ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2024. Т. 50. С. 5—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.95
MSC 34G10, 35A02, 35R30, 35C05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.5

Единственность решения в обратной задаче с переопределением повышенного типа для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка

М. Алмохамед[1]✉

[1] Московский технический университет связи и информатики, Москва, Российская Федерация
✉ mssrmtz@gmail.com

Аннотация. В банаховом пространстве исследуется линейная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Неоднородное слагаемое в уравнении считается стационарным и неизвестным. В начальный момент времени заданы стандартные условия Коши. В финальный момент времени добавлено новое условие — значение второй производной от основной эволюционной функции, т. е. порядок производной в финальном условии совпадает с порядком уравнения. Для поставленной задачи получен критерий единственности решения, выраженный в спектральных терминах. Указано достаточное условие единственности решения. Рассмотрен пример для уравнения Пуассона в цилиндрической области.

Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, линейная обратная задача, критерий единственности решения, элементарные решения обратной задачи

Ссылка для цитирования: Алмохамед М. Единственность решения в обратной задаче с переопределением повышенного типа для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 5–18.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.5

Research article

Uniqueness of Solution of the Inverse Problem with Overdetermination of the Raised Type for an Abstract Second-order Differential Equation

Muataz Almohamed[1]✉

[1] Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russian Federation
✉ mssrmtz@gmail.com

Abstract. We consider a linear inverse problem for a second-order abstract differential equation in a Banach space. The inhomogeneous term of the equation does not depend on time and is unknown. At the initial moment of time, the standard Cauchy conditions are given. An additional condition is specified at the final moment of time. This is a value of the second derivative of the main evolutionary function. For the studied problem, a uniqueness criterion of a solution is established. It is expressed in spectral terms. A simple sufficient condition for the solution uniqueness is noted. An example of the inverse problem for Poisson's equation in a cylindrical domain is considered.

Keywords: abstract differential equation of the second order, linear inverse problem, uniqueness criterion of solution, elementary solutions of inverse problem

For citation: Almohamed M. Uniqueness of Solution of the Inverse Problem with Overdetermination of the Raised Type for an Abstract Second-order Differential Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 5–18. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.5

Введение

Теорию обратных задач будем понимать в духе известных монографий [6; 23]. На этой основе дадим развернутое изложение нашей предыдущей заметки [3]. Продолжим исследование одной новой обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. Требуется найти неизвестное неоднородное слагаемое в уравнении при помощи дополнительного условия, заданного в финальный момент времени $t = T > 0$.

Изначально похожие обратные задачи рассматривались при тех или иных специальных ограничениях на тип дифференциального уравнения (см., например, [4; 7; 8; 11; 19; 23]). Затем было обнаружено, что вопрос единственности решения часто допускает полное исследование при максимально общих предположениях (см. [1; 16; 17; 22]). В указанных работах в качестве дополнительного условия для уравнения второго порядка выбиралось одно из следующих соотношений:

i) $u(T) = v_T$ (финальное переопределение первого рода);

ii) $u'(T) = v_T$ (финальное переопределение второго рода);

iii) $\alpha u(T) + \beta u'(T) = v_T$ (финальное переопределение третьего рода).

Здесь v_T — заданный элемент основного банахова пространства, где рассматривается уравнение, а $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ — числовые коэффициенты.

Сейчас также без всяких ограничений на тип дифференциального уравнения будем изучать задачу для того же уравнения второго порядка с новым финальным условием

iv) $u''(T) = v_T$.

Такое соотношение естественно называть *переопределением повышенного типа*.

Порядок производной во взятом переопределении совпадает с порядком дифференциального уравнения. Ситуация напоминает известную задачу Вентцеля (см. [5; 10]), где краевое условие содержит дифференциальный оператор того же порядка, что и само дифференциальное уравнение.

1. Постановка задачи

Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в E). Зафиксируем вещественное число $T > 0$. На отрезке $[0, T]$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1}$$

с неизвестным элементом g из пространства E. Для одновременного нахождения функции $u \colon [0, T] \to E$ и элемента g добавим условия

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \qquad u''(T) = u_2 \tag{1.2}$$

с заданными элементами $u_0, u_1, u_2 \in E$. Задача (1.1), (1.2) относится к классу *обратных задач* (см. [6; 23]).

Пару $(u(t), g)$ назовем *решением* обратной задачи (1.1), (1.2), если

$$u \in C^2([0, T], E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \quad g \in E, \tag{1.3}$$

и выполнены все соотношения (1.1), (1.2). Для согласования требований в условиях (1.2) и (1.3) будем полагать, что $u_0 \in D(A)$. Из определения следует, что $Au \in C([0, T], E)$.

Предположим что обратная задача (1.1), (1.2) с некоторыми элементами u_0, u_1, u_2 разрешима. Поставим вопрос о единственности возможного решения $(u(t), g)$.

Пусть две пары $(u^{(1)}(t),\, g^{(1)})$ и $(u^{(2)}(t),\, g^{(2)})$ являются решениями обратной задачи (1.1), (1.2). Тогда новая пара $(u(t), g)$, где

$$u(t) = u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t), \qquad g = g^{(1)} - g^{(2)},$$

удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(T) = 0. \tag{1.4}$$

Задача (1.1), (1.4) называется *однородной обратной задачей*. Очевидно, что такая задача всегда имеет *тривиальное решение*

$$u(t) \equiv 0, \qquad g = 0. \tag{1.5}$$

Любое другое решение однородной задачи (если оно есть) будем уже считать нетривиальным.

Итак, вопрос единственности решения в обратной задаче (1.1), (1.2) сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи (1.1), (1.4).

2. Элементарные решения

Для поиска возможных нетривиальных решений у однородной обратной задачи (1.1), (1.4) составим ее скалярный аналог

$$y''(t) = \lambda\, y(t) + 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$y''(T) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Требуется найти значения λ, при которых спектральная задача (2.1)–(2.3) является разрешимой, т. е. имеет решение $y(t) = y(t, \lambda)$ из класса $C^2[0, T]$ по переменной t.

Нетрудно понять, что каждому такому значению λ отвечает лишь одно возможное решение $y(t) = y(t, \lambda)$ (очевидно отличное от тождественного нуля).

Действительно, при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим задачу Коши (2.1), (2.2). Ее решение однозначно выражается в виде

$$y(t) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) - 1}{\lambda}\,, \qquad \left[\, y(t) = t^2/2 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\right]. \tag{2.4}$$

При этом

$$y'(t) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}}\,, \qquad \left[\, y'(t) = t \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\right], \tag{2.5}$$

$$y''(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t), \qquad \big[\, y''(t) = 1 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\big]. \tag{2.6}$$

Подстановка выражения (2.6) в финальное условие (2.3) дает характеристическое уравнение $L(\lambda) = 0$, где

$$L(\lambda) = L(\lambda, T) \equiv \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, T). \tag{2.7}$$

Как видим, все нули $\lambda \in \mathbb{C}$ характеристической функции (2.7) служат спектральными значениями скалярной задачи (2.1)–(2.3), и других спектральных значений быть не может.

Обратим внимание, что функции (2.4)–(2.6) являются целыми как по переменной t, так и по параметру λ. Это очевидно из разложений

$$\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) - 1}{\lambda} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \, \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}\,,$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \, \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\,, \qquad \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \, \frac{t^{2j}}{(2j)!}\,.$$

Таким образом, никакой «многозначности», связанной с присутствием $\sqrt{\lambda}$ в формулах (2.4)–(2.7), не возникает. Отметим также связь указанных разложений с теорией так называемых *обобщённых экспонент*, или, как говорят еще, *обобщенных λ-гиперболических функций* (подробнее про них см. [15]).

Нули характеристической функции (2.7) находятся элементарно и выражаются формулой

$$\lambda_k = \lambda_k(T) = -\,\frac{(2k-1)^2\,\pi^2}{4T^2}\,, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

При подстановке значений (2.8) в выражение (2.4) получаем соответствующие функции

$$y_k(t) = y_k(t, T) = \frac{4T^2}{(2k-1)^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Непосредственно проверяется, что каждая из функций (2.9) удовлетворяет всем соотношениям (2.1)–(2.3) со значением $\lambda = \lambda_k$, взятым из формулы (2.8). Как следует из наших рассуждений, других решений в спектральной задаче (2.1)–(2.3) нет.

Допустим, что какое-то из чисел λ_k вида (2.8) с некоторым $k \in \mathbb{N}$ оказалось собственным значением оператора A из уравнения (1.1), и существует собственный вектор $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, такой, что

$$Af_k = \lambda_k\, f_k. \tag{2.10}$$

Тогда пара

$$u(t) = \frac{4T^2}{(2k-1)^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\right) f_k, \qquad g = f_k \tag{2.11}$$

удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.4), давая нетривиальное решение этой задачи. Подобные решения (если они есть) будем называть *элементарными решениями* однородной обратной задачи (1.1), (1.4).

Зафиксируем установленный результат.

Лемма 1. *Пусть число* λ_k *вида* (2.8) *с некоторым* $k \in \mathbb{N}$ *является собственным значением оператора* A *в смысле* (2.10) *с собственным вектором* $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$. *Тогда однородная задача* (1.1), (1.4) *имеет нетривиальное элементарное решение вида* (2.11).

Доказательство. Предыдущие рассуждения данного пункта служат обоснованием леммы 1. Проверку условий (1.1), (1.4) для пары (2.11) можно также провести непосредственно (с учетом действующего равенства (2.10)). Таким образом, указанная пара действительно дает нетривиальное решение однородной обратной задачи (1.1), (1.4). Точнее, подобных решений будет бесконечно много, поскольку собственный вектор f_k можно умножать на любую ненулевую константу. $\square$

Понятно, что в условиях леммы 1 единственность решения обратной задачи (1.1), (1.2) будет нарушаться, так как в соответствующей однородной версии появятся нетривиальные решения вида (2.11).

Таким образом, для единственности решения в рассматриваемой обратной задаче необходимо требовать, чтобы ни одно из чисел (2.8) не являлось собственным значением оператора A. Покажем, что отсутствие таких собственных значений не только *необходимо*, но и *достаточно* для желаемой единственности решения.

3. Критерий единственности решения

Рассматриваем однородную обратную задачу (1.1), (1.4) в исходных предположениях из пункта 1. Установим следующий критерий, дающий полный ответ на поставленный вопрос о единственности решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть* A — *линейный замкнутый оператор в* E. *Для того чтобы однородная обратная задача* (1.1), (1.4) *имела на* $[0, T]$ *только тривиальное решение* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

не являлось собственным значением оператора A.

Доказательство. Необходимость. Пусть некоторое число λ_k вида (3.1) является собственным значением оператора A в смысле (2.10) с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$. Тогда (см. лемму 1) пара (2.11) служит нетривиальным решением задачи (1.1), (1.4). Таким образом, единственность решения обратной задачи будет нарушена.

Достаточность. Предположим, что ни одно из чисел λ_k вида (3.1) не является собственным значением оператора A. Возьмем произвольное решение $(u(t), g)$ однородной задачи (1.1), (1.4). Покажем, что это решение может быть только тривиальным, т. е. что $u(t) \equiv 0$ и $g = 0$.

Для производной $u'(t)$ определим векторные коэффициенты Фурье:

$$f_k = \int\limits_0^T u'(t)\,\sin\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Преобразуем выражение (3.2). Интегрируя по частям, имеем

$$f_k = u(T)\,\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} - \frac{(2k-1)\pi}{2T}\int\limits_0^T u(t)\,\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Принимая во внимание замкнутость оператора A и уравнение (1.1), замечаем, что

$$Af_k = Au(T)\,\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} - \frac{(2k-1)\pi}{2T}\int\limits_0^T Au(t)\,\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt =$$

$$= (u''(T) - g)\,\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} - \frac{(2k-1)\pi}{2T}\int\limits_0^T u''(t)\,\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt +$$

$$+ \, g\,\frac{(2k-1)\pi}{2T}\int\limits_0^T \cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Слагаемые с элементом g взаимно уничтожаются. Кроме того, так как $u''(T) = 0$ (см. (1.4)), то

$$Af_k = -\frac{(2k-1)\pi}{2T}\int\limits_0^T u''(t)\,\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Снова проинтегрируем по частям. Учитывая, что $u'(0) = 0$ (см. (1.4)), придем к соотношениям

$$Af_k = -\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4T^2}\int\limits_0^T u'(t)\,\sin\frac{(2k-1)\pi t}{2T}\,dt = \lambda_k f_k,$$

выполненным при всех $k \in \mathbb{N}$ с числами λ_k вида (3.1). Поскольку предполагается, что ни одно из таких чисел не является собственным значением оператора A, то $f_k = 0$ для любого векторного коэффициента вида (3.2).

Итак, установили, что

$$f_k \equiv \int_0^T u'(t) \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2T} \, dt = 0$$

при всех значениях $k \in \mathbb{N}$. Применяя к данным равенствам линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, получим непрерывную скалярную функцию $\psi(t) = f^*(u'(t))$, ортогональную на $[\,0, T\,]$ полной системе

$$\left\{ \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2T} \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Отсюда следует, что $\psi(t) = f^*(u'(t)) \equiv 0$ всюду на $[\,0, T\,]$. Выбор функционала $f^* \in E^*$ был произвольным. Используя теорему Хана – Банаха (см. [18, пункт 16.3]), заключаем, что $u'(t) \equiv 0$ на $[\,0, T\,]$. Но тогда и $u(t) \equiv 0$ (в силу условия $u(0) = 0$ из (1.4)). Здесь $u(t) \equiv 0$ — первый компонент выбранного решения $(u(t),\, g)$. Соотношение $g = 0$ очевидно следует теперь из дифференциального уравнения (1.1). Решение однородной обратной задачи (1.1), (1.4) может быть только тривиальным. Теорема доказана. □

Перенесем результат на неоднородную задачу (1.1), (1.2).

Теорема 2. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E. Для того чтобы обратная задача* (1.1), (1.2) *с фиксированным $T > 0$ при любом выборе элементов $u_0,\, u_1,\, u_2 \in E$ имела не более одного решения $(u(t),\, g)$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел λ_k вида* (3.1) *не являлось собственным значением оператора A.*

Теорема 2 непосредственно следует из теоремы 1.

Особо подчеркнем, что теоремы 1 и 2 дают критерий единственности решения для любого линейного замкнутого оператора A, т. е. без всяких ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения (1.1).

Выведем отсюда простое достаточное условие единственности решения обратной задачи.

Теорема 3. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E без собственных значений на луче $(\,-\infty,\, 0\,) \subset \mathbb{R}$. Тогда однородная обратная задача* (1.1), (1.4) *имеет на $[\,0, T\,]$ только тривиальное решение* (1.5) *и, следовательно, в задаче* (1.1), (1.2) *будет не более одного решения при любом выборе значения $T > 0$ и элементов $u_0,\, u_1,\, u_2 \in E$.*

Доказательство. Все числа (3.1) являются вещественными отрицательными. Но, по предположению, оператор A не имеет собственных значений на луче $(-\infty, 0)$. Таким образом, ни одно из чисел (3.1) не может быть собственным значением оператора A. Применяя предыдущие теоремы 1 и 2, получаем нужные результаты о единственности решения в однородной и неоднородной версиях обратной задачи. □

Дадим иллюстрацию к нашей общей теории.

4. Модельный пример

В цилиндре $Q_h \equiv \Omega \times [0, h]$ трехмерного пространства $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ рассмотрим уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{4.1}$$

с неизвестными функциями $u = u(x, y, z)$ и $g = g(x, y)$. Здесь Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ с гладкой (или кусочно гладкой) границей $\partial\Omega$. Число $h > 0$ считаем фиксированным.

Для одновременного нахождения пары $\{u(x, y, z),\, g(x, y)\}$ возьмем следующий набор краевых условий:

$$u(x, y, z) = \mu(x, y, z), \qquad (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{4.2}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad u_z(x, y, 0) = u_1(x, y), \tag{4.3}$$

$$u_{zz}(x, y, h) = u_2(x, y). \tag{4.4}$$

Функция $\mu(x, y, z)$ задана при $(x, y, z) \in \partial\Omega \times [0, h]$, т.е. на боковой поверхности цилиндра Q_h. Функции $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ заданы в замыкании области Ω. Все эти функции предполагаем достаточно гладкими. Для согласования условий будем считать, что

$$\mu(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \mu_z(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad \mu_{zz}(x, y, h) = u_2(x, y)$$

для точек $(x, y) \in \partial\Omega$.

Если трактовать уравнение (4.1) как уравнение стационарной теплопроводности, то $u = u(x, y, z)$ — неизвестная температура внутри цилиндра Q_h, а $g = g(x, y)$ — плотность стационарных источников тепла, не зависящих от вертикальной координаты z.

Функции $\mu(x, y, z)$ и $u_0(x, y)$ выражают граничные значения самой температуры u. Функция $u_1(x, y)$ — это температурный градиент на поверхности $z = 0$, а функция $u_2(x, y)$ — это изменчивость того же градиента на глубине $z = h$. В задачах геофизики естественно считать, что $u_2(x, y) \equiv 0$, поскольку температурный градиент на больших глубинах чаще всего сохраняет постоянное значение (см. [14, с. 259]).

Похожие обратные задачи для эллиптических уравнений рассматривались, например, в работах [2; 11–13; 20; 21]. Новым моментом в нашем исследовании является использование нестандартного краевого условия (4.4). В предыдущей заметке автора [2] было взято финальное переопределение второго рода в виде $u_z(x, y, h) = u_2(x, y)$. Другие работы [11–13; 20; 21] также использовали классические варианты краевых условий.

Для доказательства единственности решения в задаче (4.1)–(4.4) представим дифференциальное уравнение (4.1) в виде

$$u_{zz}(x, y, z) = -\Delta u(x, y, z) - g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{4.5}$$

где $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа. Добавим к уравнению (4.5) однородные краевые условия

$$u(x, y, z) = 0, \qquad (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{4.6}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad u_z(x, y, 0) = 0, \tag{4.7}$$

$$u_{zz}(x, y, h) = 0, \tag{4.8}$$

взятые в соответствии с набором условий (4.2)–(4.4).

Соотношения (4.5)–(4.8) можно интерпретировать как конкретный пример однородной обратной задачи (1.1), (1.4) с оператором

$$A = -\Delta \equiv -(\,\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\,) \tag{4.9}$$

на области определения $D(A) = \{\, v \in C^2(\overline{\Omega})\colon v\,|_{\partial\Omega} = 0 \,\}$ в банаховом пространстве $E = C(\overline{\Omega})$ с обычной супремум-нормой. Область $D(A)$ не является плотной в пространстве E, но это допускается нашей теорией. Ввиду естественных соображений мы используем сейчас переменную z вместо t, фиксированное $h > 0$ вместо $T > 0$ и функцию $(-g(x, y))$ вместо элемента $g \in E$ (ср. (4.5)–(4.8) с соотношениями (1.1), (1.4)). Суть дела от этого не изменяется.

Составим спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta\, v(x, y) + \lambda\, v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ v(x, y)\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Как известно, спектральные значения задачи (4.10) на классе $v \in C^2(\overline{\Omega})$ не могут быть вещественными отрицательными (см. [14, с. 522]).

Таким образом, уравнение $Av = \lambda v$ с оператором (4.9) при $\lambda < 0$ имеет на $D(A)$ лишь тривиальное решение $v(x, y) \equiv 0$. Иначе говоря, собственные значения оператора A не попадают на луч $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Применяя теорему 3, получаем, что в задаче (4.5)–(4.8) должно быть только тривиальное решение $u(x, y, z) \equiv 0$ и $g(x, y) \equiv 0$.

Возвращаясь к исходной задаче (4.1)–(4.4), получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть при некотором выборе функций* μ, u_0, u_1, u_2 *обратная задача* (4.1)–(4.4) *имеет два решения*

$$\{u^{(1)}(x,y,z),\, g^{(1)}(x,y)\}, \ \{u^{(2)}(x,y,z),\, g^{(2)}(x,y)\},$$

таких, что их разность

$$u(x,y,z) \equiv u^{(1)}(x,y,z) - u^{(2)}(x,y,z), \quad g(x,y) \equiv g^{(1)}(x,y) - g^{(2)}(x,y),$$

удовлетворяет условиям

$$u \in C^{2,2}(\overline{\Omega} \times [0,h]), \qquad g \in C(\overline{\Omega}).$$

Тогда $u^{(1)}(x,y,z) \equiv u^{(2)}(x,y,z)$ *в цилиндре* Q_h *и* $g^{(1)}(x,y) \equiv g^{(2)}(x,y)$ *в области* Ω.

Доказательство. Предыдущие рассуждения данного пункта (вместе со ссылкой на теорему 3) служат обоснованием теоремы 4. □

Приведенные обоснования содержат пробел, связанный с отсутствием замкнутости оператора (4.9) на области определения $D(A) \subset C(\overline{\Omega})$. Поэтому для более точного применения абстрактной схемы лучше перейти к замкнутому расширению оператора (4.9) в каком-то из пространств типа $L^2(\Omega)$ или $L^p(\Omega)$ (с сохранением однородных краевых условий первого рода на $\partial\Omega$). При такой процедуре отрицательных собственных значений в спектральной задаче (4.10) все равно не появится (см. [9, гл. 3, § 17]). Теорема 3 снова применима, а из единственности решения обратной задачи в обобщенных соболевских классах следует единственность классического решения, как в теореме 4. Мы не приводим сейчас полных формулировок ввиду их большой громоздкости. Обратная задача (4.1)–(4.4) рассматривается в качестве иллюстрации к предложенной общей теории.

Отметим, впрочем, что подобные обратные задачи могут представлять интерес для геофизики в связи с вопросом о поиске радиоактивных источников тепла в земной коре (см. [14, гл. 3, прилож. II]).

Автор выражает благодарность профессору И. В. Тихонову за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению работы, а также профессору В. Е. Федорову за указание на работы [5; 10], связанные с так называемой задачей Вентцеля.

Список источников

1. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2019. № 3. С. 50–58.

2. Алмохамед М. Восстановление правой части в уравнении Пуассона при помощи специальных краевых условий // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов : Научная книга, 2020. С. 30–32.
3. Алмохамед М. Об одной специальной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Современные проблемы математики и математического образования. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. С. 204–208.
4. Амиров А.Х. О разрешимости обратных задач для уравнения второго порядка // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20, вып. 3. С. 80–81.
5. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применение. 1959. Т. 4, вып. 2. С. 172–185.
6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
7. Искендеров А.Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Известия АН Азербайджанской ССР. Серия физико-технических и математических наук. 1976. № 2. С. 58–63.
8. Искендеров А.Д., Тагиев Р.Г. Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикладной математики и кибернетики. Научные труды Азербайджанского университета. 1979. № 1. С. 51–56.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. М. : Наука, 1973. 576 с.
10. Назаров А.И. Задача Вентцеля и ее обобщения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02. СПб., 2004.
11. Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
12. Прилепко А.И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1992. С. 151–162.
13. Соловьев В.В. Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 1. С. 27–38.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М. : Изд-во МГУ : Наука, 2004. 798 с. (Классический университетский учебник).
15. Тихонов И.В., Алмохамед М. Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 345–353.
16. Тихонов И.В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 890–911. https://doi.org/10.31857/S0374064122070032
17. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.
18. Треногин В.А. Функциональный анализ. 3-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с.

19. Эйдельман Ю. С. Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1647–1649.
20. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Доклады АН СССР. 1984. Т. 277, № 6. С. 1335–1337.
21. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1376–1383.
22. Almohamed M., Tikhonov I. V. Specific Cases of One General Inverse Problem for Abstract Differential Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, N 2. P. 502–509. https://doi.org/10.1134/S1995080223020063
23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel : Marcel Dekker Inc, 2000. 744 p. https://doi.org/10.1201/9781482292985

References

1. Almohamed M. Uniqueness Criterion for Linear Inverse Problem with the Final Overdetermination of the Second Type. *Proc. Voronezh State University, Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 50–58. (in Russian)
2. Almohamed M. Reconstruction of the Inhomogeneous Term for Poisson's Equation with Special Boundary Conditions. *Sovremennyye Problemy Teorii Funktsiy i ikh Prilozheniya*, Saratov, 2020, pp. 30–32. (in Russian)
3. Almohamed M. On a Specific Inverse Problem for an Abstract Differential Equation of the Second Order. *Sovremennyye Problemy matematiki i Matematicheskogo Obrazovaniya*, Saint Petersburg, 2024, pp. 204–208. (in Russian)
4. Amirov A. Kh. Solvability of the Inverse Problems for Second-Order Equations. *Funct. Anal. Appl.*, 1986, vol. 20, no. 3, pp. 236–237. https://doi.org/10.1007/BF01078476
5. Venttsel A. D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1959, vol. 4, iss. 2, pp. 164–177. https://doi.org/10.1137/1104014
6. Denisov A. M. *Elements of the Theory of Inverse Problems.* Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 14, De Gruyter, 1999, iv+272 p. https://doi.org/10.1515/9783110943252
7. Iskenderov A. D. Some Inverse Problems on Determining the Right-Hand Sides of Differential Equations. *Izvestia Academy of Sciences, Azerbaidzhan SSR, Series of Physical Technical and Mathematical Sciences*, 1976, no. 2, pp. 58–63. (in Russian)
8. Iskenderov A. D., Tagiev R. G. An Inverse Problem of Determining of the Right-Hand Sides of Evolution Equations in a Banach Space. *Questions of Applied Mathematics and Cybernetics. Scientific works of the Azerbaijan University*, 1979, no. 1, pp. 51–56. (in Russian)
9. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Lineynyye i Kvazilineynyye Uravneniya Ellipticheskogo Tipa.* 2-nd edition. Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p. (in Russian)
10. Nazarov A. I. *Zadacha Venttselya i Yeye Obobshcheniya.* Dr. sci. diss. abstr. Saint Petersburg, 2004. (in Russian)
11. Orlovskii D. G. On a Problem of Determining the Parameter of an Evolution Equation. *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 1614–1621. (in Russian)
12. Prilepko A. I. Izbrannyye Voprosy v Obratnykh Zadachakh Matematicheskoy Fiziki. *Uslovno-Korrektnyye Zadachi Matematicheskoy Fiziki i Analiza*, Novosibirsk, 1992, pp. 151–162. (in Russian)

13. Soloviev V. V. Desidability of Inverse Problems for the Elliptic Equation in the Cylinder. *Bulletin of Moscow State Regional University, Series: Physics and Mathematics*, 2012, no 1. pp. 27–38. (in Russian)
14. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki.* 7-th ed. Moscow, MSU Publ., Nauka Publ., 2004, 798 p. (in Russian)
15. Tikhonov I. V., Almohamed M. Generalized Exponents and Their Applications to the Theory of Differential Equations. *Computer Mathematics Systems and Their Applications.*. Smolensk, Smolensk State University Publ., 2020, iss. 21, pp. 345–353. (in Russian)
16. Tikhonov I. V., Almohamed M. Inverse Problem with Overdetermination of the Third Kind for an Abstract Second-Order Differential Equation. *Differ. Equ.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 877–898. https://doi.org/10.1134/S0012266122070035
17. Tikhonov I. V., Eidelman Yu. S. An Inverse Problem for a Differential Equation in Banach Space and the Distribution of Zeros of an Entire Mittag-Leffler Function. *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 669–677. https://doi.org/10.1023/A:1020262708594
18. Trenogin V. A. *Functional Analysis.* 3-rd ed. Moscow, 2002, 488 p. (in Russian)
19. Eidelman Yu. S. Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem for a Differential Equation in a Banach Space. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1647–1649. (in Russian)
20. Khaidarov A. A Class of Inverse Problems for Elliptic Equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, vol. 277, no. 6, pp. 1335–1337. (in Russian)
21. Khaidarov A. A Class of Inverse Problems for Elliptic Equations. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 8, pp. 1376–1383. (in Russian)
22. Almohamed M., Tikhonov I. V. Specific Cases of One General Inverse Problem for Abstract Differential Equations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 2, pp. 502–509. https://doi.org/10.1134/S1995080223020063
23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York, Basel, Marcel Dekker Inc., 2000, 744 p. https://doi.org/10.1201/9781482292985

Об авторах

Алмохамед Муатаз, канд. физ.-мат. наук, ассистент, Московский технический университет связи и информатики, Москва, 111024, Российская Федерация, mssrmtz@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7611-8369

About the authors

Muataz Almohamed, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Assistant, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, 111024, Russian Federation, mssrmtz@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7611-8369

Поступила в редакцию / Received 21.05.2024
Поступила после рецензирования / Revised 03.07.2024
Принята к публикации / Accepted 18.07.2024