Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 66—82

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.968
MSC 45G05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.66

Об одном интегральном уравнении с вогнутой нелинейностью

Х. А. Хачатрян [1]✉**, А. С. Петросян** [2]

[1] Ереванский государственный университет, Ереван, Республика Армения
[2] Национальный аграрный университет Армении, Ереван, Республика Армения
✉ khachatur.khachatryan@ysu.am

Аннотация. Исследуется нелинейное интегральное уравнение на полуоси со специальным субстохастическим ядром. Такие уравнения встречаются в кинетической теории газов при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках нелинейной модифицированной модели Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК). При определенных ограничениях на нелинейность удается построить положительное непрерывное и ограниченное решение данного уравнения. Более того, доказывается единственность решения в классе ограниченных сверху на полуоси функций, имеющих положительный инфимум. Доказывается также, что соответствующие последовательные приближения равномерно со скоростью некоторой убывающей геометрической прогрессии сходятся к решению указанного уравнения. При одном дополнительном условии исследуется асимптотическое поведение решения на бесконечности. Приводятся конкретные примеры указанных уравнений, для которых автоматически выполняются все условия доказанных фактов.

Ключевые слова: вогнутость, итерации, монотонность, сходимость, асимптотика

Благодарности: Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

Ссылка для цитирования: Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Об одном интегральном уравнении с вогнутой нелинейностью // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 66–82.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.66

Research article

On an Integral Equation with Concave Nonlinearity

Khachatur A. Khachatryan[1]✉, **Haykanush S. Petrosyan**[2]

[1] Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia
[2] Armenian National Agrarian University, Yerevan, Republic of Armenia
✉ khachatur.khachatryan@ysu.am

Abstract. A nonlinear integral equation on the semi-axis with a special substochastic kernel is studied. Such equations are encountered in the kinetic theory of gases when studying the nonlinear integro-differential Boltzmann equation within the framework of the nonlinear modified Bhatnagar-Gross-Crook model(BGC). Under certain restrictions on nonlinearity, it is possible to construct a positive continuous and bounded solution to this equation. Moreover, the uniqueness of the solution in the class of upper bounded on half-line functions having a positive infimum. It is also proved that the corresponding successive approximations converge uniformly at a rate of some geometric progression to the solution of the indicated equation. Under one additional condition, the asymptotic behavior of the solution at infinity is studied. At the end of the work, specific examples of these equations are given for which all the conditions of the proven facts are automatically met.

Keywords: concavity, iterations, monotonicity, convergence, asymptotics

Acknowledgements: The research of the first author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project No. 23RL-1A027.

For citation: Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On an Integral Equation with Concave Nonlinearity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 66–82. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.66

1. Введение

Работа посвящена исследованию следующего класса нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой:

$$f(x) = \int_0^\infty K(x,t)G(f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0,+\infty) \tag{1.1}$$

относительно искомой неотрицательной непрерывной и ограниченной на множестве $\mathbb{R}^+$ функции $f(x)$. В уравнении (1.1) ядро $K(x,t)$ допускает следующее представление:

$$K(x,t) = \int_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)|x-t|}dB(s), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

где $\alpha(x,s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\alpha \in C(\mathbb{R}^+ \times [a,b)), \quad 0 < a < b \leq +\infty,$

2) существуют положительные и измеримые функции $\beta_j(s)$, $j = 1, 2$ на интервале $[a,b)$, такие, что

$$\beta_1(s) \leq \alpha(x,s) \leq \beta_2(s), \quad (x,s) \in \mathbb{R}^+ \times [a,b), \tag{1.3}$$

а $B(s)$ — определенная на $[a,b)$ монотонно возрастающая функция, причем

$$\int\limits_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)} dB(s) < +\infty, \quad \int\limits_a^b dB(s) = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Нелинейность G удовлетворяет следующим ограничениям:

a) $G \in C(\mathbb{R}^+)$ и $G(u)$ монотонно возрастает на множестве $\mathbb{R}^+$;

b) $G(0) = 0$ и существуют числа $\xi > 0$, $\eta > 0$ такие, что $G(\xi) = 2\xi$, $G(\eta) = \eta$;

c) функция $G(u)$ вогнута вверх на $\mathbb{R}^+$;

d) при всяком фиксированном $\sigma \in [0,1]$ функция $\dfrac{G(\sigma u)}{G(u)}$ является монотонно неубывающей на интервале $(0, \eta]$.

Уравнение (1.1) встречается в кинетической теории газов (см. [3; 9; 10; 12]). Изучение вопросов существования единственности и асимптотического поведения построенного решения на бесконечности важно с точки зрения исследования нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках модифицированной модели БГК (см. [3;10;12]). В случае когда функция $\alpha(x,s)$ не зависит от переменной x, уравнение (1.1) возникает также в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [2]). Уравнение (1.1) исследовалось в работах [8;11] в линейном и нелинейном случаях при достаточно сильных ограничениях на функцию $\alpha(x,s)$. Например, вопрос существования однопараметрического семейства нетривиальных линейно растущих или ограниченных решений для соответствующих квазилинейных интегральных уравнений типа (1.1) обсуждался в работах [8], [11]. Небезынтересно отметить, что в случае когда $G(u)$, помимо условий $a) - c)$, удовлетворяет также условию нечетности на множестве $\mathbb{R}$, соответствующее нелинейное интегральное уравнение на всей прямой изучалось в работе [7], где относительно функции $\alpha(x,s)$ предполагалось выполнение следующих условий: $\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $\alpha(x,s) \geq \varepsilon > 0$, $(x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b)$, $\alpha(-x,s) = \alpha(x,s)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $s \in [a,b)$, $\delta := \sup\limits_{(x,s)\in\mathbb{R}\times[a,b)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha(x,s)}\right) < 1$. В указанной работе при выполнении этих условий доказана теорема существования знакопеременного нетривиального ограниченного и непрерывного на $\mathbb{R}$ решения.

Следует отметить также, что нелинейные интегральные уравнения с нагрузками и бифуркационными параметрами достаточно подробно исследованы в работах [5; 6].

В настоящей работе при условиях $1), 2)$ и $a) - d)$ доказываются конструктивные теоремы существования и единственности положительного непрерывного и ограниченного решения. Более того, для специально выбранных последовательных приближений получается оценка разности между предыдущими и последующими итерациями, из которой следует равномерная сходимость этих приближений к решению уравнения (1.1) со скоростью некоторой убывающей геометрической прогрессии. При дополнительном ограничении на нелинейность $G(u)$ исследуется также асимптотическое поведение решения на бесконечности. В конце работы приводятся наглядные примеры функций $\alpha(x,s)$ и $G(u)$, удовлетворяющих всем ограничениям доказанных теорем.

2. Разрешимость уравнения (1.1)

Рассмотрим следующие итерации для уравнения (1.1):

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty K(x,t)G(f_n(t))dt, \\ f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Индукцией несложно проверить выполнение следующих простых и одновременно важных фактов:

$$f_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{2.2}$$

$$f_n(x) \downarrow \quad \text{по} \quad n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Заметим теперь, что имеет место следующее неравенство снизу:

$$f_n(x) \geq \xi, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4}$$

Действительно, выполнение неравенства (2.4) для $n = 0$ сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (2.1) и из того факта, что функция $\frac{G(u)}{u}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$ (последнее сразу получается ввиду условий $a) - c)$). Предположим, что (2.4) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.1) в силу $2), a), b)$ и теоремы Фубини (см. [4]):

$$f_{n+1}(x) \geq G(\xi)\int\limits_0^\infty K(x,t)dt = 2\xi\int\limits_0^\infty\int\limits_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)|x-t|}dB(s)dt =$$

$$=2\xi\int\limits_a^b\alpha(x,s)\int\limits_0^\infty e^{-\alpha(x,s)|x-t|}dtdB(s)=2\xi\int\limits_a^b\alpha(x,s)\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(x,s)|y|}dydB(s)\geq$$

$$\geq 2\xi\int\limits_a^b\alpha(x,s)\int\limits_{-\infty}^0 e^{\alpha(x,s)y}dydB(s)=2\xi\int\limits_a^b dB(s)=\xi.$$

Обозначим теперь через $\sigma_0:=\dfrac{\xi}{\eta}\in(0,1)$. В силу (2.3) и (2.4) имеем

$$\sigma_0 f_0(x)\leq f_1(x)\leq f_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

Тогда, принимая во внимание условия $a), b), c)$ и $d)$, получим

$$G(\sigma_0 f_0(x))\geq\frac{G(\sigma_0\xi)}{G(\xi)}G(f_0(x)),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.6}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\sigma):=\dfrac{G(\sigma\xi)}{G(\xi)}$, $\sigma\in[0,1]$. Очевидно, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, φ монотонно возрастает и вогнута на отрезке $[0,1]$. Из (2.5) и (2.6) приходим к неравенству

$$\varphi(\sigma_0)G(f_0(x))\leq G(f_1(x))\leq G(f_0(x)),\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{2.7}$$

ибо $G(u)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$.

Используя условие 2) и неравенство (2.7), из (2.1) получим

$$\varphi(\sigma_0)f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_1(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.8}$$

Снова учитывая условия $a)-d)$ и неравенство (2.4), будем иметь

$$G(\varphi(\sigma_0)f_1(x))\geq\frac{G(\varphi(\sigma_0)\xi)}{G(\xi)}G(f_1(x)),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.9) и определения функции φ приходим к оценкам

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))G(f_1(x))\leq G(\varphi(\sigma_0)f_1(x))\leq G(f_2(x))\leq G(f_1(x)), x\in\mathbb{R}^+, \tag{2.10}$$

откуда в силу 2) и (2.1) получаем $\varphi(\varphi(\sigma_0))f_2(x)\leq f_3(x)\leq f_2(x)$, $x\in\mathbb{R}^+$. Продолжая этот процесс, на n-м шаге приходим к следующему двустороннему неравенству:

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma_0))}_{n}f_n(x)\leq f_{n+1}(x)\leq f_n(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

Используя перечисленные выше свойства функции φ, нетрудно убедиться в достоверности следующего утверждения: для всякого $\varepsilon\in(0,1)$

имеет место неравенство снизу:

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma_0))}_{n} \geq k^n\sigma_0 + 1 - k^n, \quad k := \frac{1-\varphi(\varepsilon\sigma_0)}{1-\varepsilon\sigma_0} \in (0,1). \tag{2.12}$$

Таким образом, принимая во внимание (2.3) и (2.12), из (2.11) приходим к неравенству

$$0 \leq f_n(x) - f_{n+1}(x) \leq f_n(x)(1-\sigma_0)k^n \leq \eta(1-\sigma_0)k^n,\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 1,2,\ldots. \tag{2.13}$$

Следовательно, учитывая (2.2), (2.3), (2.4) и (2.13), заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к непрерывной на $\mathbb{R}^+$ функции $f(x)$ при $n \to \infty$. Учитывая положительность ядра K, монотонность функции G и утверждение (2.3), согласно теореме Б. Леви (см. [4]), заключаем, что предельная функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Из (2.3), (2.4) следует также, что

$$\xi \leq f(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

Из оценки (2.13) легко получается следующее неравенство:

$$0 \leq f_n(x) - f_{n+m}(x) \leq \frac{\eta(1-\sigma_0)k^n}{1-k},\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 1,2,\ldots,\ m = 1,2,\ldots. \tag{2.15}$$

В последнем неравенстве, устремляя $m \to \infty$, получаем

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{\eta(1-\sigma_0)k^n}{1-k},\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 1,2,\ldots. \tag{2.16}$$

Таким образом, на основе вышеизложенного приходим к следующему результату.

Теорема 1. *При условиях* $1), 2)$ *и* $a) - d)$ *уравнение (1.1) обладает положительным непрерывным и ограниченным на* $\mathbb{R}^+$ *решением* $f(x)$. *Более того, имеют место (2.14) и (2.16).*

3. Единственность решения уравнения (1.1)

Справедлива

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 уравнение (1.1) в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} := \{f \in L_\infty(\mathbb{R}^+):\ f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+, \exists r > 0\ s.t.\ \inf_{x \geq r} f(x) > 0\} \tag{3.1}$$

не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1.1), кроме решения f, построенного при помощи последовательных приближений (2.1), обладает также другим решением $f^* \in \mathfrak{M}$. Так как $\alpha \in C(\mathbb{R}^+ \times [a,b))$, $G \in C(\mathbb{R}^+)$ и $G(u)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$, то из (1.1) сразу следует, что

$$f^* \in C(\mathbb{R}^+). \tag{3.2}$$

Докажем теперь справедливость следующего неравенства:

$$f^*(x) \le f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

С этой целью сначала индукцией по n докажем, что

$$f^*(x) \le f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.4}$$

Сначала проверим выполнение неравенства (3.4) для $n = 0$. Обозначим через $c^* := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f^*(x)$. Поскольку $f^* \in \mathfrak{M}$, то $c^* > 0$. Из (1.1) в силу условий 2) и a) имеем

$$f^*(x) \le G(c^*) \int\limits_0^\infty K(x,t)dt = G(c^*) \int\limits_a^b \alpha(x,s) \int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(x,s)|y|} dy dB(s) \le$$

$$\le 2G(c^*) \int\limits_a^b dB(s) = G(c^*), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда следует, что

$$c^* \le G(c^*). \tag{3.5}$$

Так как $\dfrac{G(u)}{u}$ убывает на множестве $(0, +\infty)$, то из (3.5) соотношения $G(\eta) = \eta$ сразу получаем, что $c^* \le \eta$. Следовательно, (3.4) доказано для $n = 0$. Предположим, что неравенство (3.4) выполняется при некотором натуральном n. Тогда из (2.1) в силу условий 2) и a) получаем неравенство (3.4) для номера $n + 1$. Переходя к пределу в (3.4) при $n \to \infty$, получаем неравенство (3.3). Докажем теперь, что на самом деле $f^*(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Предположим обратное: существует $x_0 \in \mathbb{R}^+$ такое, что $f^*(x_0) < f(x_0)$. Исходя из непрерывности функций $f^*(x)$ и $f(x)$ на $\mathbb{R}^+$ (см. (3.2) и теорему 1), можно утверждать, что существуют числа $x^* > 0$ и $\delta \in (0, x^*)$ такие, что

$$f^*(x) < f(x), \quad x \in (x^* - \delta, x^* + \delta). \tag{3.6}$$

Учитывая (3.3), (3.6) и условия 2), a), b), из (1.1) будем иметь

$$f(x) > \int\limits_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} K(x,t) G(f^*(t)) dt + \int\limits_{\mathbb{R}^+ \setminus (x^*-\delta, x^*+\delta)} K(x,t) G(f(t)) dt \ge$$

$$\geq \int\limits_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} K(x,t)G(f^*(t))dt + \int\limits_{\mathbb{R}^+\setminus(x^*-\delta,x^*+\delta)} K(x,t)G(f^*(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty K(x,t)G(f^*(t))dt = f^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, мы получим строгое неравенство

$$f^*(x) < f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.7}$$

Убедимся теперь, что

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^+} f^*(x) > 0. \tag{3.8}$$

Действительно, принимая во внимание тот факт, что $f^* \in \mathfrak{M}$ и используя условия $2), a), b)$, из (1.1) получим

$$f^*(x) \geq \int\limits_r^\infty K(x,t)G(f^*(t))dt \geq G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_r^\infty K(x,t)dt =$$

$$= G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_a^b \alpha(x,s) \int\limits_r^\infty e^{-\alpha(x,s)|x-t|} dt dB(s) =$$

$$= G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_a^b \alpha(x,s) \int\limits_{-\infty}^{x-r} e^{-\alpha(x,s)|y|} dy dB(s) \geq$$

$$\geq G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_a^b \alpha(x,s) \int\limits_{-\infty}^{-r} e^{\alpha(x,s)y} dy dB(s) =$$

$$= G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_a^b e^{-\alpha(x,s)r} dB(s) \geq G(\inf_{t\geq r} f^*(t)) \int\limits_a^b e^{-\beta_2(s)r} dB(s) := \gamma > 0,$$

откуда следует, что

$$d := \inf_{x\in\mathbb{R}^+} f^*(x) \geq \gamma > 0. \tag{3.9}$$

Докажем теперь, что

$$d \geq \xi. \tag{3.10}$$

В силу условия $2), a)$ и $b)$ из (1.1) имеем $f^*(x) \geq \frac{1}{2}G(d), \quad x \in \mathbb{R}^+$, откуда сразу следует, что $2d \geq G(d)$. Так как функция $\dfrac{G(u)}{u}$ убывает на $(0,+\infty)$ и $G(\xi) = 2\xi$, то, принимая во внимание условия $a)-c)$, получаем неравенство (3.10). Из (3.7), (3.10) и (2.14) следует, что $\sigma_0 \leq \frac{f^*(x)}{f(x)} < 1$,

$x \in \mathbb{R}^+$, откуда с учетом условий $a) - d)$ приходим к двустороннему неравенству:

$$\varphi(\sigma_0)G(f(x)) \le G(f^*(x)) < G(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.11}$$

Далее, проведя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 1, из (3.11) приходим к неравенству

$$0 < f(x) - f^*(x) \le \frac{\eta(1-\sigma_0)k^n}{1-k}, \ x \in \mathbb{R}^+, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{3.12}$$

В (3.12) устремляя $n \to \infty$ и учитывая тот факт, что $k \in (0,1)$, в (3.7) приходим к противоречию. Теорема полностью доказана. □

4. Асимптотическое поведение решения

В параграфе мы сначала докажем, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$. После чего при дополнительных ограничениях на K и G, убедимся, что $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Имеет место

Теорема 3. *При условиях теоремы 1 существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, *где* $f(x)$ *— ограниченное непрерывное решение уравнения (1.1), построенное при помощи последовательных приближений (2.1).*

Доказательство. Во-первых, индукцией по n докажем, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \eta$. В случае $n = 0$ последнее соотношение сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (2.1). Предположим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \eta$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом (2.3), условий $2), a), b)$ и теоремы Фубини из (2.1) имеем

$$0 \le \eta - f_{n+1}(x) = 2\eta \int\limits_a^b dB(s) - \int\limits_0^\infty K(x,t)G(f_n(t))dt = \eta \int\limits_{-\infty}^\infty K(x,t)dt -$$

$$- \int\limits_0^\infty K(x,t)G(f_n(t))dt = \eta \int\limits_{-\infty}^0 K(x,t)dt + \int\limits_0^\infty K(x,t)(\eta - G(f_n(t)))dt \le$$

$$\le \eta \int\limits_a^b \beta_2(s) \int\limits_x^\infty e^{-\beta_1(s)y}dydB(s) + \int\limits_a^b \beta_2(s) \int\limits_0^\infty e^{-\beta_1(s)|x-t|}(\eta - G(f_n(t)))dtdB(s) =$$

$$= \eta \int\limits_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)} e^{-\beta_1(s)x} dB(s) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_a^b \beta_2(s) e^{-\beta_1(s)|x-t|} dB(s)(\eta - G(f_n(t)))dt := I_1(x) + I_2(x).$$

Как известно (см. [1]), если $F \in L_1(\mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то существует

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^\infty F(x-t)g(t)dt = 0. \tag{4.1}$$

Используя формулу (4.1), индукционное предположение и условия a), b), получим

$$I_2(x) := \int\limits_0^\infty \int\limits_a^b \beta_2(s) e^{-\beta_1(s)|x-t|} dB(s)(\eta - G(f_n(t)))dt \to 0, \text{ при } x \to +\infty.$$

Так как $I_1(x) := \eta \int\limits_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)} e^{-\beta_1(s)x} dB(s) \to 0$ при $x \to +\infty$, то из полученного выше неравенства приходим к предельному соотношению $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{n+1}(x) = \eta$. Убедимся теперь, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$.

Действительно, так как

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^\infty (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \tag{4.2}$$

и ряд (4.2) равномерно по $x \in \mathbb{R}^+$ сходится, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_0(x) + \sum_{n=0}^\infty (\lim_{x\to+\infty} f_{n+1}(x) - \lim_{x\to+\infty} f_n(x)) = \eta.$$

Теорема доказана. □

Докажем теперь следующую теорему об интегральной асимптотике решения. Имеет место

Теорема 4. *При условиях теоремы 1, если*

$$\int\limits_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s) < +\infty \tag{4.3}$$

и существует

$$G'(\eta) < \frac{1}{l} \tag{4.4}$$

где $l := 2\int\limits_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)} dB(s)$, *то решение* f *уравнения (1.1), построенное при помощи последовательных приближений (2.1), удовлетворяет включению*

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{4.5}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим следующую характеристическую функцию на интервале $[0,1)$:

$$\chi(\varepsilon) := \frac{\eta - G(\varepsilon\eta)}{\eta(1-\varepsilon)} l.$$

Из условий $a) - c)$ и 2) сразу следует, что $\chi(0) = l > 1$, $\chi \in C[0,1)$ и $\chi(\varepsilon)$ монотонно убывает на интервале $[0,1)$ (рис. 1).

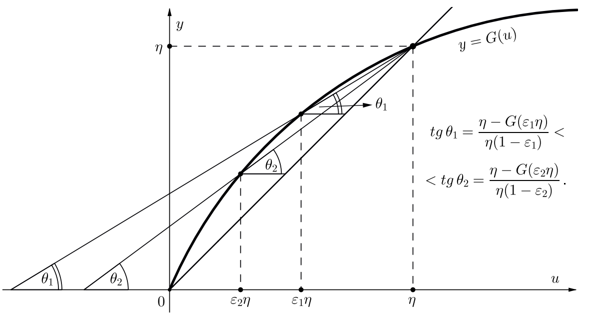

Рис. 1.

С другой стороны, согласно теореме Лопиталя и (4.4), имеем $\chi(1^-) := \lim\limits_{\varepsilon\to 1^-} \chi(\varepsilon) = G'(\eta)l < 1$. Из вышеперечисленных свойств характеристической функции χ немедленно следует, что существует число $\varepsilon_0 \in (0,1)$, такое, что $\chi(\varepsilon_0) = 1$ и на интервале $(\varepsilon_0, 1)$ значение функции χ меньше единицы. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, то для любого $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ существует число $r = r(\varepsilon) > 0$, такое, что при $x \geq r$ имеет место неравенство

$$f(x) > \varepsilon\eta. \tag{4.6}$$

Так как $f \in C(\mathbb{R}^+)$ (по теореме 1), то достаточно доказать, что $\eta - f \in L_1(r, +\infty)$. Пусть $R > r$ — произвольное число. Тогда уравнение (1.1), записывая в виде

$$\eta - f(x) = \eta \int\limits_{-\infty}^{0} K(x,t)dt + \int\limits_{0}^{\infty} K(x,t)(\eta - G(f(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

и при этом используя условия (4.3), (4.4), $1), 2), a), b)$, а также теорему Фубини, будем иметь

$$0 \leq \int_r^R (\eta - f(x))dx \leq \eta \int_r^R \int_{-\infty}^0 \int_a^b \beta_2(s) e^{-\beta_1(s)|x-t|} dB(s)dtdx+$$

$$+\eta \int_r^R \int_0^r K(x,t)dtdx + \int_r^R \int_r^R K(x,t)(\eta - G(f(t)))dtdx + \eta \int_r^R \int_R^\infty K(x,t)dtdx \leq$$

$$\leq \eta \int_a^b \beta_2(s) \int_r^R \int_x^\infty e^{-\beta_1(s)y} dydxdB(s) + \eta \int_a^b \beta_2(s) \int_r^R \int_0^r e^{-\beta_1(s)|x-t|} dtdxdB(s)+$$

$$+\eta \int_a^b \beta_2(s) \int_r^R \int_R^\infty e^{-\beta_1(s)|x-t|} dtdxdB(s) + \int_r^R \int_r^R K(x,t)(\eta - G(f(t)))dtdx \leq$$

$$\leq \eta \int_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s) + \eta \int_a^b \beta_2(s) \int_r^R \int_{x-r}^x e^{-\beta_1(s)y} dydxdB(s)+$$

$$+\eta \int_a^b \beta_2(s) \int_r^R \int_{R-x}^\infty e^{-\beta_1(s)y} dydxB(s) + \int_r^R (\eta - G(f(t))) \int_r^R K(x,t)dxdt \leq$$

$$\leq 3\eta \int_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s) + l \int_r^R (\eta - G(f(t)))dt.$$

Итак, мы получим следующую оценку:

$$0 \leq \int_r^R (\eta - f(x))dx \leq 3\eta \int_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s) + l \int_r^R (\eta - G(f(t)))dt. \tag{4.7}$$

Используя условия $a)-c)$, неравенство (4.6) для $x \geq r$ и оценку $\chi(\varepsilon) < 1$, при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$, можно утверждать, что (рис. 2)

$$\eta - G(f(t)) \leq \frac{\chi(\varepsilon)}{l}(\eta - f(t)), \quad t \geq r. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) приходим к неравенству

$$0 \leq \int_r^R (\eta - f(x))dx \leq \frac{3\eta}{1-\chi(\varepsilon)} \int_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s). \tag{4.9}$$

В (4.9) устремляя число $R \to \infty$, заключаем, что $\eta - f \in L_1(r, +\infty)$ и

$$\int_r^\infty (\eta - f(x))dx \leq \frac{3\eta}{1-\chi(\varepsilon)} \int_a^b \frac{\beta_2(s)}{\beta_1^2(s)} dB(s) < +\infty.$$

Таким образом, теорема доказана. □

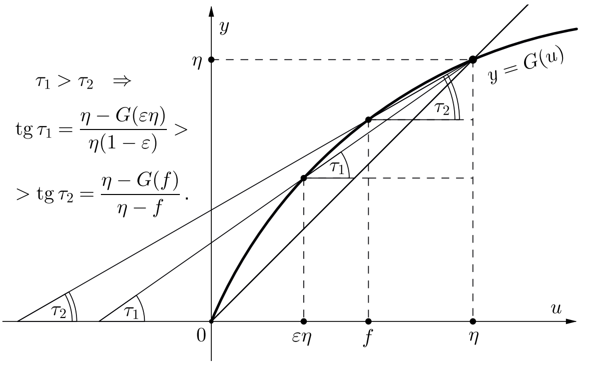

Рис. 2.

5. Примеры

В конце работы для полноты изложения приведем примеры функций α, β и G. Рассмотрим следующие примеры для функции $\alpha(x, s)$:

α_1) $\alpha(x,s) = \beta_1(s) + (\beta_2(s) - \beta_1(s))\,\dfrac{x}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad s \in [a, b),$

α_2) $\alpha(x,s) = \beta_1(s) + (\beta_2(s) - \beta_1(s)) \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad s \in [a, b).$

Приведем также примеры функций $\{\beta_j(s)\}_{j=1,2}$, $s \in [a, b)$:

γ_1) $\beta_1(s) = s, \quad \beta_2(s) = s^2, \quad a = 1, \quad b = +\infty,$

γ_2) $\beta_1(s) = e^{-s}, \quad \beta_2(s) \equiv 1, \quad a > 0, \quad b = +\infty.$

Для примера γ_1) в качестве $B(s)$ можно выбрать функцию $B(s) = -\dfrac{1}{2s^3}$, $s \in [1, +\infty)$, а в случае примера γ_2) в качестве функции $B(s)$ можно выбрать $B(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^s e^{-(t-a)^2} dt$, $s \in [a, +\infty)$, $a > 0$, $b = +\infty$.

Перейдем теперь к примерам для функции G :

g_1) $G(u) = u^{\alpha_0} \eta^{1-\alpha_0}, \quad \alpha_0 \in (0, 1), \quad u \in \mathbb{R}^+,$

g_2) $G(u) = \frac{\eta}{1-e^{-\eta}}(1 - e^{-u}), \quad 0 < \eta \leq 1, \quad u \in \mathbb{R}^+.$

Подробно остановимся на примере g_2) и проверим выполнение условий $a)-d)$ и (4.4). Во-первых, очевидно, что $G(0)=0$, $G'(u)=\frac{\eta}{1-e^{-\eta}}e^{-u}>0$, $G''(u)=\frac{-\eta}{1-e^{-\eta}}e^{-u}<0$, $u\in\mathbb{R}^+$, $G(\eta)=\eta$. Таким образом, условия $a)-c)$ выполнены. Проверим условие $d)$. Рассмотрим функцию $\Gamma_\sigma(u):=\dfrac{G(\sigma u)}{G(u)}=\frac{1-e^{-\sigma u}}{1-e^{-u}}$, $\quad u\in(0,\eta]$. Очевидно, что

$$\frac{\partial\Gamma_\sigma(u)}{\partial u}=\frac{\sigma e^{-\sigma u}-e^{-u}+(1-\sigma)e^{-(1+\sigma)u}}{(1-e^{-u})^2}.$$

Убедимся, что для всех $\sigma\in[0,1]$ и $u\in(0,\eta]$ выполняется неравенство

$$\sigma e^{-\sigma u}-e^{-u}+(1-\sigma)e^{-(1+\sigma)u}\geq 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим функцию $L_\sigma(u)=\sigma e^{-\sigma u}-e^{-u}+(1-\sigma)e^{-(1+\sigma)u}$, $u\in(0,\eta]$, $\sigma\in[0,1]$. Очевидно, что $L_\sigma(+0)=0$, $\sigma\in[0,1]$ и

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\sigma(u)}{\partial u}&=-\sigma^2e^{-\sigma u}+e^{-u}-(1-\sigma^2)e^{-(1+\sigma)u}=\\&=e^{-(1+\sigma)u}(-\sigma^2e^u+e^{\sigma u}-1+\sigma^2),\quad u\in(0,\eta],\quad \sigma\in[0,1].\end{aligned}$$

Докажем, что $-\sigma^2e^u+e^{\sigma u}-1+\sigma^2\geq 0,\ u\in(0,\eta],\ \sigma\in[0,1]$. Заметим, что для функции $Q_\sigma(u)=e^{\sigma u}-1+\sigma^2-\sigma^2e^u:$

$$Q_\sigma(0)=0,\ \frac{\partial Q_\sigma(u)}{\partial u}=\sigma e^{\sigma u}-\sigma^2e^u=\sigma e^{\sigma u}(1-\sigma e^{(1-\sigma)u})\geq\sigma e^{\sigma u}(1-\sigma e^{1-\sigma})\geq 0,$$

ибо $\eta\in(0,1]$, $u\in(0,\eta]$, а $e^{\sigma-1}\geq\sigma$. Проверим наконец условие (4.4) для примера g_2) в случае, когда функции $\{\beta_j(s)\}_{j=1,2}$ задаются согласно γ_1), а $B(s)=-\dfrac{1}{2s^3}$, $s\in[1,+\infty)$. Очевидно, что $G'(\eta)=\dfrac{\eta}{e^\eta-1}$ и $l=3\int\limits_1^\infty\dfrac{1}{s^3}ds=\dfrac{3}{2}$. Так как $e^\eta-1>\eta+\dfrac{\eta^2}{2}+\dfrac{\eta^3}{6}$, то

$$G'(\eta)l<\frac{3\eta}{2(\eta+\dfrac{\eta^2}{2}+\dfrac{\eta^3}{6})}=\frac{3}{2(1+\dfrac{\eta}{2}+\dfrac{\eta^2}{6})}=\frac{3}{2+\eta+\dfrac{\eta^2}{3}}<1$$

при $\eta\in\left(\dfrac{\sqrt{21}-3}{2},1\right]$. Следовательно, условие (4.4) также выполняется.

6. Заключение

В статье изучено нелинейное интегральное уравнение со специальным субстохастическим ядром, имеющее приложение в кинетической теории газов в рамках модифицированной модели БГК. Доказаны конструктивные теоремы существования и единственности в классе нетривиальных неотрицательных и ограниченных функций на положительной полупрямой. При дополнительном ограничении на нелинейность установлена также интегральная асимптотика построенного решения. Приведены конкретные прикладные примеры функций α, β и G, удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

Список источников

1. Геворкян Г. Г., Енгибарян Н. Б. Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления // Известия НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32, № 1. С. 5–20.
2. Енгибарян Н. Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М. : Наука, 1967.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. М. : Наука, 1976.
5. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 43. С. 78–90. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.78
6. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. Нелинейные уравнения Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами: теоремы существования и построение решений // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1654-1664. https://doi.org/10.31857/S0374064121120086
7. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса интегральных уравнений на всей оси с монотонной нелинейностью // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-мататические науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 644–662. https://doi.org/10.14498/vsgtu1790
8. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А. Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 4. С. 125–136. https://doi.org/10.4213/sm7310
9. Barichello L. B., Siewert C. E. The temperature-jump problem in rarefied-gas dynamics // European J. of Applied Mathematics. 2000. Vol. 11. P. 353–364. https://doi.org/10.1017/S0956792599004180
10. Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications // Appl. Math. Sci. New-York : Springer, 1988. 455 p.
11. Khachatryan Kh. A. One-parameter family of solutions for one class of hammerstein nonlinear equations on a half-line // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 80, N 3. P. 872–876. https://doi.org/10.1134/S1064562409060222
12. Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true // Comm. Math. Phys. 2003. Vol. 234, N 3. P. 455–490. https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1

References

1. Gevorkyan G.G., Engibaryan N.B. New theorems for the renewal integral equation. *J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 2–16.
2. Engibaryan N.B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, P. 12–14. https://doi.org/10.1007/BF01014505
3. Kogan M.N. *Rarefied Gas Dynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1969.
4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2, Mineola, New York, Dover Publ., 1999, 288 p.
5. Sidorov N.A., Dreglea Sidorov Lev Ryan D. On the solution of Hammerstein integral equations with loads and bifurcation parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 43, pp. 78–90.
6. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions. *Differantial Equations*, 2021, vol. 57, pp. 1640–1651. https://doi.org/10.1134/S0012266121120107
7. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. On alternating and bounded solutions of one class of integral equations on the entire axis with monotonic nonlinearity. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2020, vol. 24, no. 4. pp. 644–662. https://doi.org/10.14498/vsgtu1790 (in Russian)
8. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. A nonlinear integral equation of Hammerstein type with a noncompact operator. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 4, pp. 595–606. https://doi.org/10.1070/SM2010v201n04ABEH004083
9. Barichello L.B., Siewert C.E. The temperature-jump problem in rarefied-gas dynamics. *European J. of Applied Mathematics*, 2000. vol. 11. pp. 353–364. https://doi.org/10.1017/S0956792599004180
10. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*. New-York, Appl. Math. Sci., Springer, 1988, 455 p.
11. Khachatryan Kh.A. One-parameter family of solutions for one class of hammerstein nonlinear equations on a half-line. *Doklady Mathematics*, 2009. vol. 80, no. 3, pp. 872–876. https://doi.org/10.1134/S1064562409060222
12. Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Comm. Math. Phys.,* 2003, vol. 234, no. 3, pp. 455–490. https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1

Об авторах

Хачатрян Хачатур Агавардович, д-р физ.-мат. наук, проф., Ереванский государственный университет, Ереван, 0025, Республика Армения, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X

About the authors

Khachatur A. Khachatryan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Yerevan State University, Yerevan, 0025, Republic of Armenia, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X

Петросян Айкануш Самвеловна, канд. физ.-мат. наук, доц., Национальный аграрный университет Армении, Ереван, 0009, Республика Армения, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Haykanush S. Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Agrarian University, Yerevan, 0009, Republic of Armenia, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Поступила в редакцию / Received 16.05.2024
Поступила после рецензирования / Revised 12.06.2024
Принята к публикации / Accepted 17.06.2024