Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 19—35

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.642.5
MSC 65R20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19

# О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра

**О. В. Гермидер**[1], **В. Н. Попов**[1✉]

[1] Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Российская Федерация
✉ v.popov@narfu.ru

**Аннотация.** Предлагается матричная реализация метода коллокации для построения решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с применением систем ортогональных полиномов Чебышева первого рода и полиномов Лежандра. Подынтегральная функция в рассматриваемых уравнениях представляется в виде частичной суммы ряда по этим многочленам. В качестве точек коллокаций выбираются корни полиномов Чебышева и Лежандра. С использованием матричных и интегральных преобразований, свойств конечных сумм произведений этих полиномов и весовых функций в нулях соответствующих многочленов со степенью, равной числу узлов, интегральные уравнения приводятся к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомых функций в этих точках. В результате решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода находятся путем полиномиальных интерполяций полученных значений функций в точках коллокаций с использованием обратных матриц, элементы которых записываются на основе ортогональных соотношений для этих полиномов. Элементы интегральных матриц также приводятся в явном виде. Получены оценки погрешностей построенных решений по бесконечной норме. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность использованного метода коллокации.

**Ключевые слова:** полиномиальная интерполяция, метод коллокации, многочлены Чебышева, многочлены Лежандра, интегральные уравнения

**Благодарности**: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00381).

**Ссылка для цитирования**: Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 19–35.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19

Research article

# On the Collocation Method in Constructing a Solution to the Volterra Integral Equation of the Second Kind Using Chebyshev and Legendre Polynomials

**Oksana V. Germider**[1], **Vasilii N. Popov**[1]✉

[1] Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation
✉ v.popov@narfu.ru

**Abstract**. The paper proposes a matrix implementation of the collocation method for constructing a solution to Volterra integral equations of the second kind using systems of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind and Legendre polynomials. The integrand in the equations considered in this work is represented as a partial sum of a series for these polynomials. The roots of the Chebyshev and Legendre polynomials are chosen as collocation points. Using matrix and integral transformations, properties of finite sums of products of these polynomials and weight functions at the zeros of the corresponding polynomials with degree equal to the number of nodes, integral equations are reduced to systems of linear algebraic equations for unknown values of the sought functions at these points. As a result, solutions to Volterra integral equations of the second kind are found by polynomial interpolations of the obtained function values at collocation points using inverse matrices, the elements of which are written on the basis of orthogonal relations for these polynomials. In the presented work, the elements of integral matrices are also given in explicit form. Error estimates for the constructed solutions with respect to the infinite norm are obtained. The results of computational experiments are presented, which demonstrate the effectiveness of the collocation method used.

**Keywords:** polynomial interpolation, collocation method, Chebyshev polynomials, Legendre polynomials, integral equations

**Acknowledgements**: The research was financially supported Russian Science Foundation (project no. 24-21-00381).

**For citation**: Germider O. V., Popov V. N. On the Collocation Method in Constructing a Solution to the Volterra Integral Equation of the Second Kind Using Chebyshev and Legendre Polynomials. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 19–35. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19

## 1. Введение

Существенную роль в задачах математического моделирования динамических систем в различных областях науки играют интегральные уравнения типа Вольтерра [5; 19; 22]. Разработке методов решения этих уравнений посвящено много исследований [10; 18]. В [7–9] для построения решения использованы многочлены Чебышева, в [15; 20] — многочлены Лежандра. В [3] описан алгоритм, основанный на методе квадратурных сумм, для получения решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки. В [21] предложен проекционный метод полиномиальной сплайн-коллокации для решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами. Для аппроксимации интегралов использована квадратурная формула Гаусса. Для решения интегрального уравнения Вольтерра со слабосингулярными ядрами в [12] использован метод Галеркина. В [11] метод коллокации Тейлора применен для решения двумерных интегральных уравнений Вольтерра. С помощью полиномов Эйлера и Дженокки система линейных интегральных уравнений Вольтерра преобразуется в матричное уравнение для получения численного решения в [17] и [14] соответственно.

Представленная работа посвящена построению решения на основе полиномиальной аппроксимации интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(x)+\int\limits_{-1}^{x} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y = f(x), \tag{1.1}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция ($-1 \le x \le 1$); $K(x,y)$ — ядро интегрального уравнения (1.1); $f(x)$ — свободный член этого уравнения. Функции $K(x,y)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения. При этом условии рассматриваемое уравнение (1.1) имеет единственное решение в классе функций, непрерывных на отрезке $[-1,\ 1]$ [1], и подынтегральная функция в (1.1) представляется в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева и Лежандра, которая записывается в виде произведения матриц, элементами которых являются многочлены и коэффициенты в этой сумме. Путем выбора нулей этих полиномов в качестве точек коллокации интегральное уравнение (1.1) приводится к системам линейных уравнений относительно неизвестных значений искомых функций в этих точках. При этом применяются соотношения ортогональности для рассматриваемых многочленов и интегральные формулы [16; 18]. В отличие от [7] вычисление интегралов от матриц, элементами которых являются соответствующие полиномы, осуществляется путем произведения этих матриц на квадратные матрицы достаточно простого вида, определение элементов которых приводится в представленной работе. Последнее в значительной степени может способствовать оптимизации при вычислении значений кратных интегралов. Решения интегральных уравнений в представленной работе находятся путем полиномиальной интерполяции полученных значений функций в точках коллокаций. Обратная матрица при этом записывается в явном виде в отличие от [7]. Получены оценки погрешностей построенных решений по бесконечной норме. При этом дополнительно, следуя [7], предполагалось, что ядро $K(x, y)$ и функция $f(x)$ достаточно дифференцируемы для существования и непрерывности производных функции $u(x)$ [21]. В этом случае полученная оценка для многочленов Чебышева соответствует результатам, приведенным в [7]. Представлены результаты, показывающие эффективность использованного метода коллокации.

## 2. Построение решения уравнения Вольтерра с использованием полиномов Чебышева

Полиномы Чебышева образуют ортогональную систему и определяются на отрезке $[-1, 1]$, согласно [16], как

$$T_j(y) = \cos(j \arccos y), \quad j \geq 0. \tag{2.1}$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [16]

$$T_0(y) = 1, \quad T_1(y) = y, \quad T_{j+1}(y) = 2yT_j(y) - T_{j-1}(y), \quad j \geq 1. \tag{2.2}$$

Представляем функцию $K(x, y)u(y)$ в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева:

$$K_n(x, y)u_n(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)T_j(y) = \mathbf{T}(y)\mathbf{A}(x), \quad y \in [-1, 1], \tag{2.3}$$

где $\mathbf{T}(y)$ — матрица-строка размером $1 \times n'$ $(n' = n + 1)$:

$$\mathbf{T}(y) = \left(T_0(y)\, T_1(y) \ldots T_{n-1}(y)\, T_n(y)\right),$$

неизвестная матрица-столбец $\mathbf{A}$ имеет размер $n' \times 1$, элементами которой являются коэффициенты в разложении (2.3): $\mathbf{A} = (a_0 \ldots a_{n-1}\, a_n)^T$.

В качестве узлов в (1.1) и (2.3) выберем нули многочлена $T_{n+1}$:

$$x_k = y_k = \cos\left(\frac{\pi(2n - 2k + 1)}{2(n + 1)}\right), \quad k = \overline{0, n}. \tag{2.4}$$

Используя представление (2.3), для интеграла в (1.1) имеем

$$\int_{-1}^{x_k} K_n(x_k, y)u_n(y)\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^{x_k} \mathbf{T}(y)\mathrm{d}y\right)\mathbf{A}(x_k). \tag{2.5}$$

Найдем интегралы от полиномов Чебышева. Из (2.2) получаем

$$\int\limits_{-1}^{x_k} T_0(y)\mathrm{d}y = T_1(x) + T_0(x), \quad \int\limits_{-1}^{x} T_1(y)\mathrm{d}y = \frac{T_2(x)}{4} - \frac{T_0(x)}{4}. \tag{2.6}$$

Для полиномов Чебышева степени $j \geq 2$, используя равенство [16]

$$2\int T_j(y)\mathrm{d}y = \frac{T_{j+1}(y)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(y)}{j-1},$$

подставляя в него пределы интегрирования и учитывая, что $T_j(-1) = (-1)^j$, находим

$$2\int\limits_{-1}^{x} T_j(y)\mathrm{d}y = \frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1} + \frac{2\cdot(-1)^{j+1}}{j^2-1}. \tag{2.7}$$

Применяя (2.6) и (2.7) и учитывая, что $T_{n+1}(x_k) = 0$, запишем

$$\int\limits_{-1}^{x_k} \mathbf{T}(y)\mathrm{d}y = \mathbf{T}(x_k)\mathbf{G}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{G}$ — квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой элементы первой строки, отличные от нуля:

$$G_{0\,0} = 1, \quad G_{0\,1} = -\frac{1}{4}, \quad G_{0\,j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j^2-1}, \quad j = \overline{2,n},$$

а ненулевые элементы второй строки: $G_{1\,0} = 1$, $G_{1\,2} = -1/2$, парные ненулевые элементы остальных строк, за исключением последней:

$$G_{j\;j+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{2j}, \quad i = 1,2,\; j = \overline{2,n-1},$$

в последней строке отличен от нуля только элемент $G_{n\;n-1} = 1/(2n)$. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов в матрицах начинаем с нуля.

Подставляя точки $y_k$ ($k = \overline{0,n}$) в (2.3), приходим к уравнению относительно $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{J}\mathbf{A}(x_k) = \mathbf{K}(x_k) \circ \mathbf{U}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{J}$ — квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой $k$-я строка $\mathbf{T}(y_k)$ ($k = \overline{0,n}$), матрицы $\mathbf{K}(x_k)$ и $\mathbf{U}$ имеют размер $n' \times 1$: $\mathbf{K}(x_k) = (K(x_k,y_0)\; K(x_k,y_1)\; \ldots\; K(x_k,y_n))^T$ и $\mathbf{U} = (u(x_0)\, u(x_1)\; \ldots\; u(x_n))^T$, знаком $\circ$ обозначено поэлементное произведение Адамара матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{U}$ [13]. Из (2.9) находим $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{K} \circ \mathbf{U}\right). \tag{2.10}$$

Обратную матрицу $\mathbf{J}^{-1}$ к $\mathbf{J}$ получаем, транспонируя $\mathbf{J}$, умножая затем $\mathbf{J}^T$ на $2/(n+1)$ и поделив элементы первой строки этой матрицы на 2. Описанный процесс получения $\mathbf{J}^{-1}$ вытекает из равенства [16; 18]:

$$\sum_{k=0}^{n} T_{j_1}(y_k)T_{j_2}(y_k)w_T(y_k) = \gamma_{T,j_1}\delta_{j_1,j_2}, \quad w_T(y_k) = \frac{\pi}{n+1},$$

где $\delta_{j_1,j_2}$ — символ Кронекера, $\gamma_{T,0} = \pi$, $\gamma_{T,j} = \pi/2$ $(j > 0)$.

Подставляя (2.4) в (1.1) и используя (2.5), (2.8) и (2.10), получаем

$$u(x_k) + \mathbf{T}(x_k)\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{K}(x_k) \circ \mathbf{U}\right) = f(x_k), \quad k = \overline{0, n}. \tag{2.11}$$

В матричном виде система уравнений (2.11) относительно неизвестной матрицы $\mathbf{U}$ имеет вид

$$\left(\mathbf{E} + \mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1} \circ \mathbf{W}\right)\mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица размером $n' \times n'$, $\mathbf{W}$ — квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой $k$-я строка — $\mathbf{K}^T(x_k)$ $(k = \overline{0, n})$; $\mathbf{F} = (f(x_0)\, f(x_1)\, \ldots\, f(x_n))^T$. Решение уравнения (2.12) находим $LU$-методом. Функцию $u(x)$ получаем, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева

$$u_n(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{B}, \quad x \in [-1,\, 1], \tag{2.13}$$

где элементы матрицы-столбца $\mathbf{B} = (b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}\, b_n)^T$, которые являются коэффициентами в этом разложении, восстанавливаем на основе $\mathbf{U}$ с помощью обратной матрицы $\mathbf{J}^{-1}$ к $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}. \tag{2.14}$$

## 3. Построение решения уравнения Вольтерра с использованием полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему и определяются на отрезке $t \in [-1,\, 1]$ формулой Родрига [4]:

$$P_0(y) = 1, \quad P_j(y) = \frac{1}{2^j j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}y^j}\left(y^2 - 1\right)^j, \quad j \geq 1. \tag{3.1}$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [4]

$$P_1(y) = y, \quad (j+1)P_{j+1}(y) = (2j+1)yP_j(y) - jP_{j-1}(y), \quad j \geq 1. \tag{3.2}$$

Представляем функцию $K(x, y)u(y)$ в виде частичной суммы ряда по полиномам Лежандра:

$$K_n(x, y)u_n(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)P_j(y) = \mathbf{P}(y)\mathbf{A}(x), \quad y \in [-1,\, 1], \tag{3.3}$$

где $\mathbf{P}(y) = (P_0(y)\, P_1(y) \dots P_{n-1}(y)\, P_n(y))$, элементами искомой матрицы $\mathbf{A}$ являются коэффициенты в разложении (3.1).

В качестве узлов в (1.1) и (3.1) выберем нули многочлена $P_{n+1}$. Находим их согласно [18] как собственные значения симметричной матрицы $\mathbf{L}$ размерами $n' \times n'$ с ненулевыми элементами $L_{k+1\,k} = L_{k\,k+1} = (k+1)/\sqrt{4(k+1)^2-1}$ $(k = \overline{0,\, n-1})$ [18]. Заметим, что нули многочлена $P_{n+1}$ симметричны относительно нуля, как и нули многочлена Чебышева $T_{n+1}$. Укажем при $n = 9$ собственные значения матрицы $\mathbf{L}$, вычисленные с точностью $10^{-4}$: $y_9 = -y_0 = 0,9739$, $y_8 = -y_1 = 0,8651$, $y_7 = -y_2 = 0,6794$, $y_6 = -y_3 = 0,4334$ и $y_5 = -y_{1,4} = 0,1489$. Для многочлена Чебышева $T_{10}$ его нули, найденные по формуле (2.4) с точностью $10^{-4}$, имеют значения: $y_9 = -y_0 = 0,9877$, $y_8 = -y_1 = 0,8910$, $y_7 = -y_2 = 0,7070$, $y_6 = -y_3 = 0,4540$ и $y_5 = -y_4 = 0,1564$.

Используя представление (3.3), для интеграла в (1.1) имеем

$$\int\limits_{-1}^{x_k} K_n(x_k, y) u_n(y)\mathrm{d}y = \left(\int\limits_{-1}^{x_k} \mathbf{P}(y)\mathrm{d}y\right) \mathbf{A}(x_k). \tag{3.4}$$

Найдем интегралы от полиномов Лежандра. Из (3.2) получаем

$$\int\limits_{-1}^{x} P_0(y)\mathrm{d}y = P_1(x) + P_0(x), \quad \int\limits_{-1}^{x} P_1(y)\mathrm{d}y = \frac{P_2(x)}{3} - \frac{P_0(x)}{3}. \tag{3.5}$$

Для полиномов Лежандра степени $j \geq 2$, интегрируя в пределах от 0 до $x$ левую и правую части равенства [18]

$$(2j+1)P_j(y) = \frac{\mathrm{d}P_{j+1}(y)}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}P_{j-1}(y)}{\mathrm{d}y}$$

и учитывая, что $P_j(-1) = (-1)^j$, имеем

$$(2j+1)\int\limits_{-1}^{x} P_j(y)\mathrm{d}y = P_{j+1}(y) - P_{j-1}(y). \tag{3.6}$$

Применяя (3.5) и (3.6) и учитывая, что $P_{n+1}(x_k) = 0$, запишем

$$\int\limits_{-1}^{x_k} \mathbf{P}(y)\mathrm{d}y = \mathbf{P}(x_k)\mathbf{G}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{G}$ — квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой ненулевые элементы первого столбца: $G_{0,\,0} = 1$, $G_{1,\,1} = 1$, ненулевые парные элементы остальных столбцов, за исключением последнего:

$$G_{j+(-1)^i,\,j} = \frac{(-1)^{i+1}}{2j+1}, \quad i = 1, 2,\ j = \overline{1, n-1},$$

в последнем столбце отличен от нуля элемент $G_{n-1\,n} = 1/(2n+1)$.

Подставляя точки $y_k$ ($k = \overline{0, n}$) в (3.3), приходим к уравнению (2.9) относительно $\mathbf{A}$, в котором матрица $\mathbf{J}$ определяется через $\mathbf{P}$: $k$-й строкой матрицы $\mathbf{J}$ в этом случае является $\mathbf{P}(y_k)$. Обратную матрицу $\mathbf{J}^{-1}$ к $\mathbf{J}$ в (2.10) получаем, используя равенство [6; 18]:

$$\sum_{k=0}^{n_1} P_{j_1}(x_k)P_{j_2}(x_k)w_P(x_k) = \gamma_{P,j_1}\delta_{j_1,j_2}, \quad \gamma_{P,j} = \frac{2}{2j+1}, \tag{3.8}$$

$$w_P(x_k) = \frac{2}{(1-x_k^2)\left(P'_{n+1}(x_k)\right)^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+2)^2P_{n+2}^2(x_k)}.$$

В этом случае элементы $\mathbf{J}^{-1}$ определяем через элементы $\mathbf{J}$: $(J^{-1})_{j,k} = J_{k,j}w_P(x_k)/\gamma_{P,j}$ ($j,\, k = \overline{0, n}$).

Подставляя (3.3) в (1.1) и используя (2.10) и (3.7), приходим к уравнению (2.12) относительно неизвестной матрицы $\mathbf{U}$. Решение уравнения (2.12) находим $LU$-методом. Функцию $u(x)$ получаем, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Лежандра:

$$u_n(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{B}, \quad x \in [-1,\, 1], \tag{3.9}$$

где элементы матрицы-столбца $\mathbf{B} = (b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}\, b_n)^T$, которые являются коэффициентами в этом разложении, восстанавливаем на основе $\mathbf{U}$ с помощью обратной матрицы $\mathbf{J}^{-1}$ к $\mathbf{J}$ по формуле (2.14).

## 4. Погрешность вычислений с использованием полиномов Чебышева

Предполагаем, что функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[-1,\, 1]$. Обозначая $M_{n+1}$ максимум величины $|u^{(n+1)}(x)|$ на отрезке $[-1,\, 1]$, запишем неравенство [4]

$$|u(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{-1\le x\le 1} |\omega_{n+1}(x)|, \quad x \in [-1,\, 1], \tag{4.1}$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, $L_n(x)$ — многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u(x_k)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}, \quad k = \overline{0, n}. \tag{4.2}$$

Поскольку в качестве узлов в (1.1) выбраны нули многочлена $T_{n+1}(x)$, то $\omega_{n+1}(x) = \kappa T_{n+1}(x)$. Найдем $\kappa$, используя [16]:

$$T_j(x) = \sum_{k=0}^{[j/2]} \varsigma_k x^{j-2k}, \quad \varsigma_k = \frac{(-1)^k 2^{j-2k-1} j(j-k-1)!}{(j-2k)!k!},$$

где $[j/2]$ — целая часть числа $j/2$. Откуда $\varsigma_0 = 2^n$ для многочлена $T_{n+1}(x)$, а следовательно, $\kappa = 1/\varsigma_0 = 2^{-n}$ и

$$\omega_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x). \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1) и учитывая $|T_{n+1}(x)| \leq 1$ для любого значения $x$ из $[-1, 1]$, приходим к неравенству вида

$$|u(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{4.4}$$

Оценим

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq \|u(x) - L_n(x)\|_\infty + \|L_n(x) - u_n(x)\|_\infty, \tag{4.5}$$

где норма равномерной сходимости в пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций

$$\|u(x)\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |u(x)|. \tag{4.6}$$

Из (4.4) и (4.6) следует

$$\|u(x) - L_n(x)\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}. \tag{4.7}$$

Для оценки второго слагаемого в (4.5) запишем

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{e,j} T_j(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{B_e}, \quad x \in [-1, 1], \tag{4.8}$$

где элементы матрицы $\mathbf{B_e} = (b_{e,0}\, b_{e,1} \ldots b_{e,n-1}\, b_{e,n})^T$ восстанавливаем на основе значений функции $u(x)$ в узлах (2.4):

$$\mathbf{B_e} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{U_e}, \quad \mathbf{U_e} = (u(x_0)\, u(x_1) \ldots u(x_n))^T. \tag{4.9}$$

Используя (2.13) и (4.8), имеем

$$\|L_n(x) - u_n(x)\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{n} |b_j - b_{e,j}| \|T_j(x)\|_\infty = \|\mathbf{B} - \mathbf{B_e}\|_1, \tag{4.10}$$

где $\|\mathbf{B} - \mathbf{B_e}\|_1 = \sum\limits_{j=0}^{n} |b_j - b_{e,j}|$ — абсолютная норма вектора $\mathbf{B} - \mathbf{B_e}$ [2].

Из (2.14) и (4.9), построения матрицы $\mathbf{J}^{-1}$, аксиом векторных норм и неравенства Коши – Буняковского следует

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B_e}\|_1 \leq \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \| (T_i(x_0)\, T_i(x_1) \ldots T_i(x_n)) \|_E \|\mathbf{U} - \mathbf{U_e}\|_E,$$

где $\|\cdot\|_E$ — евклидовая норма вектора [2].

Поскольку $\|\,(T_0(x_0)\ T_0(x_1)\ldots T_0(x_n))\,\|_E = \sqrt{n+1}$,

$$\|\,(T_i(x_0)\ T_i(x_1)\ldots T_i(x_n))\,\|_E = \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{4.11}$$

то

$$\|L_n(x)-u_n(x)\|_\infty \le \|\mathbf{U}-\mathbf{U_e}\|_E\sqrt{2(n+1)}. \tag{4.12}$$

Для оценки $\|\mathbf{U}-\mathbf{U_e}\|_E$ уравнение (1.1) в узлах (2.4) запишем в виде

$$u(x_k)+\int\limits_{-1}^{x_k} Q_{k,n}(y)\mathrm{d}y+\int\limits_{-1}^{x_k}(K(x_k,y)u(y)-Q_{k,n}(y))\mathrm{d}y = f(x_k), \tag{4.13}$$

где $Q_{k,n}(y)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, соответствующий системе узлов (2.4) и функции $K(x_k,y)u(y)$ $(k=\overline{0,n})$. Тогда

$$\left(\mathbf{E}+\mathbf{JGJ}^{-1}\circ\mathbf{W}\right)\mathbf{U_e}+\mathbf{R}=\mathbf{F}, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{R}=(R_0\,R_1\ldots R_n)^T$: $R_k=\int\limits_{-1}^{x_k}(K(x_k,y)u(y)-Q_{k,n}(y))\mathrm{d}y$ $(k=\overline{0,n})$.

Из (2.12) и (4.14) получаем

$$\|\mathbf{U}-\mathbf{U_e}\|_E = \|\mathbf{HR}\|_E \le \left\|\left(\mathbf{E}+\mathbf{JGJ}^{-1}\circ\mathbf{W}\right)^{-1}\right\|_E \|\mathbf{R}\|_E\,, \tag{4.15}$$

где $\mathbf{H}=\left(\mathbf{E}+\mathbf{JGJ}^{-1}\circ\mathbf{W}\right)^{-1}$. Учитывая соотношение эквивалентности для евкидовой и спектральной норм матрицы $\mathbf{H}$, имеем

$$\|H\|_E \le \sqrt{n+1}\,\|H\|_2 = \sqrt{(n+1)\lambda},$$

где $\lambda$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $\mathbf{HH}^T$.

Предполагая, что функция $K(x_k,y)u(y)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[-1,\,1]$, обозначая $N_{n+1}$ максимум величины $|(K(x_k,y)u(y))^{(n+1)}|$ в области $[-1,\,1]\times[-1,\,1]$, находим

$$\|\mathbf{R}\|_E \le \frac{N_{n+1}}{2^n(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{-1}^{1}1\cdot\mathrm{d}y\right)^2\right)^{1/2} = \frac{N_{n+1}\sqrt{n+1}}{2^{n-1}(n+1)!}.$$

В результате

$$\|u(x)-u_n(x)\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}+\frac{N_{n+1}\sqrt{2}}{2^{n-1}n!}\,\|\mathbf{H}\|_E\,,$$

и $\|u(x)-u_n(x)\|_\infty \to 0$ при $n\to\infty$.

## 5. Погрешность вычислений с использованием полиномов Лежандра

В качестве узлов в (1.1) в этом случае выбраны нули многочлена $P_{n+1}(x)$, следовательно, $\omega_{n+1}(x) = \kappa P_{n+1}(x)$. Найдем $\kappa$, используя [18]:

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{[j/2]} \varsigma_k x^{j-2k}, \quad \varsigma_k = \frac{(-1)^k 2^{2j-2k}}{2^j k!(j-k)!(j-2k)!}.$$

Откуда $\varsigma_0 = (2n+2)!/(2^{n+1}(n+1)!^2)$ для многочлена $P_{n+1}(x)$, а $\kappa = 1/\varsigma_0$. Тогда

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} P_{n+1}(x). \tag{5.1}$$

Подставляя (5.1) в (4.1) и учитывая $|P_{n+1}(x)| \le 1$ для любого значения $x$ из $[-1, 1]$, приходим к неравенству вида

$$|u(x) - L_n(x)| \le \frac{2^{n+1} M_{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{5.2}$$

Оценим (4.5). Из (4.4) и (5.2) следует

$$\|u(x) - L_n(x)\|_\infty \le \frac{2^{n+1} M_{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!}. \tag{5.3}$$

Для оценки второго слагаемого в (4.5) запишем

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{e,j} P_j(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{B_e}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{5.4}$$

Используя (3.8), (3.9) и (5.4) и неравенство Коши, имеем

$$\|L_n(x) - u_n(x)\|_\infty \le \sum_{j=0}^{n} |b_j - b_{e,j}| \|P_j(x)\|_\infty = \|\mathbf{B} - \mathbf{B_e}\|_1 \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{n+2}} \sum_{i=0}^{n} \gamma_{P,i}^{-1} \left( \sum_{j=0}^{n} w_P(x_j) P_i(x_0)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{U} - \mathbf{U_e}\|_E \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{n+2}} \left( \sum_{i=0}^{n} \sqrt{2i+1} \right) \|\mathbf{U} - \mathbf{U_e}\|_E \le 2(n+1) \|\mathbf{U} - \mathbf{U_e}\|_E.$$

Для оценки $\|\mathbf{U} - \mathbf{U_e}\|_E$ уравнение (1.1) в узлах, которые являются нулями многочлена $P_{n+1}(x)$, запишем в виде (4.13). В этом случае интерполяционный многочлен Лагранжа $Q_{k,n}(y)$ соотвествует корням $P_{n+1}(x)$ и функции $K(x_k, y)u(y)$.

Используя (2.12) и (4.14), приходим к (4.15). Обозначая $N_{n+1}$ максимум величины $|(K(x_k,y)u(y))^{(n+1)}|$ в области $[-1,\,1]\times[-1,\,1]$, находим

$$\|\mathbf{R}\|_E \le \frac{2^{n+2}\sqrt{n+1}N_{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}.$$

В результате получаем

$$\|u(x)-u_n(x)\|_\infty \le \frac{2^{n+1}M_{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}+\frac{2^{n+3}(n+1)^{3/2}N_{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}\,\|\mathbf{H}\|_E$$

и $\|u(x)-u_n(x)\|_\infty \to 0$ при $n\to\infty$.

## 6. Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода [7; 20]

$$u(x)+\int\limits_{-1}^{x} u(y)\exp(xy)\mathrm{d}y = f(x), \quad -1\le x\le 1, \tag{6.1}$$

где $f(x)=\exp(4x)+(\exp(x^2+4x)-\exp(-x-4))/(x+4)$. Аналитическое решение уравнения (6.1) имеет вид $u_e(x)=\exp(4x)$. Во втором и пятом столбцах табл. 1 приведены значения отклонений построенных решений (2.13) и (3.9) от точного $u_e$ по бесконечной норме векторов значений этих функций, вычисленных в равномерно распределенных точках на отрезке $[-1,\,1]$:

$$e_\infty = \|\mathbf{U}-\mathbf{U_e}\|_\infty = \max_{0\le i\le 200}|u_n(x_i)-u_e(x_i)|.$$

В табл. 1 в случае использования полиномов Чебышева соответствующее отклонение имеет обозначение $e_{T,\infty}$, для полиномов Лежандра — $e_{P,\infty}$. В скобках у числовых значений полученных отклонений указана степень у 10. В шестом столбце приведены соответствующие результаты из [20] для полиномов Лежандра. В третьем и седьмом столбцах этой таблицы представлены значения отклонений полученных решений (2.13) и (3.9) между последовательными итерациями $n-1$ и $n$:

$$e_n = \max_{0\le i\le 200}|u_n(x_i)-u_{n-1}(x_i)|, \quad \tilde{e}_\infty = \max_{0\le i\le 200}|L_n(x_i)-u_e(x_i)|.$$

В четвертом и восьмом столбцах табл. 1 указаны значения отклонений $\tilde{e}_\infty$ итерполяционного полинома $L_n(x)$, построенного по формулам (2.13), (2.14) и (3.9) на основе значений функции $u_e(x)=\exp(4x)$ в корнях полиномов Чебышева и Лежандра степени $n+1$, от значений $u_e(x)$.

Таблица 1

Значения отклонений $e_\infty$, $e_n$ и $\tilde{e}_\infty$ в зависимости от $n$ для уравнения (6.1)

| $n$ | $e_{T,\infty}$ | $e_{T,n}$ | $\tilde{e}_{T,\infty}$ | $e_{P,\infty}$ | $e_{P,\infty}$ [20] | $e_{P,n}$ | $\tilde{e}_{P,\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | $9,7(-3)$ | $3,8(-2)$ | $6,1(-3)$ | $2,3(-2)$ | $1,9(-2)$ | $8,2(-2)$ | $1,6(-2)$ |
| 10 | $3,2(-4)$ | $1,6(-3)$ | $2,0(-4)$ | $8,9(-4)$ | $6,6(-4)$ | $3.9(-3)$ | $5,8(-4)$ |
| 12 | $8,1(-6)$ | $4,7(-5)$ | $4,6(-6)$ | $2,5(-5)$ | $1,7(-5)$ | $1,3(-4)$ | $1,5(-5)$ |
| 16 | $2,5(-9)$ | $1,9(-8)$ | $1,1(-9)$ | $8,8(-9)$ | $4,6(-9)$ | $6,1(-8)$ | $4,2(-9)$ |
| 20 | $3,6(-13)$ | $3,4(-12)$ | $1,2(-13)$ | $1,4(-12)$ | $5,2(-13)$ | $1,2(-11)$ | $4,8(-13)$ |

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода [7]

$$u(x)-\int_{-1}^{x} u(y)\mathrm{d}y = \cos(2\pi x)-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+\exp(-1), \quad -1 \le x \le 1. \quad (6.2)$$

Аналитическое решение уравнения (6.2) имеет вид $u_e(x) = \exp(x) + \cos(2\pi x)$. В табл. 2 приведены соответствующие значения полученных отклонений $e_\infty$, $e_n$ и $\tilde{e}_\infty$ в зависимости от $n$ для рассматриваемого уравнения (6.2).

Таблица 2

Значения отклонений $e_\infty$, $e_n$ и $\tilde{e}_\infty$ в зависимости от $n$ для уравнения (6.2)

| $n$ | $e_{T,\infty}$ | $e_{T,n}$ | $\tilde{e}_{T,\infty}$ | $e_{P,\infty}$ | $e_{P,n}$ | $\tilde{e}_{P,\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | $3,9(-2)$ | $2,0(-1)$ | $3,7(-2)$ | $1,1(-1)$ | $4,6(-1)$ | $1,0(-1)$ |
| 10 | $3,5(-3)$ | $2,5(-2)$ | $3,3(-3)$ | $1,1(-2)$ | $6,7(-2)$ | $1,0(-2)$ |
| 12 | $2,1(-4)$ | $2,0(-3)$ | $2,0(-4)$ | $7,0(-4)$ | $6,2(-3)$ | $6,8(-4)$ |
| 16 | $3,3(-7)$ | $5,2(-6)$ | $3,2(-7)$ | $1,2(-6)$ | $1,9(-5)$ | $1,1(-6)$ |
| 20 | $2.0(-10)$ | $4,8(-9)$ | $2,0(-10)$ | $8,3(-10)$ | $1,9(-8)$ | $8,1(-10)$ |

Из табл. 1 и 2 видно, что решения уравнений Вольтерра второго рода, полученные представленным методом с использованием нулей многочленов Лежандра и Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях $n$. Полученные значения отклонений между последовательными итерациями $e_n$ не превышают по бесконечной норме соответствующих значений отклонений $e_\infty$. Логарифмические значения $e_\infty$ по основанию 10 не превосходят соответствующих результатов вычислений из [7] для полиномов Чебышева. Отметим, что в отличии от [7] при вычислении $e_\infty$ в равномерно распределенные точки $[-1,\ 1]$ включены концы этого отрезка. Построенные решения приближаются к соответствующим полиномиальным интерполяциям функций аналитических решений по этой норме, что свидетельствует о хороших аппроксимационных свойствах метода.

## 7. Заключение

В работе предложена реализация метода коллокаций для построения решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с использованием нулей полиномов Чебышева и Лежандра на основе соотношений ортогональности и интегральных формул для этих полиномов и матричных преобразований. Получены оценки погрешности предлагаемого метода по бесконечной норме. Представленные результаты вычислительных экспериментов показывают эффективность использованного метода коллокации, который может быть применен для построения решений интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

## Список источников


1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М. : ГТТИ. 1934. 318 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : Физматгиз, 1966. 664 с.
3. Карчевский А. Л. Решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки методом квадратурных сумм // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23, № 3, С. 40–52. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.304
4. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
5. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. Cambridge : Cambridge University Press, 2017. 387 p.
6. Hildebrand F. B. Introduction to Numerical Analysis. New York : Dover Publications, 1987. 704 p.
7. Hu X., Wang Z., Hu B. A collocation method based on roots of Chebyshev polynomial for solving Volterra integral equations of the second kind // Applied Mathematics Letters. 2023. Vol. 29, N 108804. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108804
8. Ji T., Hou J., Yang C. The operational matrix of Chebyshev polynomials for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations // Adv. Contin. Discrete Models. 2022. Vol. 57. P. 1–16. https://doi.org/10.1186/s13662-022-03729-1
9. Khidir A. A. A new numerical technique for solving Volterra integral equations using Chebyshev spectral method // Math. Probl. Eng. 2021. Vol. 2021. P. 1–11. https://doi.org/10.1155/2021/9230714
10. Kress R. Linear Integral Equations. New York : Springer, 2013. 412 p.
11. Numerical solution of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations using Taylor collocation method / H. Laib, A. Boulmerka, A. Bellour, F. Birem // J. Comput. Appl. Math. 2023. Vol. 417, N 114537. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114537
12. Liang H. Discontinuous Galerkin approximations to second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernel // Appl. Numer. Math. 2022. Vol. 179. P. 170–182. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.04.019
13. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. Vol. 4, N 1. P. 160–177.

14. Loh J. R., Phang C., A new numerical scheme for solving system of Volterra integro-differential equation // Alex. Eng. J. 2018. Vol. 57, N 2. P. 1117–1124. https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.01.021
15. Mandal M., Nelakanti G. Superconvergence results of Legendre spectral projection methods for Volterra integral equations of second kind // Comp. Appl. Math. 2018. Vol. 37. P. 4007–4022. https://doi.org/10.1007/s40314-017-0563-5
16. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida : CRC Press, 2003. 335 p.
17. Mirzaee F., Bimesl S. A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients // J. Egypt. Math. Soc. 2014. Vol. 22, N 2. P. 238–248. https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.06.016
18. Shen J., Tang T., Wang L. Spectral Methods. Heidelberg : Springer Berlin, 2011. 472 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7
19. Solodusha S. V. On a class of the first kind Volterra equations in a problem of identification of a linear nonstationary dynamic system // Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, N 144. P. 406–413. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413
20. Tang T., Xu X., Cheng J. On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis // J. Comput. Math. 2008. Vol. 26, N 6. P. 825–837.
21. Tynda A. N., Noeiaghdam S., Sidorov D. N. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. С. 62–79. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.62
22. Wazwaz A. M. Linear and Nonlinear Integral Equations. Berlin : Springer, 2011. 639 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3

## References

1. Goursat E. *Cours D'Analyse Mathématique*. Moscow, GTTI Publ., 1934, vol. 3, part 2, 318 p. (in Russian)
2. Demidovich B.P., Maron I.A. *Fundamentals of computational mathematics*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 664 p. (in Russian)
3. Karchevsky A.L. Solution of the Convolution Type Volterra Integral Equations of the First Kind by the Quadrature-Sum Method. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, vol. 14, pp. 503–512. https://doi.org/10.1134/S1990478920030096
4. Suetin P.K. *Classical orthogonal polynomials*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 416 p. (in Russian)
5. Brunner H. *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications*. Cambridge, Cambridge University Press, 2017, 387 p.
6. Hildebrand F.B. *Introduction to Numerical Analysis*. New York, Dover Publications, 1987, 704 p.
7. Hu X., Wang Z., Hu B. A collocation method based on roots of Chebyshev polynomial for solving Volterra integral equations of the second kind. *Applied Mathematics Letters*, 2023, vol. 29, no. 108804. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108804
8. Ji T., Hou J., Yang C. The operational matrix of Chebyshev polynomials for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations *Adv. Contin. Discrete Models*, 2022, vol. 57, pp. 1–16. https://doi.org/10.1186/s13662-022-03729-1

9. Khidir A.A. A new numerical technique for solving Volterra integral equations using Chebyshev spectral method. *Math. Probl. Eng.*, 2021, vol. 2021, pp. 1–11. https://doi.org/10.1155/2021/9230714
10. Kress R. *Linear Integral Equations.* New York, Springer, 2013, 412 p.
11. Laib H., Boulmerka A., Bellour A., Birem F. Numerical solution of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations using Taylor collocation method. *J. Comput. Appl. Math.*, 2023, vol. 417, no. 114537. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114537
12. Liang H. Discontinuous Galerkin approximations to second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernel. *Appl. Numer. Math.*, 2022, vol. 179, pp. 170–182. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.04.019
13. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2008, vol. 4, no. 1, pp. 160–177.
14. Loh J.R., Phang C., A new numerical scheme for solving system of Volterra integro-differential equation. *Alex. Eng. J.*, 2018, vol. 57, no. 2. pp. 1117–1124. https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.01.021
15. Mandal M., Nelakanti G. Superconvergence results of Legendre spectral projection methods for Volterra integral equations of second kind. *Comp. Appl. Math.*, 2018, vol. 37, pp. 4007–4022. https://doi.org/10.1007/s40314-017-0563-5
16. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials.* Florida, CRC Press, 2003, 335 p.
17. Mirzaee F., Bimesl S. A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients. *J. Egypt. Math. Soc.*, 2014, vol. 22, no. 2. pp. 238–248. https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.06.016
18. Shen J., Tang T., Wang L. *Spectral Methods.* Heidelberg, Springer Berlin, 2011, 472 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7
19. Solodusha S.V. On a class of the first kind Volterra equations in a problem of identification of a linear nonstationary dynamic system. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 144. pp. 406–413. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413
20. Tang T., Xu X., Cheng J. On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis. *J. Comput. Math.*, 2008, vol. 26, no. 6, pp. 825–837.
21. Tynda A.N., Noeiaghdam S., Sidorov D.N. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 39, pp. 62–79. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.62
22. Wazwaz A.M. *Linear and nonlinear integral equations.* Berlin, Springer, 2011, 639 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3

## Об авторах

**Гермидер Оксана Владимировна**, канд. физ.-мат. наук, Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, 163002, Российская Федерация, o.germider@narfu.ru, http://orcid.org/0000-0003-3002-281X

## About the authors

**Oksana V. Germider**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation, o.germider@narfu.ru, http://orcid.org/0000-0003-3002-281X

**Попов Василий Николаевич**, д-р физ.-мат. наук, проф., Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, 163002, Российская Федерация, v.popov@narfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0803-4419

**Vasilii N. Popov**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation, v.popov@narfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0803-4419

*Поступила в редакцию / Received* 20.03.2024
*Поступила после рецензирования / Revised* 17.05.2024
*Принята к публикации / Accepted* 29.05.2024