Серия «Математика»
2024. Т. 48. С. 64—79

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.956.4
MSC 35K58, 35K15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64

Сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии в полупространстве с условием Неймана

Р. Гердауй[1], С. Селвадурай[2], Х. Фуджита Яшима[3]✉

[1] Университет Тизи Узу, Тизи Узу, Алжир
[2] Университет Турин, Турин, Италия
[3] Высшая нормальная школа Константины, Константина, Алжир
✉ hisaofujitayashima@yahoo.com

Аннотация. Рассматривается вопрос о приближении решения уравнения переноса-диффузии в полупространстве с однородным условием Неймана. Используя ядро теплопроводности и перемещение, соответствующее переносу на каждом шаге дискретизированного времени, строится семейство приближенных решений. Используя четные продолжения, преобразуются заданные функции и приближенные решения в функции, определенные на всем пространстве, что позволяет установить оценки приближенных решений и их производных и доказать их сходимость. Показывается, что предельная функция удовлетворяет уравнению и граничному условию.

Ключевые слова: уравнение переноса-диффузии, однородное условие Неймана, приближенное решение, ядро теплопроводности

Ссылка для цитирования: Гердауй Р., Селвадурай С., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии в полупространстве с условием Неймана // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48. С. 64–79.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64

Research article

Convergence of Approximate Solutions for Transport-diffusion Equation in the Half-space with Neumann Condition

Rabah Gherdaoui[1], Steave Selvaduray[2], Hisao Fujita Yashima[3]✉

[1] Université de Tizi Ouzou, Tizi Ouzou, Algeria
[2] Università di Torino, Turin, Italy
[3] École Normale Supérieure de Constantine, Constantine, Algeria
✉ hisaofujitayashima@yahoo.com

Abstract. In this paper, we examine the question about the approximation of the solution to a transport-diffusion equation in a half-space with the homogenous Neumann condition. Using heat kernel and translation corresponding to the transport in each step of time discretization, we construct a family of approximate solutions. By even extension the given functions and the approximate solutions are transformed into functions defined on the whole space, what makes it possible to establish estimates of approximate solutions and their derivatives and to prove their convergence. We show that the limit function satisfies the equation and the boundary condition.

Keywords: transport-diffusion equation, homogenous Neumann condition, approximate solution, heat kernel

For citation: Gherdaoui R., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Convergence of Approximate Solutions for Transport-diffusion Equation in the Half-space with Neumann Condition. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 64–79. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64

1. Введение

Хорошо известно несколько методов изучения уравнений параболического типа, в том числе уравнения переноса-диффузии

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x)\cdot\nabla u(t,x) = \kappa\Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x))$$

(здесь и далее $v\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$). Как в пространстве Гёльдера, так и в пространстве Соболева, благодаря наличию оператора Лапласа, можно получить оценки большей гладкости и построить решение, как показано в классической книге [3] и многих других работах. Но такие оценки гладкости не сохраняются тогда, когда коэффициент диффузии κ стремится к нулю. С другой стороны, как показано в [7], используя стохастическое представление решения, можно охарактеризовать поведение решения при $\kappa \to 0$, но результаты используют понятия теории вероятностей и их не всегда легко интерпретировать в терминах теории уравнений в частных производных.

Пользуясь свойствами стохастического представления, но используя фундаментальное решение уравнения теплопроводности вместо броуновского движения, можно построить приближенные решения уравнения переноса-диффузии без использования понятий теории вероятностей. Действительно, в работах [10] и [9] построены такие приближенные решения и доказана их сходимость к решению уравнения переноса-диффузии в $\mathbb{R}^d$, а в работах [5] и [4] с помощью этих приближенных решений доказана сходимость решения уравнения переноса-диффузии к решению уравнения переноса в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю.

С другой стороны, результаты [10] и [9] были обобщены на случай, когда уравнение рассматривается с однородным граничным условием Дирихле, сначала в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ с переносом, параллельным оси x_1 [1], а затем в полупространстве $\mathbb{R}^d_+$ с переносом, который необязательно параллелен гиперплоскости $\{x_d = 0\}$ [8].

В настоящей работе строятся приближенные решения для уравнения переноса-диффузии с помощью ядра теплопроводности и соответствующего переносу линейного перемещения на каждом шаге временной дискретизации, а также доказывается при определенных условиях их сходимость к решению уравнения переноса-диффузии в полупространстве $\mathbb{R}^d_+$ с однородным граничным условием Неймана. Напомним, что в [8] с помощью нечетного продолжения задача с однородным условием Дирихле была преобразована в задачу во всем $\mathbb{R}^d$, а в настоящей работе рассматриваем однородное условие Неймана и предполагаем выполнение соответствующих условий для заданных функций. С учетом этих условий мы используем метод четного продолжения (см., например, [2], гл. III, § 3, **2**), который позволяет преобразовать задачу в полупространстве в задачу во всем $\mathbb{R}^d$, поэтому можно воспользоваться методиками, разработанными в [10] и [9]. Но в преобразованном уравнении нужно учесть влияние граничного условия. Потерю гладкости из-за граничного условия Неймана мы контролируем с помощью новых оценок.

Предложенное нами приближение имеет несколько схожих аспектов с численным методом Эйлера – Маруяма, который использует дискретизацию по времени для стохастических уравнений. Даже если известна сходимость приближения метода Эйлера – Маруяма к решению стохастического уравнения (см., например, [6]), для выяснения связи между методом Эйлера – Маруяма и нашим приближением предстоит еще много работы.

Целью нашей следующей работы является изучение поведения решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю. Также требуется проведение анализа асимптотического поведения решения для $t \to \infty$, а также для $x_d \to +0$.

2. Определение приближенных решений и основный результат

Прежде всего, построим семейство приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$ для уравнения переноса-диффузии с однородным граничным условием Неймана. Как и в [10], [9], [1] и [8], используем специальную дискретизацию по времени. Положим

$$\delta_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.1}$$

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \cdots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \cdots, \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n. \tag{2.2}$$

Рассмотрим положительную постоянную κ и определим

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{d/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4\delta_n\kappa}), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \ \ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.3}$$

Далее введем оператор четного продолжения Λ_0 и оператор нечетного продолжения Λ_1. Для функции $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ мы определим

$$\Lambda_0(w)(r) = \begin{cases} w(r), & \text{если } \ r \geq 0 \\ w(-r), & \text{если } \ r < 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

$$\Lambda_1(w)(r) = \begin{cases} w(r), & \text{если } \ r > 0 \\ 0, & \text{если } \ r = 0 \\ -w(-r), & \text{если } \ r < 0 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Положим также $\Omega = \{\, x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > 0 \,\}$, так что $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d \geq 0\,\}$. Будем использовать записи

$$x' = (x_1, \cdots, x_{d-1}), \qquad v'(t,x) = (v_1(t,x), \cdots, v_{d-1}(t,x)),$$

так что

$$x = (x', x_d), \qquad v(t,x) = (v'(t,x), v_d(t,x)).$$

Определим приближенные решения $u^{[n]}(t,x)$ соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \Lambda_0(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x' - \delta_n v'(t_k^{[n]}, x) - y', \cdot))(x_d - \delta_n v_d(t_k^{[n]}, x) - y_d) dy + \\ &\qquad + \ \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \qquad x \in \Omega, \ \ k = 1, 2, \cdots, \\ &\qquad u^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \\ &\qquad\qquad \text{при } \ t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}, \ \ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $u_0(x)$, $v(t,x)$, $f(t,x,u)$ — заданные функции.

В дальнейшем докажем, что при определенных условиях, которые мы укажем позже, функции $u^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, определенные соотношениями (2.6)–(2.7), сходятся к функции $u(t,x)$, которая удовлетворяет уравнению переноса-диффузии, однородному граничному условию Неймана $\partial_{x_d} u(t,x',x_d)\big|_{x_d=0} = 0$ и начальному условию $u(0,x) = u_0(x)$.

Чтобы точно сформулировать предположения, используем следующие обозначения:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad D_{x,u}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d} \partial u^{\alpha_{d+1}}},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$ или $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_j$.

Обозначим через $C_b(\mathbb{R}_+^d)$ (соотв. $C_b(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R})$) класс ограниченных непрерывных функций в $\mathbb{R}_+^d$ (соотв. $\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}$) и через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d))$ (соотв. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}))$) класс непрерывных функций в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^d$ (соотв. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}$), которые ограничены в $[0,\tau] \times \mathbb{R}_+^d$ (соотв. $[0,\tau] \times \mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}$) для любого $\tau > 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 3, \tag{2.8}$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 2, \tag{2.9}$$

$$v_d(t,x',0) = 0 \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.10}$$

$$\partial_{x_d} v_j(t,x',x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad j = 1, \cdots, d-1, \tag{2.11}$$

$$\frac{D_{x,u}^\alpha f(t,x,u)}{1+|u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R})) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 3, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial_t D_{x,u}^\alpha f(t,x,u)}{1+|u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R})) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 2, \tag{2.13}$$

$$\partial_{x_d} f(t,x',x_d,u)\big|_{x_d=0} = 0 \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.14}$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}_+^d) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 3, \tag{2.15}$$

$$\partial_{x_d} u_0(x',x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{2.16}$$

Тогда функции $u^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (2.6)–(2.7), и их производные первого и второго порядка по $x \in \mathbb{R}^d$ сходятся равномерно к предельной функции $u(t,x)$ и ее производным первого и второго порядка в $[0,\tau] \times \Omega$ для любого фиксированного $\tau > 0$. Кроме того, *предельная функция* $u(t,x)$ *обладает обобщенной производной по* $t>0$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\partial_t u(t,x)+v(t,x)\cdot\nabla u(t,x)=\kappa\Delta u(t,x)+f(t,x,u(t,x)) \text{ в }]0,\infty[\times\Omega, \quad (2.17)$$

начальному условию

$$u(0,x)=u_0(x) \text{ в } \Omega \quad (2.18)$$

и граничному условию Неймана

$$\partial_{x_d}u(t,x',x_d)\big|_{x_d=0}=0 \text{ в } \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.19)$$

3. Преобразование задачи и предварительные замечания

Как и в [8], для доказательства теоремы 1 вместо того, чтобы рассмотреть непосредственно приближенные решения $u^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (2.6)–(2.7), рассмотрим функции $U^{[n]}(t,x)$, которые являются продолжением $u^{[n]}(t,x)$ в $\mathbb{R}^d$.

Положим

$$U_0(x)=\Lambda_0(u_0(x',\cdot))(x_d), \qquad x=(x',x_d)\in\mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

$$V_j(t,x)=\Lambda_0(v_j(t,x',\cdot))(x_d), \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \ j=1,\cdots,d-1, \quad (3.2)$$

$$V_d(t,x)=\Lambda_1(v_d(t,x',\cdot))(x_d), \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d, \quad (3.3)$$

$$V(t,x)=(V'(t,x),V_d(t,x)), \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d, \quad (3.4)$$

$$F(t,x,U)=\Lambda_0(f(t,x',\cdot,U))(x_d), \qquad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ U\in\mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Определим теперь функции $U^{[n]}(t,x)$, $n=1,2,\cdots$. Положим

$$U^{[n]}(t_0^{[n]},x)=U_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \quad (3.6)$$

$$U^{[n]}(t_k^{[n]},x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x-\delta_n V(t_k^{[n]},x)-y)dy+$$
$$+\delta_n F(t_{k-1}^{[n]},x,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \quad k=1,2,\cdots, \quad (3.7)$$

$$U^{[n]}(t,x)=\frac{t_k^{[n]}-t}{\delta_n}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\frac{t-t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n}U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$$
$$\text{при } \ t_{k-1}^{[n]}\leq t\leq t_k^{[n]}, \ \ x\in\mathbb{R}^d. \quad (3.8)$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Предположим, что предположения теоремы 1 выполнены. Тогда функции $U^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (3.6)–(3.8), и их производные первого и второго порядка по $x \in \mathbb{R}^d$ сходятся равномерно к предельной функции $U(t,x)$ и ее производным первого и второго порядка в $[0,\tau] \times \Omega$ для любого фиксированного $\tau > 0$. Кроме того, предельная функция $U(t,x)$ обладает обобщенной производной по $t > 0$ и удовлетворяет уравнению*

$$\partial_t U(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla U(t,x) = \kappa \Delta U(t,x) + F(t,x,U(t,x)) \text{ в }]0,\infty[\times \mathbb{R}^d, \tag{3.9}$$

начальному условию

$$U(0,x) = U_0(x) \text{ в } \mathbb{R}^d \tag{3.10}$$

и граничному условию Неймана

$$\partial_{x_d} U(t,x',x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^{d-1}. \tag{3.11}$$

Нетрудно заметить, что сужение на Ω функции $U^{[n]}(t,x)$, определенной соотношениями (3.6)–(3.8), совпадает с $u^{[n]}(t,x)$, определенной соотношениями (2.6)–(2.7). Действительно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Функции $U^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (3.6)–(3.8), обладают непрерывной производной $\partial_{x_d} U^{[n]}(t,x)$ и удовлетворяют соотношениям*

$$U^{[n]}(t,x)\big|_{\Omega} = u^{[n]}(t,x), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ n = 1,2,\cdots, \tag{3.12}$$

$$\partial_{x_d} U^{[n]}(t,x',x_d)\big|_{x_d=0} = 0, \qquad t \geq 0,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ n = 1,2,\cdots, \tag{3.13}$$

где $u^{[n]}(t,x)$ — функция, определенная соотношениями (2.6)–(2.7).

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Напомним сначала, что согласно предположению (см. (2.15), (2.16)) имеем $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ и $\partial_{x_d} u_0(x)\big|_{x_d=0} = 0$. Таким образом, из определения (3.6) (см. также (3.1)) следует, что при $t = t_0^{[n]} = 0$ соотношения (3.12)–(3.13) справедливы. Поэтому достаточно показать формулировку леммы, предполагая, что она верна для $t = t_{k-1}^{[n]}$. Действительно, если $\partial_{x_d} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^d$ и соотношения (3.12)–(3.13) при $t = t_{k-1}^{[n]}$ справедливы, то из определений (3.7) и (3.5) следует, что $\partial_{x_d} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^d$ и соотношения (3.12)–(3.13) при $t = t_k^{[n]}$ справедливы. Лемма доказана. □

Определение (3.6)–(3.8) приближенных решений $U^{[n]}(t,x)$ формально идентично определению приближенных решений, введенных в [10], что позволяет использовать методики, разработанные в [10]. Но относительно гладкости приближенных решений нужно учитывать наличие граничного условия.

4. Оценки приближенных решений и их производных первого, второго и третьего порядка

В этом разделе, следуя схеме [10] и [9], установим оценки функций $U^{[n]}(t,x)$, определенных соотношениями (3.6)–(3.8), и их производных первого, второго и третьего порядка по $x \in \mathbb{R}^d$. Для упрощения записи здесь и далее для $\tau > 0$ воспользуемся обозначением

$$\tau_+ = \tau + \delta_1. \tag{4.1}$$

Лемма 2. *Предположим, что предположения теоремы 2 (т.е. предположения теоремы 1) выполнены. Пусть $U^{[n]}(t,x)$ — функции, определенные соотношениями (3.6)–(3.8). Тогда существуют функции $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ и $\Phi_3(t)$, которые являются непрерывными в $\mathbb{R}_+$, возрастающими, независимыми от n и такими, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t,x)| \le \Phi_0(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)\right| \le \Phi_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)\right| \le \Phi_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} \left| D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)\right| \le \Phi_3(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \qquad w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x),$$

$$w_{i_1 i_2 i_3,k}^{[3,n]}(x) = \frac{\partial^3}{\partial x_{i_3}\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$$

для $n = 1, 2, \cdots, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$. Далее положим

$$A_k^{[0,n]} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \qquad A_k^{[1,n]} = \sum_{i=1}^d \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i,k}^{[1,n]}(x)|,$$

$$A_k^{[2,n]} = \sum_{i_1,i_2=1}^d \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x)|, \quad A_k^{[3,n]} = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^d \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |w_{i_1 i_2 i_3,k}^{[3,n]}(x)|.$$

Зафиксируем $\tau > 0$. Чтобы доказать существование функции $\Phi_0(t)$, положим

$$C_0 = C_0(\tau) = \sup_{(t,x,U)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \frac{|F(t,x,U)|}{1+|U|}.$$

Так как

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) dy \Big| \le \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)|,$$

$$|F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))| \le C_0(1 + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)|),$$

из определений (3.6)–(3.7) следует, что

$$A_k^{[0,n]} \le (1+\delta_n C_0) A_{k-1}^{[0,n]} + \delta_n C_0 \le (1+\delta_n C_0)^k A_0^{[0,n]} + \delta_n C_0 \sum_{j=1}^{k} (1+\delta_n C_0)^{k-j}$$

для $0 \le t_k^{[n]} \le \tau_+$. Из этого соотношения и определения (3.8) вытекает, что существует функция $\Phi_0(\tau)$, удовлетворяющая неравенству (4.2).

Отметим, что в силу (4.2) $|U^{[n]}(t,x)|$ ограничено для $0 \le t \le \tau_+$ при фиксированном $\tau > 0$, так что в силу (2.12)–(2.13) можно считать, что $D_{x,u}^{\alpha} f(t,x,u)$, $1 \le |\alpha| \le 3$, и $\partial_t D_{x,u}^{\alpha} f(t,x,u)$, $|\alpha| \le 2$, ограничены в $[0, \tau_+] \times \mathbb{R}^d$.

Чтобы доказать существование функции $\Phi_1(t)$, мы дифференцируем по x_i обе части (3.7), так что имеем

$$\begin{aligned} w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \big[w_{i,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) - \\ - \delta_n \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_i} w_{j,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) \big] dy + \delta_n \big[F'_{i,k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + \\ + F'_{U,k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{i,k-1}^{[1,n]}(x) \big], \end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\xi(x,y) = x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y, \tag{4.7}$$

$$F'_{i,k}(x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) = \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x, U)}{\partial x_i} \Big|_{U = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)}, \tag{4.8}$$

$$F'_{U,k}(x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) = \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x, U)}{\partial U} \Big|_{U = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)}. \tag{4.9}$$

С учетом предположений (2.8), (2.12) (и определений (3.2)–(3.5)) из (4.6)–(4.9) вытекает, что существует независимая от n постоянная $C_1 = C_1(\tau)$, такая что

$$A_k^{[1,n]} \le (1 + \delta_n C_1) A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C_1 \qquad \text{для} \ \ k \le \frac{\tau_+}{\delta_n}. \tag{4.10}$$

Отсюда

$$A_k^{[1,n]} \leq (1+\delta_n C_1)^k A_0^{[1,n]} + \delta_n C_1 \sum_{j=1}^{k} (1+\delta_n C_1)^{k-j}, \qquad (4.11)$$

при условии, что $k \leq \frac{\tau_+}{\delta_n}$.

Учитывая соотношение $A_0^{[1,n]} = \sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_i} U_0(x)| < \infty$ и определение (3.8), из (4.11) получим существование функции $\Phi_1(t)$, удовлетворяющей неравенству (4.3).

Чтобы доказать существование функции $\Phi_2(t)$, дифференцируем по x_{i_1} и x_{i_2} обе части (3.7), так что имеем

$$\begin{aligned} w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \big[w_{i_1 i_2,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) - \\ - \delta_n \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j}{\partial x_{i_2}} w_{i_1 j,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) \big] dy + \delta_n (B_1 + B_2), \end{aligned} \qquad (4.12)$$

$$B_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \qquad (4.13)$$

$$B_2 = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \Big(\frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w_{j,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) dy \Big), \qquad (4.14)$$

где $\xi(x,y)$ — обозначение, введенное в (4.7).

Легко видеть, что первое слагаемое правой части (4.12) ограничено величиной

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i_1 i_2,0}^{[2,n]}(x)| + \delta_n C A_{k-1}^{[2,n]},$$

где C — независимая от n постоянная. С другой стороны, B_1 и B_2 можно оценить неравенством (4.20) леммы 3, которую докажем в дальнейшем. Таким образом, видим, что существует независимая от n постоянная $C_2 = C_2(\tau)$, такая что

$$A_k^{[2,n]} \leq (1+\delta_n C_2) A_{k-1}^{[2,n]} + \delta_n C_2 \qquad \text{для} \quad k \leq \frac{\tau_+}{\delta_n}. \qquad (4.15)$$

Напомним, что в силу условий (2.14) и (2.16) и определений (3.1) и (3.5) (см. также (2.4)) $\partial_{x_d}^2 U_0(x)$ и $\partial_{x_d}^2 F(t,x,U)$ непрерывны. Итак, для $k=0$ согласно (3.6) имеем

$$A_0^{[2,n]} = \sum_{i_1,i_2=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i_1 i_2,0}^{[2,n]}(x)| \equiv A_0^{[2]} < \infty, \qquad (4.16)$$

причем $A_0^{[2]}$ не зависит от n. Поэтому аналогично выводу (4.3) из (4.10), из (4.15) и (3.8) получим существование функции $\Phi_2(t)$, удовлетворяющей неравенству (4.4).

Что каскаеся доказательства существования функции $\Phi_3(t)$, дифференцируя по x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} обе части (4.12), имеем

$$w^{[3,n]}_{i_1i_2i_3,k}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\Big(w^{[3,n]}_{i_1i_2i_3,k-1}(\xi(x,y)) - \delta_n \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j}{\partial x_{i_3}} w^{[3,n]}_{i_1i_2j,k-1}(\xi(x,y))\Big)dy +$$

$$+\delta_n \partial_{x_{i_3}}(B_1 + B_2 + B_3), \tag{4.17}$$

где B_1 и B_2 определяются соотношениями (4.13)–(4.14), а

$$B_3 = -\sum_{j=1}^{d}\Big(\frac{\partial V_j(t_k^{[n]},x)}{\partial x_{i_2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[2,n]}_{i_1j,k-1}(\xi(x,y))dy\Big). \tag{4.18}$$

Оценив первое слагаемое правой части (4.17) обычным образом и второе слагаемое $\delta_n\partial_{x_{i_3}}(B_1 + B_2 + B_3)$ неравенством (4.21), которое докажем в дальнейшем, получим

$$A_k^{[3,n]} \le (1+\delta_n C_3)A_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n C_3 \qquad \text{для} \ \ k \le \frac{\tau_+}{\delta_n}, \tag{4.19}$$

где $C_3 = C_3(\tau)$ — независимая от n постоянная.

Так как

$$A_0^{[3,n]} = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |w^{[3,n]}_{i_1i_2i_3,0}(x)| \equiv A_0^{[3]} < \infty,$$

а $A_0^{[3]}$ не зависит от n, аналогично выводу (4.4) из (4.10), из (4.19) и (3.8) выводим существование функции $\Phi_3(t)$, удовлетворяющей (4.5). □

Лемма 3. *Предположим, что предположения теоремы 2 выполнены. Пусть $\tau > 0$, а B_1, B_2 и B_3 — слагаемые, определенные соотношениями (4.13), (4.14) и (4.18) соответственно. Тогда B_1, B_2 и B_3 непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^d$ и существует независимая от n постоянная $C_4 = C_4(\tau)$, такая что при $k \le \frac{\tau_+}{\delta_n}$ имеем для $h = 1, 2, 3$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |B_h| \le C_4(1 + \Phi_1(t_{k-1}^{[n]}) + A_k^{[2,n]}), \tag{4.20}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |\partial_{x_j} B_h| \le C_4(1 + \Phi_1(t_{k-1}^{[n]}) + \Phi_2(t_{k-1}^{[n]}) + A_{k-1}^{[3,n]}), j = 1, \dots, d. \tag{4.21}$$

Доказательство. Сначала напомним, что если функция $\varphi(x)$, определенная в $\mathbb{R}^d$, является непрерывной в $\mathbb{R}^d$ и четной по x_d, обладает непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}$ производными первого и второго порядка, каждая часть которых на $\{x_d > 0\}$ или $\{x_d < 0\}$ непрерывна до границы $\{x_d = 0\}$, и удовлетворяет соотношению

$$\partial_{x_d}\varphi(x', x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

то она обладает непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^d$ производной второго порядка $\partial_{x_d}^2\varphi(x)$. Таким образом, в этом случае все производные первого и второго порядка функции $\varphi(x)$ непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^d$.

С другой стороны, если функция $\varphi(x)$, определенная в $\mathbb{R}^d$, является непрерывной в $\mathbb{R}^d$ и нечетной по x_d, обладает непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}$ производными первого порядка, каждая часть которых на $\{x_d > 0\}$ или $\{x_d < 0\}$ непрерывна до границы $\{x_d = 0\}$, и удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x', 0) = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

то она обладает непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^d$ производной первого порядка $\partial_{x_d}\varphi(x)$ и производные $\partial_{x_j}\varphi(x)$, $j = 1, \cdots, d-1$, также непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим теперь B_1, B_2 и B_3.

$$B_1 = F''_{i_1 i_2, k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + F''_{i_1 U, k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{i_2, k-1}^{[1,n]}(x) + \\ + F''_{U i_2, k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{i_1, k-1}^{[1,n]}(x) + F'_{U, k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{i_1 i_2, k-1}^{[2,n]}(x) + \\ + F''_{UU, k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{i_1, k-1}^{[1,n]}(x) w_{i_2, k-1}^{[1,n]}(x),$$

где $F''_{i_1 i_2, k-1}(x, U) = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U)$и т. д. (аналогично (4.8)–(4.9)). Поэтому в силу условий (2.12) и (2.14) функция B_1 непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяет неравенствам (4.20)–(4.21) для $h = 1$.

Напомним, что

$$B_2 = -\sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{\partial^2 V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w_{j, k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) dy + \\ + \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w_{i_2 j, k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) dy \Big) + \\ + \delta_n \sum_{j,j'=1}^{d} \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial V_{j'}(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w_{jj', k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) dy.$$

Следовательно, из условий (2.8), (2.10) и (2.11) следует, что B_2 также непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяет неравенствам (4.20)–(4.21) для $h = 2$.

Поскольку $B_3(x)$ фактически идентична одному из слагаемых B_2, как показано выше, она также непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяет неравенствам (4.20)–(4.21) для $h = 3$. Лемма доказана. □

5. Сходимость приближенных решений и переход к пределу

На основании соотношения $t_{2k}^{[n+1]} = t_k^{[n]}$ (см. (2.1)–(2.2)) и оценок (4.2), (4.3), (4.4) и (4.5), аналогично предложениям 5.1, 6.1 и 7.1 из [10], справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Предположим, что предположения теоремы 2 выполнены. Пусть $\tau > 0$. Тогда функции $U^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, определенные соотношениями (3.6)–(3.8), и их производные $\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t,x)$ $(i = 1, \cdots, d)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U^{[n]}(t,x)$ $(i, j = 1, \cdots, d)$ сходятся равномерно в $[0, \overline{\tau}] \times \mathbb{R}^d$ к предельной функции $U(t,x)$ и ее производным $\frac{\partial}{\partial x_i}U(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U(t,x)$ соответственно при $n \to \infty$.*

Чтобы показать, что предельная функция удовлетворяет уравнению (3.9), установим справедливость следующей леммы и перейдем к пределу в (5.1).

Лемма 5. *Предположим, что предположения теоремы 2 выполнены. Пусть ε и τ — вещественные числа, такие что $0 < \varepsilon < \tau$. Пусть $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ — функция, определенная соотношениями (3.6)–(3.7). Тогда существует такое число $\overline{n} \in \mathbb{N}$, что, если $\varepsilon \leq t_{k-1}^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau$ и $n \geq \overline{n}$, справедливо соотношение*

$$\frac{U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} = -V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) +$$

$$+ \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-2}^{[n]}, x)) + R, \tag{5.1}$$

где

$$|R| \leq \sqrt{\delta_n} C, \tag{5.2}$$

а C — независимая от n постоянная.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора имеем

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) =$$

$$= U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) - \delta_n V(t_k^{[n]},x)\cdot\nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) - y\cdot\nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}[\delta_n^2 V_i(t_k^{[n]},x)V_j(t_k^{[n]},x) - 2\delta_n V_i(t_k^{[n]},x)y_j + y_iy_j]\frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\frac{1}{6}\sum_{i,j,h=1}^{d}\mu_i\mu_j\mu_h\frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\widetilde{x})}{\partial x_i\partial x_j\partial x_h}, \qquad (5.3)$$

где $\mu_i = -\delta_n V_i - y_i$ (и аналогично для μ_j и μ_h), а $\widetilde{x}$ является точкой между x и $x - \delta_n V(t_k^{[n]},x) - y$.

Используя соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)y_j dy = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)y_iy_j dy = 2\delta_{ij}\delta_n\kappa,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, получим

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)y\cdot\nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)dy = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\big(\delta_n^2 V_i(t_k^{[n]},x)V_j(t_k^{[n]},x) - 2\delta_n V_i(t_k^{[n]},x)y_j + y_iy_j\big)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}\Big]dy =$$
$$= \delta_n\kappa\Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \delta_n^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}V_i(t_k^{[n]},x)V_j(t_k^{[n]},x)\frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i\partial x_j}.$$

С другой стороны, в силу леммы 2 имеем

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(z)\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\frac{1}{6}\sum_{i,j,h=1}^{d}\mu_i\mu_j\mu_h\frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\widetilde{x}+z)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_h}dydz\Big| \le C'\delta_n^{3/2}$$

с независимой от n постоянной C'. Отсюда следует неравенство (5.1) с (5.2). □

Доказательство. (*теоремы 2*). Так как лемма 5 доказана, доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству, изложенному в [1; 9; 10] и [8]. □

Теорема 1 следует из теоремы 2 и леммы 1.

6. Заключение

Для задачи уравнения переноса-диффузии в полупространстве с однородным условием Неймана доказана сходимость приближенных решений ядром теплопроводности. Полученный результат будет использован при исследовании поведения решения уравнения переноса-диффузии, когда коэффициент диффузии стремится к нулю.

Список источников

1. Аоуаоуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. 4-е изд. М. : Физматлит, 2004.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.
4. Фуджита Яшима Х., Айт Махиоут Л. Сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса // Вестник Бурятского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. Т. 2023, № 1. С. 22-–36.
5. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport // Ann. Math. Afr. 2023. Vol. 10. P. 105–124.
6. Desmond J. H., Mao X., Stuart A. M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 2002. Vol. 40, N 3. P. 1041–1063.
7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems, 3$^{\text{rd}}$ Ed. Grundlehren der mathematischen Wissenchafften 260. Berlin, Heidelberg : Springer, 2012.
8. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space // J. Math. Anal. Appl. 2023. Vol. 527, N 2. 127507.
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une generalisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'equation de transport-diffusion // Ann. Math. Afr. 2021. Vol. 9. P. 89–108.
10. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // Ann. Math. Afr. 2020. Vol. 8. P. 53–73.

References

1. Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258. https://10.14498/vsgtu1881 (in Russian)

2. Budak B.M., Samarskii A.A., Tikhonov A.N. *A collection of problems on mathematical physics.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. (in Russian)
3. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Providence, R.I., AMS, 1968. (transl. from Russian)
4. Fujita Yashima H., Ait Mahiout L. Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system. *Bull. Buryat State Univ. Math. Inform.*, 2023, no. 1, pp. 22–36. https://10.18101/2304-5728-2023-1-22-36 (in Russian)
5. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport *Ann. Math. Afr.*, 2023. vol. 10. pp. 105–124.
6. Desmond J.H., Mao X., Stuart A.M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002, vol. 40, no. 3, pp. 1041-1063. DOI: https://doi.org/10.1137/s0036142901389530.
7. Freidlin M.I., Wentzell A.D. Random perturbations of dynamical systems, 3rd Ed. Grundlehren der mathematischen Wissenchafften 260, Berlin, Heidelberg, Springer, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3.
8. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space. *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, vol. 527, no. 2, 127507, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127507.
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une generalisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'equation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, 2021, vol. 9, pp. 89–108.
10. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, 2020, vol. 8, pp. 53–73.

Об авторах

Гердауй Рабах, PhD, Университет Тизи Узу, Тизи Узу, 15000, Алжир, rabah.gherdaoui@ummto.dz, https://orcid.org/0000-0001-9122-3549

Селвадурай Стив, PhD, Университет Турин, Турин, 10124, Италия, steave_selva@yahoo.it, https://orcid.org/0009-0004-9159-4154

Фуджита Яшима Хисао, проф., Высшая нормальная школа Константины, Константина, 25000, Алжир, hisaofujitayashima@yahoo.com, https://orcid.org/0000-0001-9937-8406

About the authors

Rabah Gherdaoui, PhD, Université de Tizi Ouzou, Tizi Ouzou, 15000, Algeria, rabah.gherdaoui@ummto.dz, https://orcid.org/0000-0001-9122-3549

Steave Selvaduray, PhD, Università di Torino, Turin, 10124, Italy, steave_selva@yahoo.it, https://orcid.org/0009-0004-9159-4154

Hisao Fujita Yashima, Prof., École Normale Supérieure de Constantine, Constantine, 25000, Algeria, hisaofujitayashima@yahoo.com, https://orcid.org/0000-0001-9937-8406

Поступила в редакцию / Received 20.10.2023
Поступила после рецензирования / Revised 19.01.2024
Принята к публикации / Accepted 26.01.2024