n(K)$ единично и любой элемент из K^* представляется в виде k^n для подходящего $k \in K^*$. Остается заметить, что

$$diag(k^{n-1}, k^{-1}, \dots, k^{-1}) diag(k, k, \dots, k) = diag(k^n, 1, \dots, 1),$$

причем первая диагональная матрица в левой части равенства лежит в $SL_n(K)$, и применить лемму 2. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Если K — область целостности, группа K^* имеет конечный порядок, содержит элементы порядка больше 2 и её порядок делит n, то группа $PGL_n(K)$ не порождается никаким множеством инволюций.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа группы $PGL_n(K)$, порожденная набором инволюций $\{g_i C_n(K) \mid i \in I\}$, для некоторого множества I. Тогда $g_i = a_i d_i$ для подходящих $a_i \in SL_n(K)$ и $d_i \in D_n(K)$ по лемме 2. Поскольку $g_i C_n(K)$ — инволюция, то $(a_i d_i)^2 = a_i d_i a_i d_i^{-1} d_i^2 \in C_n(K)$. Произведение $a_i d_i a_i d_i^{-1}$ лежит в группе $SL_n(K)$. Поэтому $det((a_i d_i)^2) = det(d_i^2) = k^n$ для некоторого $k \in K^*$. Так как K — область целостности и порядок группы K^* делит n, то $det(d_i) = \pm 1$. Таким образом, все матрицы g_i имеют определитель ± 1, и вместе с подгруппой $C_n(K)$ они порождают собственную подгруппу в $GL_n(K)$, поскольку определитель всех матриц из $C_n(K)$ равен 1, а по условию теоремы имеются матрицы с определителем, отличным от ± 1. Отсюда P — собственная подгруппа группы $PGL_n(K)$ в силу леммы 1. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть d — произвольная диагональная матрица группы $GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, s — матрица-перестановка, соответствующая циклу $(12\dots n)$. Тогда для любого $j=1,2,\dots,n-1$ подгруппа M, порожденная двумя трансвекциями $t_{j+1j}(1)$, $t_{j+1j}(i)$ и мономиальной матрицей ds, содержит $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Очевидно, $\langle t_{j+1j}(1), t_{j+1j}(i)\rangle = t_{j+1j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, а подгруппа $\langle ds\rangle$ действует сопряжениями транзитивно на множестве подгрупп
$$\mathfrak{T} = \{t_{21}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}),\dots,t_{nn-1}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}), t_{1n}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\}.$$
Поэтому все подгруппы из $\mathfrak{T}$ лежат в M. Коммутируя между собой подгруппы из $\mathfrak{T}$, получим все подгруппы $t_{km}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Так как кольцо $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ евклидово [4, с. 439], то $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается всеми своими трансвекциями (см., например, [7, с. 107]). Следовательно, M содержит $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Лемма доказана. □

3. Доказательство основной теоремы

Пусть n — нечетное число. Тогда по лемме 3 имеем изоморфизм $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \simeq PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, поскольку мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ является циклической группой порядка 4. $(2\times 2,2)$-порожденность группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ при $n\geq 7$ установлена в [5; 9], а при $n=5$ — в [1]. В [2] доказано, что группа $PSL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной. Таким образом, для нечетного n теорема справедлива.

При $n=4m$ группа $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной по лемме 4, так как порядок мультипликативной группы кольца $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ делит n, и она содержит элементы порядка больше 2.

Пусть $n=2$. Покажем, что существует гомоморфизм $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на $PSL_2(9)$. Этот факт без доказательства отмечается в [8]. Следующее доказательство принадлежит М. А. Всемирнову.

Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ порождается элементом i. Поэтому $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) = SL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) \leftthreetimes \langle d\rangle$, где $d = diag(i,1)$, в силу леммы 2. Поскольку SL_2 над евклидовым кольцом и над полем порождается элементарными трансвекциями, то редукция по модулю 3 дает гомоморфизм группы $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на собственную подгруппу $SL_2(9)\leftthreetimes \langle d\rangle$ индекса 2 группы $GL_2(9)$. Так как группа определителей центральных элементов в $GL_2(9)$ порождается элементом i, то центр $C_2(9)$ группы $GL_2(9)$ содержится в $SL_2(9)\leftthreetimes\langle d\rangle$. С другой стороны, учитывая равенство $i=(1-i)^2$ в поле $\mathbb{F}_9$, получаем, что d лежит в $SL_2(9)C_2(9)$. Таким образом,
$$SL_2(9)\leftthreetimes\langle d\rangle = SL_2(9)C_2(9).$$
Следовательно, факторизуя по центру $C_2(9)$, получаем гомоморфизм из $SL_2(9)\leftthreetimes\langle d\rangle$ на $PSL_2(9)$, а не на всю $PGL_2(9)$. Наконец, берем сквозной

гомоморфизм группы $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на $PSL_2(9)$. Скалярные матрицы из $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ лежат в его ядре. Поэтому он корректно определяет гомоморфизм $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на $PSL_2(9)$ в силу теоремы о гомоморфизмах [3, теорема 4.2.3].

Приведеное выше доказательство можно схематично изобразить на следующей коммутативной диаграмме.

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) & \to & SL_2(9)C_2(9) \\ \downarrow & & \downarrow \\ PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) & \to & PSL_2(9) \end{array}$$

Группа $PSL_2(9) \simeq A_6$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [6]. Поэтому в силу установленного гомоморфизма группа $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной.

Итак, остается установить $(2\times 2, 2)$-порожденность для $n = 2(2m+1)$ при $m \geq 1$ группы $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Пусть $m \geq 2$. Положим

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = t_{21}(1)t_{n-1\,n}(1)diag(1,-1,-1,1,\cdots,1,-1,-1,1),$$

$$\beta = diag(i,\dots,i,1,\dots,1)\tau, \quad \gamma = \tau\mu,$$

$$\eta = \beta\gamma = diag(i,\dots,i,1,\dots,1)\mu,$$

где у диагональной матрицы $diag(i,\dots,i,1,\dots,1)$ ровно $2m+1$ единиц и столько же элементов i. Образы матриц α,β,γ в группе $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ являются инволюциями, причем первые две из них перестановочны. Покажем, что они порождают группу $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Вычисления показывают, что

$$\alpha^{\eta} = t_{n1}(-i)t_{32}(1)diag(1,1,-1,-1,1,\dots,1,-1,-1),$$

$$\alpha^{\eta^2} = t_{12}(-i)t_{43}(1)diag(-1,1,1,-1,-1,1,\dots,1,-1),$$

$$[\alpha,\alpha^{\eta}] = t_{31}(-1)t_{n-1\,1}(-i),$$

$$([\alpha,\alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2})^2 = t_{32}(i)t_{41}(1)t_{42}(i)t_{n-1\,2}(1),$$

$$\theta = (([\alpha,\alpha^{\eta}]\alpha^{\eta^2})^2)^{\eta} = t_{43}(i)t_{52}(1)t_{53}(i)t_{n3}(i),$$

$$[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]] = t_{41}(-i)t_{51}(-i)t_{n1}(-i),$$

$$[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]]]=t_{n-1\,1}(-i),\ \ [\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]]]^{\gamma}=t_{1n-1}(-i),$$
$$[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]]]^{\beta}=t_{2n}(1),\ \ [[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]],[\alpha,[\theta,[\alpha,\alpha^{\eta}]]]^{\beta}]=t_{21}(i),$$
$$t_{21}(i)^{\eta}=t_{32}(i),\ \ [t_{21}(i),t_{32}(i)]=t_{31}(1),$$
$$t_{21}(i)^{\eta^3\beta}=t_{23}(1),\ \ [t_{23}(1),t_{31}(1)]=t_{21}(1).$$

Итак, трансвекции $t_{21}(1),t_{21}(i)$ лежат в группе $M=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$, матрица $diag(-i,\ldots,-i,1,\ldots,1)\beta\gamma$ является матрицей-перестановкой, соответствующей циклу $(12\ldots n)$. По лемме 5 трансвекции $t_{21}(1),t_{21}(i)$ и матрица $\beta\gamma$ порождают группу, содержащую $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Так как определитель матрицы β равен i или $-i$, в зависимости от четности числа m, то $M=GL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Следовательно, образы матриц α,β,γ порождают группу $PGL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Пусть $m=1$. В этом случае матрицы α,β,γ такие:

$$\alpha=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&i&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

$$h_1=\beta\gamma\beta(\alpha\gamma)^2\beta\alpha\gamma\beta,\ h_2=(\gamma\beta)^2\alpha\beta\alpha\gamma\beta\gamma\alpha,\ h_3=\beta\alpha\gamma\beta(\gamma\alpha)^2\beta\gamma\beta,$$
$$h_4=(\alpha\beta)^2\alpha\gamma\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha,\ h_5=(\alpha\beta)^2\alpha\gamma\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha.$$

(Здесь для поиска матриц h_i и g_i использовались компьютерные вычисления.) Тогда

$$g_1=(\alpha\gamma)^4=t_{62}(-1)t_{64}(-1),\ g_2=[h_1,g_1]=t_{61}(i)t_{62}(2-i),$$
$$g_3=g_2g_2^{h_2}=t_{61}(2i)t_{62}(-i),\ g_4=g_3^{\beta}=t_{15}(1)t_{16}(-2),$$
$$g_5=g_4g_4^{h_3}=t_{25}(-i)t_{26}(2i),\ g_6=g_5^{h_2\gamma}g_5^{\gamma}=t_{42}(i)t_{45}(2i),$$
$$g_7=(\gamma g_6^{\beta}\alpha\gamma\alpha)^2g_1=t_{32}(-1)t_{34}(4i),\ g_8=g_7^{\beta\gamma\beta}=t_{54}(4)t_{56}(-1),$$
$$g_9=g_8g_2^{-2}g_3g_8^{-1}g_3^{-1}g_2^2=t_{52}(4-i),\ g_{10}=[g_2,g_8][g_8,g_1]^{h_4}[g_8,g_1]^{h_5}=t_{52}(4).$$

Из двух последних равенств следует, что трансвекция $t_{52}(-i)$ лежит в группе $M=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Далее,

$$t_{52}(-i)^{\beta}=t_{25}(1),\ [g_1,t_{25}(1)]=t_{65}(-1),$$

$$\delta = t_{65}(-1)\gamma t_{65}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$t_{65}(1)^{\beta} = t_{12}(1),\ t_{12}(1)^{\beta\delta} = t_{23}(1),\ t_{65}(1)^{\beta\delta\beta\delta} = t_{21}(i),$$
$$[t_{21}(i), [t_{12}(1), t_{23}(1)]] = t_{23}(i).$$

Таким образом, $t_{23}(1), t_{23}(i) \in M$ и $diag(i, -i, -i, 1, 1, 1)\beta\delta$ — матрица-перестановка, соответствующая циклу $(12 \ldots n)$. По лемме 5 трансвекции $t_{23}(1), t_{23}(i)$ и матрица $\beta\delta$ порождают группу, в которой содержится $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Так как $det(\beta) = i$, то $M = GL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Следовательно, образы матриц α, β, γ порождают группу $PGL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Теорема доказана.

4. Заключение

Мы завершаем решение задачи о порождении тремя инволюциями, две из которых перестановочны, для групп GL_n, SL_n, PSL_n, PGL_n над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$. В статье рассмотрен случай PGL_n.

Авторы глубоко признательны рецензенту за указанные опечатки и полезные замечания, которые несомненно способствовали улучшению текста статьи.

Список источников

1. О порождении групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны. II / М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова // Математические заметки. 2024. Т. 115, № 3. С. 317–329. https://doi.org/10.4213/mzm14048
2. Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б. О порождении групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 40. С. 49–62. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.49
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М. : Наука, 1982.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М. : Наука, 1977.
5. Левчук Д. В. Порождаемость группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ. 2009. Т. 9, № 1. С. 35–38.
6. Нужин Я. Н. О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 3. С. 426–434. https://doi.org/10.33048/alglog.2019.58.310
7. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М. : Мир, 1975.
8. Тимофеенко И. А. Порождающие мультиплеты линейных групп над кольцом целых чисел : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06. Красноярск, 2017.

9. Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2008. N 2. P. 133–139.

References

1. Vsemirnov M.A., Gvozdev R.I., Nuzhin Ya.N., Shaipova T.B. On generation of the groups $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions,two of which commute. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 114, no. 3, pp. 289–300. https://doi.org/10.1134/S0001434624030015
2. Gvozdev R.I., Nuzhin Ya.N., Shaipova T.B. On Generation Groups $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions,two of which commute. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 40, pp. 49–62. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.49
3. Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Fundamentals of group theory.* Moscow, Nauka Publ., 1982.
4. Kostrikin A.I. *Introduction to algebra.* Moscow, Nauka Publ., 1977.
5. Levchuk D. V. On generation of the group $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute. *Bulletin of Novosibirsk State Univ.*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 35–38.
6. Nuzhin Ya. N. On generating sets of involutions of simple finite groups. *Algebra and Logic*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 426–434. https://doi.org/10.33048/alglog.2019.58.310
7. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* Moscow, Mir Publ., 1975.
8. Timofeenko I.A. *Generating multiplets of linear groups over the ring of integers.* Cand. sci. diss. Abstr. Krasnoyarsk, 2017, 72 p. (in Russian)
9. Levchuk D.V., Nuzhin Ya.N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute.*J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2008, no. 2, pp. 133–139.

Об авторах

Нужин Яков Нифантьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041,Российская Федерация, nuzhin2008@rambler.ru

Шаипова Татьяна Борисовна, ст. преп., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, 663431@mail.ru

About the authors

Yakov N. Nuzhin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk,660041, Russian Federation, nuzhin2008@rambler.ru

Tatyana B. Shaipova, Sen. Lec., Siberian Federal University, Krasnoyarsk,660041, Russian Federation, 663431@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 06.06.2024
Поступила после рецензирования / Revised 20.09.24
Принята к публикации / Accepted 14.10.2024