Серия «Математика»
2024. Т. 49. С. 78—89

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК УДК 514.174.3 + 519.652
MSC 65D25, 65D05, 41A05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.78

Оценки кусочно-линейной аппроксимации производных функций классов Соболева

В. А. Клячин[1,2]✉

[1] Волгоградский государственный университет, Волгоград, Российская Федерация
[2] Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация,
✉ klchnv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оценки погрешности вычисления градиента функций классов Соболева при кусочно-линейной аппроксимации на триангуляциях. Традиционно подобного рода задачи рассматриваются для непрерывно дифференцируемых функций. При этом в соответствующих оценках отражается как класс гладкости функций, так и качество симплексов триангуляции. Однако в задачах обоснования существования решения вариационной задачи нелинейной теории упругости возникают условия на допустимые деформации в терминах обобщенных производных. Поэтому для численного решения указанных задач требуются условия обеспечивающие необходимую аппроксимацию производных непрерывных функций классов Соболева. Получена интегральная оценка указанной погрешности для непрерывно дифференцируемых функций в терминах норм соответствующих пространств для функций, которые отражают, с одной стороны, качество триангуляции полигональной области, а с другой стороны, класс функций с обобщенными производными. Последнее выражено в терминах мажоранты модуля непрерывности градиента. Для получения окончательной оценки доказана возможность предельного перехода по норме пространства Соболева.

Ключевые слова: триангуляция, триангуляция Делоне, кусочно-линейная аппроксимация, приближение градиента, численные методы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282 от 05.04.2022.

Ссылка для цитирования: Клячин В. А. Оценки кусочно-линейной аппроксимации производных функций классов Соболева // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 78–89.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.78

Research article

Estimates for Piecewise Linear Approximation of Derivative Functions of Sobolev Classes

Vladimir A. Klyachin[1,2✉]

[1] Volgograd State University, Volgograd, Russian Federation
[2] Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation
✉ klchnv@mail.ru

Abstract. The article considers the problem of estimating the error in calculating the gradient of functions of Sobolev classes for piecewise linear approximation on triangulations. Traditionally, problems of this kind are considered for continuously differentiable functions. In this case, the corresponding estimates reflect both the smoothness class of the functions and the quality of the triangulation simplexes. However, in problems of substantiating the existence of a solution to a variational problem in the nonlinear theory of elasticity, conditions arise for permissible deformations in terms of generalized derivatives. Therefore, for the numerical solution of these problems, conditions are required that provide the necessary approximation of the derivatives of continuous functions of the Sobolev classes. In this article, an integral estimate of the indicated error for continuously differentiable functions is obtained in terms of the norms of the corresponding spaces for functions that reflect, on the one hand, the quality of triangulation of the polygonal region, and on the other hand, the class of functions with generalized derivatives. The latter is expressed in terms of the majorant of the modulus of continuity of the gradient. To obtain the final estimate, the possibility of passing to the limit using the norm of the Sobolev space is proven.

Keywords: triangulation, Delaunay triangulation, piecewise linear approximation, gradient approximation, numerical methods

Acknowledgements: The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2022-282 from 05.04.2022 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Klyachin V. A. Estimates for Piecewise Linear Approximation of Derivative Functions of Sobolev Classes. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 78–89. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.78

1. Введение

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ область D как внутренность выпуклого многогранника. Пусть в $D \subset \mathbb{R}^n$ задан конечный набор точек $P = \{p_i\}, i = 1, ..., N$. Для функции $f \in C(D) \cap W_p^1(D), p \geq 1$ ставится задача о приближенном вычислении ее производных по известным значениям функции в точках p_i. Здесь $W_p^1(D)$ обозначается класс функций Соболева, имеющих обобщенные производные, и интегрируемых в степени p

вместе со своими обобщенными производными. Одним из методов решения указанной задачи аппроксимации является метод, основанный на построении триангуляции T множества точек P — системы симплексов с вершинами из P, которые попарно не пересекаются по внутренним точкам и объединение которых дает замыкание D. Если такой симплекс $S \in T$ имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, ..., p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида $f_S(x) = \langle a, x \rangle + b$ такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, ..., n.$$

Через $L_T^f(x)$ обозначим кусочно-линейную функцию

$$L_T^f(x) = f_S(x), \ x \in S \in T.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$, в которых функция дифференцируема (а она дифференцируема почти всюду в D), можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$. Такой способ аппроксимации градиента использовался в работе [5] для построения алгоритма вычисления пространственной формы равновесного состояния гиперупругого тела под воздействием деформаций. При этом ограничения, накладываемые на деформации, формулировались в терминах отображений классов Соболева, а их теоретическое обоснование дано в работах [1; 10; 16].

Напомним, что триангуляция T называется триангуляцией Делоне [11], если выполнено следующее условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P. Аналогичное условие пустой сферы для триангуляций поверхностей было введено и изучено в работах [6; 7]. Там же получены оценки погрешности кусочно-линейной аппроксимации. В работе [4] построен многомерный аналог классического примера Шварца [2], для которого изучена связь аппроксимации градиента с условием пустой сферы. Стоит привести работы [12–15], в которых получены аналогичные результаты в несколько иных формулировках. Тем не менее надо заметить, что во всех этих работах упор был сделан на аппроксимацию градиента непрерывно-дифференцируемых функций, тогда как настоящая статья посвящена получению оценок аппроксимации для функций с обобщенными производными.

2. Основные результаты

Предположим, что функция $f \in C(D) \cap W_p^1(D)$. Рассмотрим некоторую непрерывную функцию $\omega(x, t) : D \times [0, +\infty)$, неубывающую по t. Обозначим через $C_\omega(D)$ класс непрерывных и почти всюду дифференцируемых функций, таких, что

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq \omega(x, |x - y|), \tag{2.1}$$

для почти всех $x, y \in D$. Положим

$$\sigma(x,d) = \frac{1}{d}\int\limits_0^d \omega(x,t)dt.$$

Поскольку функция $\omega(x,t)$ не убывает по t, то выполнено неравенство

$$\sigma(x,d) \le \omega(x,d). \tag{2.2}$$

Для заданной триангуляции T области D определим функцию E_T, полагая для почти всех $x \in D$

$$E_T(x) = \max_{y \in S, S \in T, S \ni x} \omega(y, \mathrm{diam} S).$$

Наконец, определим функцию $\Phi_T(x)$ для всех $x \in D$ следующим образом. Рассмотрим симплекс $S \in T$, содержащий точку x. Пусть этот симплекс образован вершинами $q_0, q_1, ..., q_n \in P$. Построим матрицу $G_k, k = 0, 1, ..., n$, записав в ее строках координаты векторов $(q_i - q_k)/|q_i - q_k|$. Поскольку предполагается невырожденность симплексов триангуляции, матрица G_k получается невырожденной. Положим

$$\Phi_T(x) = \min_{k=0,1,\dots,n} ||G_k^{-1}||. \tag{2.3}$$

Здесь и далее используется норма матрицы, определяемая по формуле

$$||A|| = \sqrt{\mathrm{tr} A^T A}.$$

Рассмотрим получение оценки погрешности вычисления градиента в пространстве $W_1^p(D)$ сначала для функций класса $C^1(D)$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $f \in C^1(D) \cap W_p^1(D), p \ge 1$. Тогда имеет место оценка*

$$||\nabla f - \nabla L_T^f||_{L^p(D)} \le ||E_T||_{L^p(D)} + \sqrt{n}||\Phi_T \cdot E_T||_{L^p(D)}. \tag{2.4}$$

Отметим, что оценка погрешности в (2.4) имеет форму, в которой можно формально перейти к пределу, приближая функции $f \in C(D) \cap W_p^1(D), p \ge 1$ функциями класса $C^1(D) \cap W_p^1(D), p \ge 1$. Возможность такого перехода будет доказана ниже в теореме 3. И следовательно, будет доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f \in C(D) \cap W_p^1(D), p \ge 1$. Если функции $E_T, \Phi_T \cdot E_T \in L^p(D)$ то имеет место оценка*

$$||\nabla f - \nabla L_T^f||_{L^p(D)} \le ||E_T||_{L^p(D)} + \sqrt{n}||\Phi_T \cdot E_T||_{L^p(D)}. \tag{2.5}$$

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in C^1(D)$ и $L(x)$ – линейная функция вида $L(x) = \langle A, x\rangle + a$ в n-мерном симплексе $S \in T$ с вершинами в точках $q_0, q_1, ..., q_n \in P$, удовлетворяющая соотношениям

$$L(q_i) = f(q_i), i = 0, ..., n.$$

Воспользуемся формулой Тейлора. Тогда получим такую систему соотношений:

$$\langle A, q_i\rangle + a = L(q_i) = f(q_i) =$$
$$= f(q_0) + \langle \nabla f(q_0), q_i - q_0\rangle + \beta_i(q_i - q_0), i = 0, 1, ..., n,$$

или, вычитая из всех соотношений соотношение при $i = 0$, получаем

$$\langle A, q_i - q_0\rangle = \langle \nabla f(q_0), q_i - q_0\rangle + \beta_i(q_i - q_0), i = 1, 2, ..., n.$$

Здесь β_i — остаточные члены в формуле Тейлора. Откуда

$$\langle A - \nabla f(q_0), \frac{q_i - q_0}{|q_i - q_0|}\rangle = \frac{1}{|q_i - q_0|}\beta_i(q_i - q_0), i = 1, 2, ..., n,$$

или, что то же самое:

$$\langle \nabla L_T^f(q_0) - \nabla f(q_0), \frac{q_i - q_0}{|q_i - q_0|}\rangle = \frac{1}{|q_i - q_0|}\beta_i(q_i - q_0), i = 1, 2, ..., n.$$

Используя обозначения для матриц G_k, перепишем последнее равенство в виде

$$G_0 \cdot (\nabla L_T^f(q_0) - \nabla f(q_0)) = b,$$

где вектор $b = (b_1, ..., b_n)$,

$$b_i = \frac{1}{|q_i - q_0|}\beta_i(q_i - q_0), i = 1, 2, ..., n.$$

Поэтому

$$\nabla L_T^f(q_0) - \nabla f(q_0) = G_0^{-1} \cdot b.$$

Тогда получаем такую оценку разности градиентов:

$$|\nabla L_T^f(q_0) - \nabla f(q_0)| \leq ||G_0^{-1}|| \cdot |b|. \tag{2.6}$$

Необходимо оценить величины β_i. Используя непрерывную дифференцируемость $f(x)$, получаем

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}f(x_0 + t(x - x_0))dt = \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0\rangle =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt + \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt =$$

$$= \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt.$$

Воспользуемся определением модуля непрерывности

$$|\beta_i(q_i - q_0)| = |f(q_i) - f(q_0) - \langle \nabla f(q_0), q_i - q_0 \rangle| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 |\nabla f(q_0 + t(q_i - q_0)) - \nabla f(q_0)||q_i - q_0| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \omega(q_0, t|q_i - q_0|)|q_i - q_0| dt = \int\limits_0^{|q_i - q_0|} \omega(q_0, t) dt.$$

Следовательно,

$$|b| \leq \sqrt{n} \max_i |b_i| \leq \leq \sqrt{n} \max_i \frac{1}{|q_i - q_0|} \int\limits_0^{|q_i - q_0|} \omega(q_0, t) dt.$$

Функция

$$\int\limits_0^r \omega(q_0, t) dt$$

выпукла вниз по r, и следовательно, функция

$$\frac{1}{r} \int\limits_0^r \omega(q_0, t) dt$$

не убывает. Тогда будем иметь

$$|b| \leq \sqrt{n} \frac{1}{\mathrm{diam} S} \int\limits_0^{\mathrm{diam} S} \omega(q_0, t) dt.$$

Таким образом, объединяя полученное неравенство с (2.6), будем иметь

$$|\nabla L_T^f(q_0) - \nabla f(q_0)| \leq \sqrt{n} ||G_0^{-1}|| \cdot \sigma(q_0, \mathrm{diam} S). \tag{2.7}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_D |\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{S\in T}\int\limits_S |\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку в каждом симплексе $\nabla L_T^f(x) = \mathrm{const}$ и $\nabla f(x)\in C(S)$, то найдутся точки $x_S \in S$ такие, что

$$\int\limits_S |\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p = |\nabla f(x_S)-\nabla L_T^f(q_0)|^p|S|.$$

При этом в каждом симплексе выберем вершину q_0 такую, на которой достигается минимум в (2.3). Применяя неравенство Минковского, получаем оценку

$$\left(\int\limits_D |\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{S\in T}|\nabla f(x_S)-\nabla f(q_0)|^p|S|\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\sum_{S\in T}|\nabla f(q_0)-\nabla L_T^f(q_0)|^p|S|\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

По определению функции $\omega(x,r)$ для первого слагаемого имеем

$$\left(\sum_{S\in T}|\nabla f(x_S)-\nabla f(q_0)|^p|S|\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\left(\sum_{S\in T}\omega^p(q_0,x_S-q_0)|S|\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{S\in T}\omega^p(q_0,\mathrm{diam}S)|S|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для оценки второго интеграла в (2.8) воспользуемся оценкой (2.7) и неравенством (2.2):

$$\left(\sum_{S\in T}|\nabla f(q_0)-\nabla L_T^f(q_0)|^p|S|\right)^{\frac{1}{p}} \le \sqrt{n}\left(\sum_{S\in T}||G_0^{-1}||^p\cdot\sigma^p(q_0,\mathrm{diam}S)|S|\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \sqrt{n}\left(\sum_{S\in T}||G_0^{-1}||^p\cdot\omega^p(q_0,\mathrm{diam}S)|S|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Объединяя полученные оценки, приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_D |\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{S\in T}\omega^p(q_0,\mathrm{diam}S)|S|\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\sqrt{n}\left(\sum_{S\in T}||G_0^{-1}||^p\cdot\omega^p(q_0,\mathrm{diam}S)|S|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Согласно определениям функций $E_T(x),\Phi_T(x)$ получаем неравенство

$$\left(\int\limits_D|\nabla f(x)-\nabla L_T^f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{S\in T}\int\limits_S E_T^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\sqrt{n}\left(\sum_{S\in T}\int\limits_S\Phi_T^p(x)E_T^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\int\limits_D E_T^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+\sqrt{n}\left(\int\limits_D\Phi_T^p(x)E_T^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана.□

Для выполнения предельного перехода в доказанном неравенстве в пространстве $W_p^1(D)$ необходимо доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $D'\Subset D$ – компактно вложенная подобласть в D и $f\in C_\omega(D)\cap W_p^1(D)$. Тогда найдется последовательность функций $f_k\in C^\infty(D)\cap C_{\omega_k}(D)\cap W_p^1(D)$, таких, что*

$$||f_k-f||_{W_p^1(D')}\to 0, \tag{2.9}$$

причем для всех достаточно малых $r>0$

$$\omega_k(\cdot,r)\to\omega(\cdot,r)\ \textit{равномерно в}\ D'. \tag{2.10}$$

Доказательство. Положим $\delta=\mathrm{dist}(D',\partial D)>0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, расположенным в единичном шаре с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$ такую, что

$$\varphi(x)\geq 0,\ \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1.$$

Для всякого $0<\varepsilon<\delta/2$ построим функцию $f_\varepsilon(x)$, полагая

$$f_\varepsilon(x)=\int\limits_D f(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dy=$$

$$= \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} f(x-z)\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz.$$

Известно, что $f_\varepsilon \to f$ в $W^1_p(D')$ при $\varepsilon \to 0$. Положим

$$\omega_\varepsilon(x,r) = \int\limits_D \omega(y,r)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dy.$$

Покажем, что $f_\varepsilon \in C_{\omega_\varepsilon}(D)$. Известно, что

$$\nabla f_\varepsilon(x) = \int\limits_D \nabla f(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dy =$$

$$= \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} \nabla f(x-z)\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz.$$

Здесь применяется покомпонентное интегрирование вектор-функций. Тогда, беря $0 < r < \delta/2$ (в этом случае $x + r - z \in D$), будем иметь

$$|\nabla f_\varepsilon(x) - \nabla f_\varepsilon(x+r)| =$$

$$= \left| \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} \nabla f(x-z)\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz - \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} \nabla f(x-z+r)\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} |\nabla f(x-z) - \nabla f(x-z+r)|\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz \leq \int\limits_{|z|\leq\varepsilon} \omega(x-z,r)\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dz =$$

$$\int\limits_D \omega(y,r)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}dy = \omega_\varepsilon(x,r).$$

Осталось выбрать $f_\varepsilon(x)$ для $\varepsilon = 1/k, k > 2/\delta$. Равномерная сходимость в (2.10) следует из непрерывности ω и леммы 7.1 из [3]. Теорема доказана. $\square$

Пояснение к доказательству теоремы 2. Заметим, что из сходимости (2.9) следует возможность выполнить предельный переход в левой части неравенства (2.5). Сходимость же в (2.10) позволяет сделать вывод о сходимости в норме L^p функций E^k_T, построенных по $\omega_k(\cdot,r)$ к функции E_T, построенной по $\omega(\cdot,r)$. Поскольку триангуляция фиксирована, то функция Φ_T ограничена и не зависит от k. Это дает требуемую сходимость обоих норм в правой части неравенства (2.5).

3. Заключение

Таким образом, в статье получены оценки в норме L^p погрешности вычисления градиента непрерывных функций классов Соболева для кусочно-линейной интерполяции на триангуляциях полигональной области. Полученные оценки связывают качество триангуляции, т. е. симплексов ее отдельных элементов с классов интегрируемости мажоранты модуля непрерывности градиента. Заметим также, что результаты, полученные В. М. Миклюковым в работах [8;9], дают возможность распространить оценки погрешности аппроксимации, полученные в настоящей статье на случай функций классов $ACL^p(D)$.

Список источников

1. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526. https://doi.org/10.7868/S086956521535008X
2. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. Волгоград : ПЛАТОН, 1997.
3. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М. : Наука, 1989.
4. Клячин В. А. О многомерном аналоге примера Шварца // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 4. С. 41–48. https://doi.org/10.4213/im6845
5. Клячин В. А., Кузьмин В. В., Хижнякова Е. В. Метод триангуляции для приближенного решения вариационных задач нелинейной теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 55—73. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54
6. Клячин В. А., Широкий А. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // Известия вузов. Математика. 2012. № 1. С. 31–39. https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045
7. Клячин В. А., Широкий А. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 51–55.
8. Миклюков В. М. О некоторых признаках существования полного дифференциала // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 4. С. 805–814. https://doi.org/10.1007/s11202-010-0065-9
9. Миклюков В. М. Некоторые признаки существования полного дифференциала в точке // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 45–62. https://doi.org/10.4213/sm7566
10. Молчанова А. О. Вариационно-аппроксимативный подход к динамическим задачам теории упругости на новом классе допустимых деформаций // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 5. С. 55-–60. https://doi.org/10.17377/PAM.2016.16.305
11. Скворцов А. В., Мирза Н. С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск : Изд. Том. ун-та, 2006.
12. Субботин Ю. Н. Погрешность многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации, Теория функций и смежные вопросы анализа // Труды конференции

по теории функций, посвященной 80-летию академика Сергея Михайловича НИКОЛЬСКОГО. Днепропетровск, 29 мая–1 июня 1985 г / Тр. МИАН СССР. М. : Наука, 1987. Т. 180. С. 208–209.
13. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций. Душанбе, август 1986 г. / Тр. МИАН СССР. М. : Наука, 1989. Т. 189. С. 117–137.
14. Субботин Ю. Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 88–99. https://doi.org/10.1007/BF01139604
15. Shewchuk J. R. What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley. Berkeley, CA 94720, 2002. Preprint.
16. Vodopyanov S. K., Molchanova A. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. Vol. 59, N 17. P. 1–25. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1671-4

References

1. Vodop'yanov S.K., Molchanova A.O. Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 739–742. https://doi.org/10.7868/S086956521535008X (in Russian)
2. Bernard R. Gelbaum, John M.H. *Olmsted Counterexamples in analysis.* Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam, 1964.
3. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
4. Klyachin V.A. On a multidimensional analogue of the Schwarz example. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 681–687. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n04ABEH002601
5. Klyachin V.A., Kuzmin V.V., Khizhnyakova E.V. Triangulation Method for Approximate Solving of Variational Problems in Nonlinear Elasticity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 54–72. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54 (in Russian)
6. Klyachin V.A., Shirokii A.A. The Delaunay triangulation for multidimensional surfaces and its approximative properties. *Russian Mathematics*, 2012. vol. 56, pp. 27–34. https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045
7. Klyachin V.A., Shiroky A.A. Delaunay triangulation of multidimensional surfaces. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya,* 2010, no. 4, pp. 51–55. (in Russian)
8. Miklyukov V.M. Some conditions for the existence of the total differential. *Siberian mathematical journal,* 2010, vol. 51, pp. 639–647. https://doi.org/10.1007/s11202-010-0065-9
9. Miklyukov V. M. Some conditions for the existence of a total differential at a point. *Sb. Math.,* 2010, vol. 201, no. 8, pp. 1135–1152. https://doi.org/10.4213/sm7566
10. Molchanova A. A variational approximation scheme for the elastodynamic problems in the new class of admissible mappings. *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016. vol. 16, no. 3. pp. 55–60. https://doi.org/10.17377/PAM.2016.16.305 (in Russian)

11. Skvortsov A.V., Mirza N.S. *Algoritmy postroeniya i analiza triangulacii* [Constructing and Analisys of Triangulation Algorithms.] Tomsk, Tomsk Univ. Publ., 2006.
12. Subbotin Y.N. The error in multidimensional piecewise polynomial approximation. *Theory of functions and related questions of analysis*, Proceedings of a conference on function theory honoring the 80th birthday of Academician Sergej Mikhajlovich Nikolskij. Collection of papers, Trudy Mat. Inst. Steklov., vol. 180, Moscow, Nauka Publ., 1987, pp. 208–209.
13. Subbotin Y.N. Dependence of estimates of a multidimensional piecewise polynomial approximation on the geometric characteristics of the triangulation. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 1990, vol. 189, no. 4, pp. 135–159.
14. Subbotin Y.N. Error of the approximation by interpolation polynomials of small degrees on n-simplices. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR,* 1990, vol. 48, pp. 1030–1037. https://doi.org/10.1007/BF01139604
15. Shewchuk J.R. What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures. *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley* Berkeley, CA 94720, 2002. Preprint.
16. Vodopyanov S.K., Molchanova A. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity. *Calculus of Variations and PDE*, 2020, vol. 59, no. 17, pp. 1–25. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1671-4

Об авторах

Клячин Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Волгоградский государственный университет, Волгоград, 400062, Российская Федерация, klchnv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-7849

About the authors

Vladimir A. Klyachin, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russian Federation, klchnv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-7849

Поступила в редакцию / Received 04.02.2024
Поступила после рецензирования / Revised 04.03.2023
Принята к публикации / Accepted 06.03.2024