Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 83—100

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 512.554
MSC 17D25, 17B69
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.83

О локальности формальных распределений над правосимметрическими алгебрами и алгебрами Новикова

Л. А. Бокуть[1], **П. С. Колесников**[1]✉

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация
✉ pavelsk77@gmail.com

Аннотация. Классическая лемма Донга в теории вертексных алгебр утверждает, что свойство локальности формальных распределений с коэффициентами из алгебры Ли сохраняется под действием вертексного оператора. Аналогичное утверждение известно для ассоциативных алгебр. Изучаются формальные распределения над прелиевыми (правосимметрическими) и преассоциативными (дендриформными) алгебрами, а также над алгебрами Новикова и показывается, что аналог леммы Донга верен для алгебр Новикова, но не выполняется для прелиевых и преассоциативных алгебр.

Ключевые слова: конформная алгебра, функция локальности, прелиева алгебра, алгебра Новикова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН (проект FWNF-2022-0002).

Ссылка для цитирования: Бокуть Л. А., Колесников П. С. О локальности формальных распределений над правосимметрическими алгебрами и алгебрами Новикова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 83–100.

https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.83

Research article

On the Locality of Formal Distributions Over Right-Symmetric and Novikov Algebras

Leonid A. Bokut[1], **Pavel S. Kolesnikov**[1]✉

[1] Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation
✉ pavelsk77@gmail.com

Abstract. The Dong Lemma in the theory of vertex algebras states that the locality property of formal distributions over a Lie algebra is preserved under the action of a vertex operator. A similar statement is known for associative algebras. We study local formal distributions over pre-Lie (right-symmetric), pre-associative (dendriform), and Novikov algebras to show that the analogue of the Dong Lemma holds for Novikov algebras but does not hold for pre-Lie and pre-associative ones.

Keywords: conformal algebra, locality function, pre-Lie algebra, Novikov algebra

Acknowledgements: The work was supported by the Program of Fundamental Research RAS (project FWNF-2022-0002).

For citation: Bokut L. A., Kolesnikov P. S. On the Locality of Formal Distributions Over Right-Symmetric and Novikov Algebras. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 83–100. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.83

1. Введение

Конформные алгебры были введены в [17] как инструмент теории вертексных алгебр, возникших в математической физике и теории представлений. Ключевым утверждением, используемым для построения примеров вертексных алгебр (см., например, [12]), является лемма Донга, согласно которой для любой системы попарно локальных формальных распределений над алгеброй Ли все их конформные n-произведения также локальны друг другу. Лемма Донга также играет важную роль в построении свободных конформных алгебр (ассоциативных и лиевых), благодаря ей для построения универсального объекта достаточно фиксировать значения функции локальности только на порождающих элементах [27].

Ассоциативные, лиевы и йордановы конформные алгебры хорошо изучены в серии работ (см., например, [8; 11; 18; 20; 29]). С категорной точки зрения, если класс $\mathfrak{M}$ «обычных» алгебр над полем $\Bbbk$ представлен морфизмами операд $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \to \mathrm{Mult}_{\Bbbk}$, где $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ — операда, соответствующая классу $\mathfrak{M}$, и $\mathrm{Mult}_{\Bbbk}$ — мультикатегория векторных пространств над $\Bbbk$ с полилинейными отображениями, то $\mathfrak{M}$-конформные алгебры являются морфизмами $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{M}^*(\Bbbk[\partial])$, где $\mathcal{M}^*(\Bbbk[\partial])$ — мультикатегория модулей над алгеброй Хопфа многочленов от одной переменной (см. детали в [6]).

Таким образом, естественно вводятся другие многообразия конформных алгебр, исследование строения таких систем и связей между конформными алгебрами различных многообразий является интересной алгебраической задачей. Конформные алгебры Пуассона изучались в [22], правосимметрические (прелиевы) конформные алгебры были введены в [16] вместе с конформными алгебрами Новикова. Последние оказались тесно связанными с классом «обычных» алгебр Новикова – Пуассона, причем исследование конформных алгебр Новикова помогает решать алгебраические задачи об алгебрах Новикова – Пуассона [4]. Дендриформные (преассоциативные) конформные алгебры возникли в работах [15; 28] в связи с задачами теории деформаций конформных алгебр.

Напомним, что класс правосимметрических алгебр состоит из всех пар $(V, \circ)$, где V — векторное пространство над данным полем $\Bbbk$; $\circ$ — билинейная операция на V, $(x, y) \mapsto x \circ y$, такая, что

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ y - x \circ (z \circ y) \tag{1.1}$$

для всех $x, y, z \in V$. Если вдобавок на V выполнено тождество

$$x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z), \tag{1.2}$$

то $(V, \circ)$ называется алгеброй Новикова. Это понятие возникло в [3] и [1], где тождества (1.1), (1.2) (или их противоположные версии) использовались для описания условий на координаты тензоров ранга 3, возникающих в задачах функционального анализа и уравнений математической физики.

Примеры алгебр Новикова можно построить следующим образом. Если A — коммутативная (и ассоциативная) алгебра с дифференцированием $d : A \to A$, то пространство A, снабженное новой операцией $(x, y) \mapsto x \circ y = d(x)y$, является алгеброй Новикова, которая обозначается $A^{(d)}$. В работах [10] и [7] было показано, что для всякой алгебры Новикова V найдется коммутативная алгебра A с дифференцированием d, такая, что V изоморфна подалгебре в $A^{(d)}$. Аналогичное утверждение было получено в [4] для квадратичных конформных алгебр Новикова, которые непосредственно связаны с алгебрами Новикова – Пуассона. Чтобы исследовать проблему вложения для конформных алгебр Новикова в полной общности, нужно сначала изучить свободные конформные алгебры Новикова. Для этого необходимо выяснить, выполняется ли лемма Донга для алгебр Новикова.

Цель данной статьи — установить, что аналог леммы Донга верен для алгебр Новикова, но не выполняется для прелиевых и преассоциативных многообразий алгебр.

Всюду в дальнейшем $\Bbbk$ означает поле характеристики нуль, $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

2. Формальные распределения, локальность и разложение операторного произведения

Пусть A — некоторая алгебра, т. е. векторное пространство над полем $\Bbbk$, $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, снабженное билинейной операцией (умножением) $\mu : A \times A \to A$, $\mu(a,b) = ab$, для $a, b \in A$. Мы не предполагаем здесь, что операция μ ассоциативна или коммутативна.

Формальным распределением над A называется бесконечный в обе стороны формальный степенной ряд вида

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \quad a_n \in A, \tag{2.1}$$

от формальной переменной z. Пространство всех формальных распределений над A обозначается $A[[z, z^{-1}]]$. В отличие от обычных (или даже лорановых) формальных степенных рядов над A, формальные распределения, вообще говоря, нельзя перемножать обычным способом из-за потенциально бесконечных сумм, возникающих при вычислении коэффициентов произведения. Тем не менее если даны два формальных распределения $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$, то можно определить произведение

$$a(w)b(z) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n b_m w^{-n-1} z^{-m-1} \in A[[w, w^{-1}, z, z^{-1}]].$$

Пара $(a(z), b(z))$ формальных распределений над алгеброй A называется *локальной*, если найдется такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что

$$a(w)b(z)(w-z)^N = 0. \tag{2.2}$$

Минимальное такое число N называется *уровнем локальности* пары $(a(z), b(z))$.

Говорят, что два формальных распределения $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ взаимно локальны, если и $(a(z), b(z))$, и $(b(z), a(z))$ — локальные пары.

Замечание 1. Пусть ∂ означает формальное дифференцирование рядов, т. е. если $a(z)$ имеет вид (2.1), то

$$(\partial a)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n-1) a_n z^{-n-2} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_{n-1} z^{-n-1}.$$

Если $a(w)b(z)(w-z)^N = 0$, то $(\partial a)(w)b(z)(w-z)^{N+1} = 0$, так же как и $a(w)(\partial b)(z)(w-z)^{N+1} = 0$.

Пример 1. Пусть A — ассоциативная алгебра, порожденная элементами q, t, t^{-1} с соотношением $qt - tq = 1$. (Это алгебра дифференциальных операторов на алгебре многочленов Лорана $\Bbbk[t, t^{-1}]$.) Тогда формальные распределения

$$q^{(m)}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m!} t^n q^m z^{-n-1} \in A[[z, z^{-1}]], \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

попарно взаимно локальны, причем уровень локальности для пары рядов $(q^{(m)}(z), q^{(k)}(z))$ равен $N = m + 1$.

Пример 2. Пусть V — алгебра Новикова с операцией $(a, b) \mapsto a \circ b$, $a, b \in V$. Тогда пространство многочленов Лорана $V[t, t^{-1}]$, снабженное операцией

$$[at^n, bt^m] = (n(b \circ a) - m(a \circ b))t^{m+n-1}, \quad a, b \in V,\ n, m \in \mathbb{Z},$$

является алгеброй Ли, причем ряды вида

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} at^n z^{-n-1}, \quad a \in V,$$

попарно локальны с уровнем $N \le 2$.

В частности, для 1-мерной коммутативной (следовательно, новиковской) алгебры $V = \Bbbk$ такой ряд порождает конформную алгебру Вирасоро [8].

Легко видеть (см. [19]), что пара $(a(z), b(z))$ формальных распределений над алгеброй A локальна тогда и только тогда, когда существует такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{N}{s} a_{n-s} b_{m+s} = 0 \tag{2.3}$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$.

Для данной локальной пары $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ их λ-*произведение* — это многочлен от формальной переменной λ с коэффициентами в пространстве $A[[z, z^{-1}]]$, определенный следующим образом:

$$(a(z)\ {}_{(\lambda)}\ b(z)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!} c^{(n)}(z),$$

где

$$c^{(n)}(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} a(w)b(z)(w-z)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.4}$$

Здесь $\operatorname*{Res}_{w=0}$ означает вычет формального распределения, т. е. коэффициент при w^{-1} (зависящий от z). Коэффициент $c^{(n)}(z)$ называется n-*произведением* рядов $a(z)$ и $b(z)$, он обозначается $(a_{\ (n)}\ b)(z)$. Нетрудно вычислить (см. [19; 27]), что

$$c^{(n)}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (a_{\ (n)}\ b)_m z^{-m-1}, \quad (a_{\ (n)}\ b)_m = \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{n}{s} a_{n-s} b_{m+s}.$$

Важность n-произведений становится понятной ввиду следующего наблюдения. Допустим, $(a(z), b(z))$ — локальная пара формальных распределений. Из (2.3) следует, что всякий элемент из A вида $a_k b_m$, $k, m \in \mathbb{Z}$, может быть выражен линейной комбинацией элементов

$$a_0 b_{k+m}, a_1 b_{k+m-1}, \ldots, a_{N-1} b_{k+m-N+1}.$$

Явный вид такого выражения известен как формула разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE):

$$a(w)b(z) = \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{s!} (a_{\ (s)}\ b)(z) \frac{\partial^s}{\partial z^s} \delta(w-z).$$

Таким образом, произведение двух формальных распределений от разных переменных разлагается в конечную сумму по производным формальной дельта-функции

$$\delta(w-z) = \sum_{r+s=-1} w^r z^s \in \Bbbk[[w, w^{-1}, z, z^{-1}]].$$

Теорема 1 (лемма Донга; см., например, [12])**.** *Пусть A — алгебра Ли, и пусть $a(z), b(z), c(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ — попарно взаимно локальные формальные распределения. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ пары распределений $(a_{\ (n)}\ b)(z), c(z)$ и $a(z), (b_{\ (n)}\ c)(z)$ локальны.*

Для формальных распределений над ассоциативной алгеброй A лемма Донга также верна (см., например, [27]). Цель данной статьи — изучить этот вопрос для родственных многообразий: прелиевых (правосимметрических) алгебр, алгебр Новикова и преассоциативных (дендриформных) алгебр. Последние представляют собой алгебры с двумя билинейными операциями, поэтому проверку выполнения условия локальности (подобного утверждению теоремы 1) необходимо проводить для восьми случаев: имеется четыре возможных пары формальных распределений, для каждой нужно проверить два условия локальности.

3. Локальность формальных распределений над преассоциативными алгебрами

Понятие преассоциативной (дендриформной) алгебры было предложено Ж.-Л. Лодеем [23]. Исходное определение этого класса алгебр включает две билинейные операции $(x, y) \mapsto x \prec y$ и $(x, y) \mapsto x \succ y$, удовлетворяющие некоторому списку тождеств степени 3. Эти тождества могут быть получены из соотношения ассоциативности при помощи общей процедуры (дендриформного расщепления [5]). Та же самая процедура, примененная к тождествам алгебр Ли, приводит к понятию прелиевой (правосимметрической) алгебры. Именно поэтому мы предпочитаем термин «преассоциативная», а не «дендриформная» алгебра.

Удобно определять преассоциативные алгебры при помощи другой пары билинейных операций.

Определение 1. *Преассоциативной алгеброй называется векторное пространство A, снабженное двумя билинейными операциями $(x, y) \mapsto x * y$ и $(x, y) \mapsto xy$, удовлетворяющими следующим тождествам:*

$$(x * y) * z = x * (y * z), \tag{3.1}$$

$$(x * y)z = x(yz), \tag{3.2}$$

$$x(y * z) = (xy) * z - (x, y, z), \tag{3.3}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов относительно второй билинейной операции.

Эти две операции связаны с операциями $\prec$ и $\succ$ из оригинального определения [23] следующим образом:

$$x * y = x \prec y + x \succ y, \quad xy = x \succ y.$$

Пусть A — преассоциативная алгебра и $a(z), b(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ — два формальных распределения над A. Поскольку в A имеется две операции, определение локальности формальных распределений $(a(z), b(z))$ содержит два условия. Именно, если существует такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что $a(w) * b(z)(w - z)^N = 0$, то будем говорить, что пара $(a(z), b(z))$ является *$*$-локальной*; если же $a(w)b(z)(w - z)^N = 0$ для некоторого $N \in \mathbb{Z}_+$, то пара $(a(z), b(z))$ называется *$\succ$-локальной*.

Для данного $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$(a_{(n)} b)(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} a(w)b(z)(w - z)^n, \quad (a *_{(n)} b)(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} a(w) * b(z)(w - z)^n,$$

как и в случае алгебр с одной операцией.

Цель данного раздела — показать, что лемма Донга не выполняется в полном объеме для формальных распределений над преассоциативными алгебрами. Начнем с доказательства утверждений положительного характера.

Теорема 2. *Пусть A — преассоциативная алгебра и $a(z), b(z), c(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ — попарно взаимно $*$-локальные и $\succ$-локальные формальные распределения. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$:*

1) *пара $a(z), (b\,{}_{(n)}\, c)(z)$ является $\succ$-локальной;*
2) *пара $a(z), (b *_{(n)} c)(z)$ является $*$-локальной и $\succ$-локальной;*
3) *пара $(a *_{(n)} b)(z), c(z)$ является $*$-локальной и $\succ$-локальной.*

Доказательство. Все эти утверждения вытекают из вложения преассоциативной алгебры A в ассоциативную алгебру Роты – Бакстера $\hat{A}$, описанного в [14]. Напомним существенные для нашей задачи детали построения такого вложения.

Как векторное пространство $\hat{A}$ является прямой суммой двух копий пространства A:

$$\hat{A} = A \dotplus \bar{A}.$$

Умножение $(x, y) \mapsto x \cdot y$ для $x, y \in \hat{A}$ определено по правилу

$$\begin{gathered} u \cdot v = u * v, \quad u, v \in A; \\ \bar{u} \cdot v = \overline{u * v} - \overline{uv}, \quad \bar{u} \in \bar{A},\ v \in A; \\ u \cdot \bar{v} = \overline{uv}, \quad u \in A,\ \bar{v} \in \bar{A}; \\ \bar{u} \cdot \bar{v} = 0, \quad \bar{u}, \bar{v} \in \bar{A}. \end{gathered}$$

Относительно этой операции $\hat{A}$ является ассоциативной алгеброй. Для $x \in \{a, b, c\}$ будем рассматривать $x(z)$ и $\bar{x}(z)$ как формальные распределения над $\hat{A}$: если $x(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n-1}$, $x_n \in A$, то

$$\bar{x}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{x}_n z^{-n-1}, \quad \bar{x}_n \in \bar{A} \subset \hat{A}.$$

По условию теоремы $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$, $\bar{c}(z)$ являются попарно взаимно локальными формальными распределениями из $\hat{A}[[z, z^{-1}]]$. В частности, рассмотрим $a(z)$, $b(z)$ и $\bar{c}(z)$. По лемме Донга для ассоциативных алгебр пара распределений $(a(z), \overline{(b\,{}_{(n)}\, c)}(z))$ над $\hat{A}$ является локальной. Поскольку $(b\,{}_{(n)}\, \bar{c})(z) = \overline{(b\,{}_{(n)}\, c)}(z)$ по определению операции на $\hat{A}$, пара $(a(z), (b\,{}_{(n)}\, c)(z))$ является $\succ$-локальной.

Аналогично из $\overline{(b *_{(n)} c)}(z) = (\bar{b}\,{}_{(n)}\, c)(z) + (b\,{}_{(n)}\, \bar{c})(z)$ следует, что пара $(a(z), (b *_{(n)} c)(z))$ является $\succ$-локальной в $A[[z, z^{-1}]]$. Условие $*$-локальности этой пары непосредственно вытекает из леммы Донга для ассоциативной алгебры $(A, *)$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. □

Рассмотрим оставшиеся условия локальности для формальных распределений над преассоциативной алгеброй, а именно $*$-локальность пар $(a(z), (b\,{}_{(n)}\, c)(z))$, $((a\,{}_{(n)}\, b)(z), c(z))$ и $\succ$-локальность пары $((a\,{}_{(n)}$

$b)(z), c(z))$. Покажем на примере, что эти условия в общем случае не выполнены. Мы построим подходящий пример преассоциативной алгебры A при помощи порождающих элементов и определяющих соотношений.

Предложение 1. *Существует преассоциативная алгебра A и формальное распределение $a(z) \in A[[z, z^{-1}]]$, такое, что пара $(a(z), a(z))$ является $*$-локальной и $\succ$-локальной, но $(a(z), (a_{(0)}\, a)(z))$ не является $*$-локальной и $((a_{(0)}\, a)(z), a(z))$ не является ни $*$-локальной, ни $\succ$-локальной.*

Доказательство. Пусть $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — счетное множество, и пусть $F(X)$ означает свободную преассоциативную алгебру, порожденную множеством X. Обозначим через I идеал в $F(X)$, порожденный элементами

$$a_n * a_m - a_0 * a_{n+m}, \quad a_n a_m - a_0 a_{n+m}$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Рассмотрим фактор-алгебру $A = F(X)/I$. Тогда формальное распределение

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + I) z^{-n-1} \in A[[z, z^{-1}]]$$

обладает следующими свойствами:

$$(a(w) * a(z))(w - z) = 0, \quad (a(w)a(z))(w - z) = 0.$$

Другими словами, пара $(a(z), a(z))$ является $*$-локальной и $\succ$-локальной с уровнем локальности $N = 1$.

Чтобы показать, что пара $((a_{(0)} a)(z), a(z))$ не является $\succ$-локальной, рассмотрим элементы, представляющие левую часть необходимого соотношения (2.3) для этой пары:

$$f_{n,m}^{(N)} = \sum_{s=0}^{N} (-1)^s \binom{N}{s} (a_0 a_{n-s}) a_{m+s} \in F(X), \quad n, m \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.4}$$

Достаточно показать, что для всякого $N \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $n, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $f_{n,m}^{(N)} \notin I$. Для этого используем однородность определяющих соотношений, которая позволит явно найти все преассоциативные многочлены степени 3, лежащие в I.

Легко видеть, что тождества (3.1)–(3.3) позволяют переписать произвольный терм в свободной преассоциативной алгебре $F(X)$, порожденной множеством X, в виде линейной комбинации одночленов вида

$$u_1 * u_2 * \cdots * u_k, \quad k \geq 1, \tag{3.5}$$

где каждое u_i является неассоциативным словом от X относительно только одной операции $(x, y) \mapsto xy$. Как было показано в [21], мономы вида (3.5) линейно независимы, т. е. образуют линейный базис пространства $F(X)$. Любой элемент из $F(X)$ может быть единственным образом записан в *нормальной форме*, т. е. в виде линейной комбинации мономов (3.5). Рассмотрим

$$S = \{a_n a_m - a_0 a_{n+m},\, a_n * a_m - a_0 * a_{n+m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \subseteq F(X)$$

и пространство I_3 всех элементов степени 3 из идеала I, порожденного S в $F(X)$. Пространство I_3 натянуто на многочлены sa_k, $a_k s$, $s * a_k$, $a_k * s$, где $s \in S$, $k \in \mathbb{Z}$. Приводя эти произведения к нормальной форме в $F(X)$, получаем, что пространство $I_3 \subset I$ натянуто на

$$(a_n a_m)a_k - (a_0 a_{n+m})a_k, \quad a_k(a_n a_m) - a_k(a_0 a_{n+m}), \tag{3.6}$$
$$(a_n a_m) * a_k - (a_0 a_{n+m}) * a_k, \quad a_k * (a_n a_m) - a_k * (a_0 a_{n+m}), \tag{3.7}$$
$$(a_n * a_m) * a_k - (a_0 * a_{n+m}) * a_k, \quad a_k * (a_n * a_m) - a_k * (a_0 * a_{n+m}), \tag{3.8}$$
$$a_n(a_m a_k) - a_0(a_{n+m} a_k), \tag{3.9}$$
$$(a_k a_n) * a_m - (a_k, a_n, a_m) - (a_k a_0) * a_{n+m} + (a_k, a_0, a_{n+m}), \tag{3.10}$$

где $n, m, k \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ (здесь, как и выше, (x, y, z) означает ассоциатор относительно неассоциативной операции $(x, y) \mapsto xy$). Используя линейную редукцию, заменяем (3.9) и (3.10) на

$$a_n(a_0 a_k) - a_0(a_0 a_{n+k}), \tag{3.11}$$
$$(a_0 a_n) * a_m - (a_0 a_n)a_m - (a_0 a_0) * a_{n+m} + (a_0 a_0)a_{n+m}, \tag{3.12}$$

где $n, m, k \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Поскольку все одночлены вида $(a_0 a_{n-s})a_{m+s}$, которые входят в запись $f^{(N)}_{n,m}$, линейно независимы по модулю (3.6)–(3.8), (3.11), (3.12), то мы заключаем, что $f^{(N)}_{n,m} \notin I$.

Аналогично, если допустить, что пара $((a_{\,(0)}\, a)(z), a(z))$ является $*$-локальной, то найдется такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что

$$g^{(N)}_{n,m} = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{N}{s} (a_0 a_{n-s}) * a_{m+s} \in I$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Последнее невозможно, поскольку

$$I \ni \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{N}{s} ((a_0 a_{n-s}) * a_{m+s} - (a_0 a_{n-s})a_{m+s} - (a_0 a_0) * a_{n+m} \\ + (a_0 a_0)a_{n+m})) = g^{(N)}_{n,m} - f^{(N)}_{n,m}$$

при $N > 0$ (ср. с (3.12)), а мы знаем, что $f^{(N)}_{n,m} \notin I$.

Наконец, если пара $(a(z), (a_{\ (0)}\ a)(z))$ является $*$-локальной, то найдется такое $N \in \mathbb{Z}_+$, что

$$h_{n,m}^{(N)} = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{N}{s} a_{n-s} * (a_0 a_{m+s}) \in I$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Единственная возможность представить $h_{n,m}^{(N)}$ как элемент из I_3 — разложить его в линейную комбинацию элементов вида (3.7), что невозможно, поскольку вторая буква всех слов из $h_{n,m}^{N}$ одинакова и равна a_0. □

4. О лемме Донга для прелиевых алгебр и алгебр Новикова

Для данной преассоциативной алгебры A ее «коммутаторная» алгебра $A^{(-)}$ — это то же самое векторное пространство A, снабженное операцией

$$x \circ y = x * y - xy - yx, \quad x, y \in A.$$

В терминах исходных операций $\prec$ и $\succ$ умножение $\circ$ выражается следующим образом: $x \circ y = x \prec y - y \succ x$. Алгебра $A^{(-)}$ является правосимметрической (прелиевой).

Как было показано в [13], всякая прелиева алгебра V может быть вложена в универсальную обертывающую преассоциативную алгебру $U(V)$, причем выполняется аналог теоремы Пуанкаре – Биркгофа – Витта (см. также [9]).

Теорема 3. *Пусть V — прелиева алгебра с операцией $(x, y) \mapsto x \circ y$, $x, y \in V$. Если $a(z), b(z), c(z) \in V[[z, z^{-1}]]$ — попарно взаимно локальные формальные распределения над V, то пара $((a_{\ (n)}\ b)(z), c(z))$ локальна для любого $n \in \mathbb{Z}_+$, но $(a(z), (b_{\ (n)}\ c)(z))$ не обязательно локальна.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения, используя связь между прелиевыми и лиевыми алгебрами [14].

Для данной прелиевой алгебры V рассмотрим «обычную» алгебру $\hat{V}$, построенную по следующему правилу. Пространство $\hat{V}$ является прямой суммой двух копий пространства V: $\hat{V} = V \dotplus \bar{V}$. Умножение $(x, y) \mapsto [xy]$, $x, y \in \hat{V}$, задано при помощи

$$\begin{gathered}
[uv] = u \circ v - v \circ u, \quad u, v \in V; \\
[\bar{u}v] = \overline{u \circ v}, \quad \bar{u} \in \bar{V},\ v \in V; \\
[u\bar{v}] = -\overline{v \circ u}, \quad u \in V,\ \bar{v} \in \bar{V}; \\
[\bar{u}\bar{v}] = 0, \quad \bar{u}, \bar{v} \in \bar{V}.
\end{gathered}$$

Относительно этой операции $\hat{V}$ является алгеброй Ли.

Допустим,

$$x(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n-1}, \quad x_n \in V,\ x \in \{a, b, c\}.$$

Поскольку $V \subset \hat{V}$, мы можем рассматривать эти ряды как элементы пространства $\hat{V}[[z, z^{-1}]]$. Формальные распределения с коэффициентами $\bar{x}_n$, $x \in \{a, b, c\}$, также лежат в пространстве $\hat{V}[[z, z^{-1}]]$:

$$\bar{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{x}_n z^{-n-1}, \quad \bar{x}_n \in \bar{V} \subset \hat{V}.$$

По условию теоремы пары $(\bar{x}(z), y(z))$ локальны в $\hat{V}[[z, z^{-1}]]$ для всех $x, y \in \{a, b, c\}$. Из определения $\hat{V}$ непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}[\bar{a}\ _{(n)}\ b]_m &= \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{n}{s} [\bar{a}_{n-s} b_{m+s}] \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{n}{s} \overline{a_{n-s} \circ b_{m+s}} = \overline{(a\ _{(n)}\ b)}_m\end{aligned}$$

для любых $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, по лемме Донга для алгебр Ли распределения $\overline{(a\ _{(n)}\ b)}(z)$ и $c(z)$ образуют локальную пару в $\hat{V}[[z, z^{-1}]]$. Последнее означает, что

$$0 = [\overline{(a\ _{(n)}\ b)}(w) c(z)](w-z)^N = \overline{(a\ _{(n)}\ b)(w) \circ c(z)}(w-z)^N$$

для достаточно большого $N \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $\bar{V}$ — изоморфная копия V, мы получаем первое утверждение: пара $((a\ _{(n)}\ b)(z), c(z))$ локальна в $V[[z, z^{-1}]]$.

Чтобы построить пример, подтверждающий второе утверждение теоремы, применим метод базисов Грёбнера – Ширшова (БГШ) для прелиевых алгебр, предложенный в работе [2].

Пусть $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — множество порождающих элементов, вполне упорядоченное по правилу

$$a_0 < a_{-1} < a_1 < a_{-2} < a_2 < \dots .$$

Следуя [2], обозначим через $\mathrm{RS}(X)$ свободную прелиеву алгебру, порожденную множеством X. Через I обозначим идеал в $\mathrm{RS}(X)$, порожденный множеством

$$S = \{h_{n,m} = a_n \circ a_m - a_0 \circ a_{n+m} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\},$$

и пусть $V = \mathrm{RS}(X)/I$. Тогда формальное распределение

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n + I) z^{-n-1} \in V[[z, z^{-1}]]$$

локально самому себе, уровень локальности равен 1.

Отметим, что из тождества правосимметричности вытекает, что

$$(a_0 \circ a_k) \circ a_m - (a_0 \circ a_m) \circ a_k = a_0 \circ (a_k \circ a_m) - a_0 \circ (a_m \circ a_k) \\ = a_0 \circ (h_{k,m} - h_{m,k})$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Поэтому $(a_0 \circ a_k) \circ a_m - (a_0 \circ a_m) \circ a_k \in I$ для любых $k, m \in \mathbb{Z}$.

Далее, рассмотрим

$$I \ni h_{1,m} \circ a_k = a_1 \circ (a_m \circ a_k) + (a_1 \circ a_k) \circ a_m - a_1 \circ (a_k \circ a_m) - (a_0 \circ a_{m+1}) \circ a_k \\ = a_1 \circ h_{m,k} + a_1 \circ (a_0 \circ a_{m+k}) + h_{1,k} \circ a_m + (a_0 \circ a_{k+1}) \circ a_m - a_1 \circ h_{k,m} \\ - a_1 \circ (a_0 \circ a_{k+m}) - (a_0 \circ a_{m+1}) \circ a_k \in (a_0 \circ a_{k+1}) \circ a_m - (a_0 \circ a_k) \circ a_{m+1} + I.$$

Следовательно,

$$g_{m,k} = (a_0 \circ a_{k+1}) \circ a_m - (a_0 \circ a_k) \circ a_{m+1} \in I$$

для всех $k, m \in \mathbb{Z}$.

Поскольку множество S состоит из однородных элементов, идеал I также однородный, поэтому несложно найти все элементы степени 3 из БГШ идеала I. Следуя алгоритму пополнения множества определяющих соотношений из [2], достаточно найти все композиции правого умножения

$$h_{n,m} \circ a_k, \quad a_k < a_m. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что все эти композиции тривиальны по модулю системы

$$S' = \{h_{n,m}, g_{m,k} \mid n, m, k \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Действительно, старшее слово многочлена $h_{n,m}$ (относительно того же порядка, что используется в [2]) равно $a_n \circ a_m$, и $(a_n \circ a_m) \circ a_k$ не является «хорошим» (в смысле [2]), причем

$$h_{n,m} \circ a_k = a_n \circ (a_m \circ a_k) + (a_n \circ a_k) \circ a_m - a_n \circ (a_k \circ a_m) - (a_0 \circ a_{n+m}) \circ a_k \\ = a_n \circ h_{m,k} + a_n \circ (a_0 \circ a_{m+k}) + h_{n,k} \circ a_m + (a_0 \circ a_{n+k}) \circ a_m - a_n \circ h_{k,m} \\ - a_n \circ (a_0 \circ a_{k+m}) - (a_0 \circ a_{n+m}) \circ a_k = a_n \circ h_{m,k} + h_{n,k} \circ a_m - a_n \circ h_{k,m} \\ + (a_0 \circ a_{n+k}) \circ a_m - (a_0 \circ a_{n+m}) \circ a_k \\ = a_n \circ h_{m,k} + h_{n,k} \circ a_m - a_n \circ h_{k,m} + \sum_{s=0}^{k-m} g_{m+s,n+k-s}.$$

Старшие слова всех слагаемых в правой части меньше, чем $(a_n \circ a_m) \circ a_k$, что и требуется для тривиальности композиции.

Следовательно, S' содержит все многочлены степени ≤ 3 из БГШ идеала I.

Вернемся к формальному ряду $a(z) \in A[[z, z^{-1}]]$ и допустим, что $(a(z), (a_{\,(0)}\, a)(z))$ — локальная пара. Тогда найдется $N \in \mathbb{Z}_+$, такое, что

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-1)^s \binom{N}{s} a_{n-s} \circ (a_0 \circ a_{m+s}) \in I$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Поскольку все слова в этой линейной комбинации S'-редуцированы, они линейно независимы по модулю I, — противоречие. □

Наконец, рассмотрим частный случай, когда V — алгебра Новикова, т. е. удовлетворяет тождествам (1.1) и (1.2).

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 допустим, что V — алгебра Новикова. Тогда формальные распределения $a(z)$, $(b_{\,(n)}\, c)(z)$ образуют локальную пару в $V[[z, z^{-1}]]$.*

Доказательство. Пусть $(a(w) \circ c(z))(w - z)^N = 0$. Тогда для того же самого $N \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned}(a(w) \circ (b_{\,(n)}\, c)(z))(w - z)^N &= (a(w) \circ \operatorname*{Res}_{y=0}(b(y) \circ c(z))(y - z)^n)(w - z)^N \\ &= \operatorname*{Res}_{y=0}((a(w) \circ (b(y) \circ c(z)))(w - z)^N)(y - z)^n \\ &= \operatorname*{Res}_{y=0}(b(y) \circ (a(w) \circ c(z))(w - z)^N)(y - z)^n = 0\end{aligned}$$

в силу (1.2). □

Из теоремы 3 и следствия 1 вытекает, что лемма Донга верна для алгебр Новикова.

5. Заключение

Мы показали, что аналог леммы Донга для формальных распределений над алгеброй A верен для случая, когда A — алгебра Новикова, но не верен для случаев, когда A лежит в многообразии прелиевых (правосимметрических) или преассоциативных (дендриформных) алгебр. Используя методы, предложенные в данной работе, несложно показать, что аналог леммы Донга выполняется для алгебр Лейбница [24] и ассоциативных диалгебр в смысле Ж.-Л. Лодея [23]. Интерес представляет вопрос о том, выполняется ли лемма Донга для формальных распределений над прекоммутативными алгебрами (Zinbiel algebras).

Список источников

1. Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, Фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1036–1039.
2. Бокуть Л. А., Чэнь Ю., Ли Ю., Базисы Грёбнера – Ширшова правосимметричных алгебр Винберга – Козюля – Герстенхабера // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 8. С. 55–67.
3. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 4. С. 13–30.
4. Колесников П. С., Нестеренко А. А. Конформные обертывающие алгебр Новикова – Пуассона // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64, № 3. С. 546–561.
5. Splitting of operations, Manin products, and Rota–Baxter operators / C. Bai, O. Bellier, L. Guo, X. Ni // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2013. N 3. P. 485–524. https://doi.org/10.1093/imrn/rnr266
6. Bakalov B., D' Andrea A., Kac V. G. Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. 2001. Vol. 162. P. 1–140. https://doi.org/10.1006/aima.2001.1993
7. Bokut L. A., Chen Y., Zhang Z. Gröbner–Shirshov bases method for Gelfand–Dorfman–Novikov algebras // J. Algebra Appl. 2017. Vol. 16, N 1, Art. 1750001. https://doi.org/10.1142/S0219498817500013
8. D'Andrea A., Kac V. G. Structure theory of finite conformal algebras // Selecta Math. New Ser. 1998. Vol. 4. P. 377–418. https://doi.org/10.1007/s000290050036
9. Dotsenko V., Tamaroff P. Endofunctors and Poincaré–Birkhoff–Witt theorems // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2021. N 16. P. 12670–12690. https://doi.org/10.1093/imrn/rnz369
10. Dzhumadil'daev A. S., Löfwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy Appl. 2002. Vol. 4, N 2. P. 165–190. https://doi.org/10.4310/hha.2002.v4.n2.a8
11. Fattori D., Kac V. G. Classification of finite simple Lie conformal superalgebras // J. Algebra. 2002. Vol. 258, N 1. P. 23–59. https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00504-5
12. Frenkel E., Ben-Zvi D. Vertex Algebras and Algebraic Curves. 2nd ed. Providence, RI : AMS, 2004. (Mathematical Surveys and Monographs ; vol. 88). https://doi.org/10.1090/surv/088
13. Gubarev V. Poincaré–Birkhoff–Witt theorem for pre-Lie and post-Lie algebras // J. Lie Theory. 2020. Vol. 30, N 1. P. 223–238.
14. Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S. Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. Vol. 11, N 2. P. 226–245. https://doi.org/10.2478/s11533-012-0138-z
15. Hong Y., Bai C. On antisymmetric infinitesimal conformal bialgebras // J. Algebra. 2021. Vol. 586. P. 325–356. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.06.029
16. Hong Y., Li F. Left-symmetric conformal algebras and vertex algebras // J. Pure and Appl. Algebra. 2015. Vol. 219, N 8. P. 3543–3567. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.12.012
17. Kac V. G. Vertex Algebras for Beginners. Providence, RI : AMS, 1997. (Univ. Lect. Ser. ; vol. 10). https://doi.org/10.1090/ulect/010
18. Cantarini N., Kac V. G. Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras // J. Algebra. 2007. Vol. 313, N 1. P. 100–124. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.040

19. Kac V. G. Formal distribution algebras and conformal algebras // 12th international congress of mathematical physics (ICMP97) / eds.: De Wit D. [et al.]. Cambridge, MA : Internat. Press, 1999. P. 80–97.
20. Kolesnikov P. S. Associative conformal algebras with finite faithful representation // Adv. Math. 2006. Vol. 202, N 2. P. 602–637. https://doi.org/10.1016/j.aim.2005.04.001
21. Kolesnikov P. Gröbner–Shirshov bases for pre-associative algebras // Comm. Algebra. 2017. Vol. 45, N 12. P. 5283–5296. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1304552
22. Kolesnikov P. S. Universal enveloping Poisson conformal algebras // Internat. J. Algebra Comput. 2020. Vol. 30, N 5. P. 1015–1034. https://doi.org/10.1142/S0218196720500289
23. Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and related operads. Lectures Notes in Math. Vol. 1763 / eds.: Loday J.-L., Frabetti A., Chapoton F., Goichot F. Berlin : Springer-Verl., 2001. P. 7–66. https://doi.org/10.1007/3-540-45328-8_2
24. Loday J.-L. Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz // Enseign. Math. 1993. Vol. 39. P. 269–293.
25. Loday J.-L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. 1993. Vol. 296. P. 139–158. https://doi.org/10.1007/BF01445099
26. Replicators, Manin white product of binary operads and average operators / J. Pei, C. Bai, L. Guo, X. Ni // New trends in algebras and combinatorics. Hackensack, NJ : World Scientific Publishing Co., 2020. P. 317–353. https://doi.org/10.1142/9789811215476_0019
27. Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. 1999. Vol. 217. P. 496–527. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7834
28. Yuan L. O-operators and Nijenhuis operators of associative conformal algebras // J. Algebra. 2022. Vol. 609. P. 245–291. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.003
29. Zelmanov E. I. On the structure of conformal algebras // Proc. Intern. Conf. on Combinatorial and Computational Algebra. Contemp. Math. Vol. 264. Providence, RI : AMS, 2000. P. 139–153. https://doi.org/10.1090/conm/264/04216

References

1. Balinskii A.A., Novikov S.P. Poisson brackets of hydrodynamics type, Frobenius algebras and Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 1985, vol. 32, no. 1, pp. 228–231.
2. Bokut L.A., Chen Y., Li Y. Gröbner–Shirshov bases for Vinberg–Koszul–Gerstenhaber right-symmetric algebras. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, vol. 166, no. 5, pp. 603–612. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9875-3
3. Gel'fand I.M., Dorfman I.Ya. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them. *Funct. Anal. Appl.*, 1979, vol. 13, no. 4, pp. 248–262.
4. Kolesnikov P.S., Nesterenko A.A. Conformal envelopes of Novikov–Poisson algebras. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 598–610.
5. Bai C., Bellier O., Guo L., Ni X. Splitting of operations, Manin products, and Rota–Baxter operators. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2013, no. 3, pp. 485–524. https://doi.org/10.1093/imrn/rnr266
6. Bakalov B., D' Andrea A., Kac V. G. Theory of finite pseudoalgebras. *Adv. Math.*, 2001, vol. 162, pp. 1–140. https://doi.org/10.1006/aima.2001.1993

7. Bokut L.A., Chen Y., Zhang Z. Gröbner–Shirshov bases method for Gelfand–Dorfman–Novikov algebras. *J. Algebra Appl.*, 2017, vol. 16, no. 1, art. no. 1750001, 22 pp. https://doi.org/10.1142/S0219498817500013
8. D'Andrea A., Kac V.G. Structure theory of finite conformal algebras. *Selecta Math. New Ser.*, 1998, vol. 4, pp. 377–418. https://doi.org/10.1007/s000290050036
9. Dotsenko V., Tamaroff P. Endofunctors and Poincaré–Birkhoff–Witt theorems. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2021, no. 16, pp. 12670–12690. https://doi.org/10.1093/imrn/rnz369
10. Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities. *Homology, Homotopy Appl.*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. 165–190. https://doi.org/10.4310/hha.2002.v4.n2.a8
11. Fattori D., Kac V.G. Classification of finite simple Lie conformal superalgebras. *J. Algebra*, 2002, vol. 258, no. 1, pp. 23–59. https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00504-5
12. Frenkel E., Ben-Zvi D. *Vertex Algebras and Algebraic Curves*. 2nd ed. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: AMS, 2004, vol. 88. https://doi.org/10.1090/surv/088
13. Gubarev V. Poincaré–Birkhoff–Witt theorem for pre-Lie and post-Lie algebras. *J. Lie Theory*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 223–238.
14. Gubarev V.Yu., Kolesnikov P.S. Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras. *Cent. Eur. J. Math.*, 2013, vol. 11, no. 2, pp. 226–245. https://doi.org/10.2478/s11533-012-0138-z
15. Hong Y., Bai C. On antisymmetric infinitesimal conformal bialgebras. *J. Algebra*, 2021, vol. 586, pp. 325–356. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.06.029
16. Hong Y., Li F. Left-symmetric conformal algebras and vertex algebras. *J. Pure and Appl. Algebra*, 2015, vol. 219, no. 8, pp. 3543–3567. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.12.012
17. Kac V.G. *Vertex Algebras for Beginners*. Univ. Lect. Ser. Providence, RI: AMS, 1997, vol. 10. https://doi.org/10.1090/ulect/010
18. Cantarini N., Kac V. G. Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras. *J. Algebra*, 2007, vol. 313, no. 1, pp. 100–124. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.040
19. Kac V.G. Formal distribution algebras and conformal algebras. *12th international congress of mathematical physics (ICMP97)*. De Wit, D. et al. (eds.). Cambridge, MA: Internat. Press, 1999, pp. 80–97.
20. Kolesnikov P.S. Associative conformal algebras with finite faithful representation. *Adv. Math.*, 2006, vol. 202, no. 2, pp. 602–637. https://doi.org/10.1016/j.aim.2005.04.001
21. Kolesnikov P. Gröbner–Shirshov bases for pre-associative algebras // *Comm. Algebra*, 2017, vol. 45, no. 12, pp. 5283–5296. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1304552
22. Kolesnikov P.S. Universal enveloping Poisson conformal algebras. *Internat. J. Algebra Comput.*, 2020, vol. 30, no. 5, pp. 1015–1034. https://doi.org/10.1142/S0218196720500289
23. Loday J.-L. Dialgebras. *Dialgebras and related operads*. Lectures Notes in Math. Loday J.-L. , Frabetti A., Chapoton F., Goichot F. (eds.). Berlin, Springer-Verl., 2001, vol. 1763, pp. 7–66. https://doi.org/10.1007/3-540-45328-8_2
24. Loday J.-L. Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz. *Enseign. Math.*, 1993, vol. 39, pp. 269–293.
25. Loday J.-L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. *Math. Ann.*, 1993, vol. 296, pp. 139–158. https://doi.org/10.1007/BF01445099

26. Pei J., Bai C., Guo L., Ni X. Replicators, Manin white product of binary operads and average operators. *New trends in algebras and combinatorics.* Hackensack, NJ, World Scientific Publishing Co., 2020, pp. 317–353. https://doi.org/10.1142/9789811215476_0019
27. Roitman M. On free conformal and vertex algebras. *J. Algebra*, 1999, vol. 217, pp. 496–527. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7834
28. Yuan L. O-operators and Nijenhuis operators of associative conformal algebras. *J. Algebra*, 2022, vol. 609, pp. 245–291. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.003
29. Zelmanov E.I. On the structure of conformal algebras. *Proc. Intern. Conf. on Combinatorial and Computational Algebra.* Contemp. Math., Providence, RI: AMS, 2000, vol. 264, pp. 139–153. https://doi.org/10.1090/conm/264/04216

Об авторах

Бокуть Леонид Аркадьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Российская Федерация, bokut@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0002-9656-768X

Колесников Павел Сегреевич, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Российская Федерация, pavelsk77@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7534-1534

About the authors

Leonid A. Bokut, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, bokut@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0002-9656-768X

Pavel S. Kolesnikov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, pavelsk77@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7534-1534

Поступила в редакцию / Received 23.05.2024
Поступила после рецензирования / Revised 03.07.2024
Принята к публикации / Accepted 05.07.2024