Серия «Математика»
2024. Т. 48. С. 49—63

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.98
MSC 35D35 35Q99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.49

Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости

Д. О. Цветков[1✉]

[1] Крымский федеральный университет, Симферополь, Российская Федерация
✉ tsvetdo@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о малых движениях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц, а также абстрактных дифференциально-операторных уравнений. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в ортогональной сумме некоторых гильбертовых пространств. С полученным уравнением ассоциируется уравнение с замкнутым оператором. На этой основе найдены достаточные условия существования решения соответствующей задачи.

Ключевые слова: сжимаемая стратифицированная жидкость, начально-краевая задача

Ссылка для цитирования: Цветков Д. О. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48. С. 49–63.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.49

Research article

On an Initial-boundary Value Problem Which Arises in the Dynamics of a Compressible Ideal Stratified Fluid

Denis O. Tsvetkov [1✉]

[1] Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation
✉ tsvetdo@gmail.com

Abstract. In this paper, we investigate the problem on small motions of a compressible ideal stratified fluid in a bounded domain. The problem is studied on the base of approach connected with application of so-called operator matrices theory, as well as abstract differential operator equations. For this purpose, Hilbert spaces and some of their subspaces are introduced. The original initial-boundary value problem reduces to the Cauchy problem for a second-order differential operator equation in the orthogonal sum of some Hilbert spaces. Further, an equation with a closed operator is associated with the resulting equation. On this basis, sufficient conditions for the existence of a solution to the corresponding problem are found.

Keywords: compressible stratified fluid, initial boundary value problem

For citation: Tsvetkov D. O. On an Initial-boundary Value Problem Which Arises in the Dynamics of a Compressible Ideal Stratified Fluid. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 49–63. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.49

Введение

Исследование многих задач гидродинамики идеальной жидкости проводится методами функционального анализа. Не обошлись без внимания и линейные задачи о колебаниях идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости. В серии работ С. А. Габова и его коллег изучались вопросы, касающиеся динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости. Так, в [4; 5] применялся подход, связанный с редукцией на основе потенциальной функции основной векторной системы к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка и последующему его изучению. На основе полученных результатов в работах [6; 7] были установлены некоторые характерные свойства процесса распространения волн в сжимаемой стратифицированной жидкости. Дальнейшее применение данного подхода отражено в работе С. Е. Холодовой [12], где исследовались уравнения динамики сжимаемой идеальной стратифицированной вращающейся жидкости с произвольным распределением стратификации.

В данной работе исследуется задача о малых движениях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Исследование проводится на основе подхода, отличного от упомянутого в работах выше. Он основан на применении теории операторных блок-матриц, действующих в гильбертовом пространстве и позволяющих перейти от исходной начально-краевой задачи к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве [13–17], а также на применении абстрактных дифференциально-операторных уравнений [8; 9; 11]. Методами этих теорий удается установить ряд более общих и тонких результатов.

1. Исследование начально-краевой задачи

Пусть неподвижный контейнер целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, т. е. ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3 по закону $\rho_0 = \rho_0(x_3)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через Ω, а ее границу (твердую стенку) – через $\partial\Omega$. Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ – орт оси Ox_3.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности, когда квадрат частоты плавучести $N^2(x_3)$ Удовлетворяет следующим условиям (см. подробнее [3, с. 94]):

$$0 < N^2_{\min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{\max} < \infty, \tag{1.1}$$
$$N^2(x_3) := N_0^2(x_3) - (g/c)^2, \quad N_0^2(x_3) := -g\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3).$$

Величина c, равная по своему смыслу скорости звука в рассматриваемой системе, является постоянной величиной, т. е. константой, не зависящей от времени и координат. (По поводу допустимости этого предложения для стратифицированных сред см. [3, с. 277].)

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ – отклонение поля давлений от равновесного давления, $\rho = \rho(t,x)$ – отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних массовых сил. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [4]; [3, с. 189–190]):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0'(x_3)u_3 + \rho_0(x_3)\operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u_3 := \vec{u}\cdot\vec{e}_3, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = c^{-2}\,\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0(x_3)\,\frac{N^2(x_3)}{g}\,u_3 \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.4}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \tag{1.5}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad p(0,x) = p^0(x). \tag{1.6}$$

Здесь уравнение (1.2) является по своему смыслу законом сохранения импульса, (1.3) — известное линеаризованное уравнение непрерывности сплошной среды, (1.4) — уравнение состояния жидкости. На границе задано условие непротекания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид (1.5). Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки.

В исходной начально-краевой задаче (1.2) – –(1.6) можно исключить две искомые функции $p(t,x)$, $\rho(x)$ и тем самым свести исходную задачу к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Для этого введем в рассмотрение поле смещений частиц жидкости от их равновесных положений, это поле $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$ связано с полем скоростей соотношением

$$\partial\vec{v}/\partial t = \vec{u}. \tag{1.7}$$

Тогда перепишем исходную задачу (1.2) – –(1.6) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\,\nabla p + \frac{g\rho_0'}{\rho_0}\,v_3\vec{e}_3 + g\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,\vec{e}_3 + \psi_0(t,x) \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.8}$$

$$p = -c^2\,\rho_0(x_3)\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \rho_0(x_3)gv_3 + c^2\psi_1(x) \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.9}$$

$$v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega).$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \tag{1.10}$$

$$\psi_0(t,x) := \vec{f}(t,x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3), \quad \psi_1(x) := f_0(x) - f_1(x),$$

$$f_0(x) = \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x) - \rho_0(x_3)\,\mathrm{div}\,\vec{v}(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$

$$f_1(x) = \rho(0,x) - c^{-2}p(0,x) + \rho_0(x_3)\,N^2(x_3)\,g^{-1}\,\vec{v}(0,x)\,\vec{e}_3.$$

Для перехода к операторной формулировке задачи (1.8) – –(1.10) применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства. Свяжем с функцией $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega \rho_0\,\vec{v}_1(x)\,\vec{v}_2(x)\,d\Omega, \;\; \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega \rho_0\,|\vec{v}(x)|^2\,d\Omega.$$

В силу свойств функции $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ нормы в пространствах $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $\vec{L}_2(\Omega)$ эквивалентны, а значит $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ – гильбертово. Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ [16, с. 118]):

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega,\rho_0),$$

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\, \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega),\; v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega\,)\},$$

$$\vec{G}(\Omega,\rho_0) = \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\, \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla\Phi,\; \int_\Omega \Phi\,d\Omega = 0\,\}.$$

Откуда следует, что $\vec{v}(t,x) \in \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ можно представить в виде

$$\vec{v} = \vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi,\ \ \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \ \rho_0^{-1}\Phi \in \vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Пусть P_0 – ортопроектор на подпространство $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$. Применив к обеим частям (1.8) оператор P_0, будем иметь

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + P_0\Big(N_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big) + P_0\Big(N_0^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\Big) + \\ + P_0\Big(-g\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,\vec{e}_3\Big) = P_0\psi_0.$$

Действуя ортопроектором $P_G = I - P_0$, с учетом (1.9) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right) + P_G\Big(N_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big) + P_G\Big(N_0^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\Big) + \\ + \rho_0^{-1}\nabla(\rho_0(x_3)gw_3) + P_G\Big(-g\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,\vec{e}_3\Big) + \rho_0^{-1}\nabla\left(g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) = \\ - \rho_0^{-1}\nabla\left(c^2\rho_0(x_3)\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right) = P_G\psi_0 - \rho_0^{-1}\nabla(c^2\psi_1(x)) =: P_G F.$$

Введем операторы

$$B_{11}\vec{w} = P_0\Big(N_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big), \quad B_{12}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) = P_0\Big(N_0^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\Big),$$

$$B_{21}\vec{w} = P_G\Big(N_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big), \quad B_{22}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) = P_G\Big(N_0^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\Big).$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ оператор-матрицу, составленную из операторов B_{ij} и действующую в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда

$$(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X}) := \left(\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w} \\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{w} \\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi\end{pmatrix}\right) = \\ = \ldots = \int\limits_\Omega N_0^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3 + \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega \geqslant \\ \geqslant N_{0,\min}^2\cdot\int_\Omega \rho_0(x_3)\,|v_3|^2\,d\Omega \geqslant 0, \quad N_{0,\min}^2 := \min_{x_3} N_0^2(x_3) > 0.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{B}\mathcal{X},\mathcal{X}) \leqslant N_0^2\cdot\int_\Omega \rho_0(x_3)\left|w_3 + \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega \leqslant \\ \leqslant N_0^2\cdot\int_\Omega\rho_0(x_3)\,|\vec{v}|^2\,d\Omega = N_0^2\left(\|\vec{w}\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)}\right) = \\ = N_0^2\cdot\|\mathcal{X}\|^2, \quad N_0^2 := \max_{x_3} N_0^2(x_3) > 0.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{B}$ обладает свойствами:* $0 \leqslant \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$, *где* $\mathcal{L}$ *— пространство ограниченных операторов.*

Введем пространство

$$\vec{H}_A := \left\{ \rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \vec{H}^1(\Omega, \rho_0) \,:\, \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega), \int_\Omega \Phi = 0 \right\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\rho_0^{-1} \nabla \Phi_1, \rho_0^{-1} \nabla \Phi_2)_{\vec{H}_A} := \int_\Omega c^2 \rho_0(x_3) \operatorname{div}(\rho_0^{-1} \nabla \Phi_1) \operatorname{div}(\rho_0^{-1} \nabla \Phi_2)\, d\Omega.$$

Лемма 2. *Пространство $\vec{H}_A$ является гильбертовым, оно компактно вложено в пространство $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(\vec{H}_A, \vec{G}(\Omega, \rho_0))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$, обладает дискретным спектром.*

Для каждого поля $\rho_0^{-1} \nabla \Psi \in \vec{G}(\Omega, \rho_0)$ существует и единственно обобщенное решение задачи

$$-\rho_0^{-1} \nabla \left(c^2 \rho_0(x_3)\, div\, (\rho_0^{-1} \nabla \Phi) \right) = \rho_0^{-1} \nabla \Psi \quad (\textit{в } \Omega),$$
$$\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\textit{на } \partial\Omega), \quad \int_\Omega \Phi d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\rho_0^{-1} \nabla \Phi = A^{-1}(\rho_0^{-1} \nabla \Psi)$.

Более того, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega, \rho_0))$ при $p > 3/2$ и справедлива следующая асимптотическая формула для собственных значений оператора A:

$$\lambda_k(A) = C_A^{-2/3} \cdot k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \to \infty. \tag{1.11}$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, изложенной в лемме 3.2 работы [10]. Покажем, что $\vec{H}_A$ — гильбертово пространство. Рассмотрим задачу

$$L\Phi := -\operatorname{div}\left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) = f \text{ (в } \Omega), \quad B\Phi := \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{n} = b \text{ (на } \partial\Omega). \tag{1.12}$$

Можно проверить, что дифференциальное выражение L правильно эллиптично, а граничное условие B накрывает его (см. [1, с. 222]). Таким образом, задача (1.12) эллиптична, а ее ядро, т. е. решение задачи (1.12) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, как можно проверить, состоит из констант. Из [1, с. 226, лемма 6.3] следует, что существует такая константа $k > 0$, что

$$k^{-1} \|\Phi\|^2_{H^2(\Omega, \rho_0^{-1})} \leqslant \|L\Phi\|^2_{H_A} \leqslant k \|\Phi\|^2_{H^2(\Omega, \rho_0^{-1})}, \quad \Phi \in H^2(\Omega, B), \tag{1.13}$$

$$H^2(\Omega, B) := \left\{ \Phi \in H^2(\Omega, \rho_0^{-1}) \,:\, \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega), \ (\Phi, 1)_{L_2(\Omega)} = 0 \right\}.$$

Из (1.13) для каждого поля $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{H}_A$ выведем следующие неравенства:

$$\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|_A^2 \geqslant k^{-1}c^2\|\Phi\|^2_{H^2(\Omega,\rho_0^{-1})} \geqslant k^{-1}c^2\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{H}^1(\Omega,\rho_0)}, \qquad (1.14)$$
$$\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|_A^2 \leqslant kc^2\|\Phi\|^2_{H^2(\Omega,\rho_0^{-1})} \leqslant kk_1c^2\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{H}^1(\Omega,\rho_0)},$$

где $k_1 > 0$ — некоторая константа. Таким образом, $\vec{H}_A$ – гильбертово пространство.

Пространство $\vec{H}_A$ является плотным множеством в $\vec{G}(\Omega,\rho_0)$. Из неравенства (1.14), с учетом того, что $\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)} \leqslant \|\rho_0^{-1}\nabla\Phi\|^2_{\vec{H}^1(\Omega,\rho_0)}$ для каждого $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{H}^1(\Omega,\rho_0)\cap\vec{G}(\Omega,\rho_0)$, следует, что $\vec{H}_A$ и $\vec{G}(\Omega,\rho_0)$ образуют гильбертову пару $(\vec{H}_A;\vec{G}(\Omega,\rho_0))$.

Найдем порождающий оператор A указанной гильбертовой пары; он определяется из тождества (см. [16, с. 94])

$$(A(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1),\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)} = (\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1,\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2)_{H_A},$$
$$\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \mathcal{D}(A), \quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{H}_A.$$

Для дважды дифференцируемого поля $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1$ с использованием формулы Грина для оператора Лапласа последнее тождество можно преобразовать следующим образом:

$$(A(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1),\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2) = \int_\Omega c^2\rho_0(x_3)\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1)\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2)\,d\Omega =$$
$$= -\int_\Omega \nabla\left(c^2\rho_0(x_3)\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1)\right)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi_2\,d\Omega =$$
$$= \Big(-\rho_0^{-1}\nabla\left(c^2\rho_0(x_3)\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1)\right),\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi_2\Big).$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1$ уравнения $A(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1) = \rho_0^{-1}\nabla\Psi$ является решением задачи

$$-\rho_0^{-1}\nabla\left(c^2\rho_0(x_3)\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1)\right) = \rho_0^{-1}\nabla\Psi \quad (\text{в } \Omega),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \qquad \int_\Omega \Phi_1 = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1 = A^{-1}(\rho_0^{-1}\nabla\Psi)$ для каждого поля $\rho_0^{-1}\nabla\Psi \in \vec{G}(\Omega,\rho_0)$. Из неравенств (1.13) и компактности вложения пространства $\vec{H}^1(\Omega,\rho_0)$ в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ следует, что пространство $\vec{H}_A$ компактно вложено в $\vec{G}(\Omega,\rho_0)$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит, оператор A обладает дискретным спектром. Асимптотическая формула для собственных значений оператора A следует из общих формул из работы [2]. $\square$

Определим операторы

$$A_{22}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)=P_G\Big(-g\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\cdot\vec{e}_3\Big)+\rho_0^{-1}g\,\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right),$$

$$A_{12}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)=P_0\Big(-g\,\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\cdot\vec{e}_3\Big),\quad \mathcal{D}(A_{12})=\mathcal{D}(A_{22})=\vec{H}_A,$$

$$A_{21}\vec{w}=\rho_0^{-1}\nabla\left(\rho_0 g w_3\right),\ \mathcal{D}(A_{21})=\Big\{\vec{w}\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0): w_3=\vec{w}\cdot\vec{e}_3\in H^1(\Omega)\Big\}.$$

С учетом сказанного задачу (1.8) – –(1.10) можно переписать в векторно-матричной форме

$$\frac{d^2\mathcal{X}}{dt^2}+\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}\mathcal{X}=\mathcal{F}(t),\quad \mathcal{X}(0)=\mathcal{X}^0,\quad \mathcal{X}'(0)=\mathcal{X}^1, \tag{1.15}$$

считая, что $\mathcal{X}=\mathcal{X}(t)$ – искомая функция переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}(\Omega,\rho_0)$, где

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi\end{pmatrix},\ \mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}:=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}+A_{12}\\ B_{21}+A_{21} & B_{22}+A_{22}+A\end{pmatrix},\ \mathcal{F}(t)=\begin{pmatrix}P_0\psi_0\\ P_G F\end{pmatrix}.$$

Искомую функцию и все заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Лемма 3. *Оператор $B_{\mathcal{A}}^{+}$ – неотрицателен.*

Доказательство. Используя представления операторов, а также лемму 1, определение (1.1), формулу Грина в виде

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(\vec{a}\,F)\,d\Omega=\int_\Omega\left(F\,\mathrm{div}\,\vec{a}+\vec{a}\,\nabla F\right)\,d\Omega=\int_{\partial\Omega}F\,a_n\,dS,$$

получим

$$\left(B_{\mathcal{A}}^{+}\mathcal{X},\mathcal{X}\right)_{\mathcal{H}}=\int\limits_\Omega N_0^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega-$$

$$-2g\int_\Omega\rho_0\left(w_3+(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,\vec{e}_3\right)\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,d\Omega+c^2\int_\Omega\rho_0\left|\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega=$$

$$=\int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega+$$

$$+\int_\Omega\rho_0(x_3)\left|\frac{g}{c}\,\left(w_3+(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\,\vec{e}_3\right)-c\cdot\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega\geqslant 0.$$

□

Введем вспомогательные операторы:

$$Q := (B_{12} + A_{12})A^{-1/2}, \quad Q^{+} = A^{-1/2}(B_{21} + A_{21}),$$
$$M = A^{-1/2}(B_{22} + A_{22})A^{-1/2}.$$

Лемма 4. *Для операторов Q и M выполнены следующие свойства:*

$$Q \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega,\rho_0), \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)), \quad M \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{G}(\Omega,\rho_0)).$$

Доказательство. I этап. Покажем, что оператор Q ограничен. По определению

$$Q = (B_{12} + A_{12})A^{-1/2} = B_{12}A^{-1/2} + A_{12}A^{-1/2},$$

где первое слагаемое ограничено (и даже компактно) в силу свойств операторов A^{-1} и B_{12} (см. леммы 1 и 2). Докажем, что оператор $A_{12}A^{-1/2}$ ограничен.

Пусть $\rho_0^{-1}\nabla\Phi$ – произвольный элемент из $\mathcal{D}(A_{12}) = \vec{H}_A$, тогда

$$\|A_{12}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\|^2_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} = g^2 \int_\Omega \rho_0(x_3)\left|\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\cdot\vec{e}_3\right|^2 d\Omega \leqslant$$
$$\leqslant \frac{g^2}{c^2}\int_\Omega \rho_0(x_3)\left|\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right|^2 d\Omega = \frac{g^2}{c^2}\left\|A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right\|^2_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)}.$$

Отсюда после замены $A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) = \rho_0^{-1}\nabla\Psi$ следует, что

$$A_{12}A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega,\rho_0), \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)).$$

Таким образом, оператор Q ограничен и справедлива оценка

$$\|Q\| \leqslant \|A^{-1/2}\|\,N_0^2 + g/c.$$

II этап. Рассмотрим оператор

$$M = A^{-1/2}B_{22}A^{-1/2} + A^{-1/2}A_{22}A^{-1/2} = A^{-1/2}(B_{22}A^{-1/2} + A_{22}A^{-1/2}).$$

Для доказательства компактности оператора M достаточно проверить, что оператор $A_{22}A^{-1/2}$ является ограниченным.

Пусть $\rho_0^{-1}\nabla\Phi$ – произвольный элемент из $\mathcal{D}(A_{22}) = \vec{H}_A$, тогда

$$(A_{22}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi), A_{22}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi))_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)} \leqslant 2\cdot g^2\int_\Omega \rho_0\left|\mathrm{div}\,(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\cdot\vec{e}_3\right|^2 d\Omega +$$
$$+ 2\cdot g^2\int_\Omega \rho_0^{-1}\left|\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\right|^2 d\Omega \leqslant 2\,\frac{g^2}{c^2}\left\|A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right\|^2_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)} +$$
$$+ 2g^2\,\|\Phi\|^2_{H^2(\Omega,\rho_0^{-1})} \leqslant 2\,\frac{g^2}{c^2}\left\|A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right\|^2_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)} + 2\frac{g^2k}{c^2}\,\|\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\|^2_A \leqslant$$
$$\leqslant 4\,\frac{g^2}{c^2}\,K\left\|A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)\right\|^2_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)}, \quad K = \max\{1,k\}.$$

Здесь использовалось неравенство (1.14), при этом константа $k>0$ и зависит только от области Ω. После замены $A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi)=\rho_0^{-1}\nabla\Psi$ следует, что $A_{22}A^{-1/2}\in\mathcal{L}(\vec{G}(\Omega,\rho_0))$. □

Лемма 5. *Замыкание оператора $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}$ имеет вид:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & Q\\ Q^{*} & M+I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}})=\Big\{(\vec{w},\rho_0^{-1}\nabla\Phi)^t\ :\ A^{-1/2}Q^{*}\vec{w}+\rho_0^{-1}\nabla\Phi\in\mathcal{D}(A)\Big\}. \tag{1.17}$$

Доказательство. I этап. Непосредственно проверяется, что имеет место следующая факторизация для оператора $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A_a^{1/2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & Q\\ Q^{+} & M+I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+})=\Big\{(\vec{w},\rho_0^{-1}\nabla\Phi)^t\ :\ \rho_0^{-1}\nabla\Phi\in\mathcal{D}(A),\ \vec{w}\in\mathcal{D}(A_{21})\Big\}.$$

II этап. Для операторов Q и Q^{+} справедливы свойства:

$$Q^{+}\subset Q^{*},\quad Q^{+}=Q^{*}|_{\mathcal{D}(A_{21})},\quad \overline{Q^{+}}=Q^{*}.$$

Действительно, так как для любого $\rho_0^{-1}\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega,\rho_0)$ и $\vec{w}\in\mathcal{D}(A_{21})$ имеем

$$\begin{aligned}(Q(\rho_0^{-1}\nabla\Phi),\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}&=((B_{12}+A_{12})A^{-1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi),\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)}=\\ &=(A^{-1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi),(B_{21}+A_{21})\vec{w})_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)}=\\ &=(\rho_0^{-1}\nabla\Phi,A^{-1/2}(B_{21}+A_{21})\vec{w})_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)}=(\rho_0^{-1}\nabla\Phi_1,Q^{+}\vec{w})_{\vec{G}(\Omega,\rho_0)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Q^{+}\subset Q^{*}$ и $Q^{+}=Q^{*}|_{\mathcal{D}(A_{21})}$. Далее, согласно лемме 4 оператор Q ограничен, а значит, ограничен и оператор Q^{*}. Тогда для любого $\vec{w}\in\mathcal{D}(A_{21})$ имеем следующее неравенство:

$$\|Q^{+}\vec{w}\|=\|Q^{*}\vec{w}\|\leqslant\|Q^{*}\|\cdot\|\vec{w}\|.$$

Откуда следует, что Q^{+} ограничен на $\mathcal{D}(A_{21})$, а потому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q^{*}, т. е. $\overline{Q^{+}}=Q^{*}$.

III этап. Замыкание $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{+}$ состоит в замене в среднем блоке (1.18) оператора Q^{+} на Q^{*}. Действительно, для этого достаточно установить (см. [8, с. 28]), что оператор $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ имеет на отрицательной полуоси хотя бы одну регулярную точку. В связи с этим рассмотрим операторный пучок следующего вида:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}-\lambda I=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11}-\lambda I & Q\\ Q^{*} & M+I-\lambda A^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Применим факторизацию

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

к среднему операторному блоку

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q^* R_\lambda(B_{11}) & I \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} B_{11} - \lambda I & 0 \\ 0 & L(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & R_\lambda(B_{11})Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$$R_\lambda(B_{11}) := (B_{11} - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}B_{11})^{-1},$$
$$L(\lambda) = M + I - \lambda A^{-1} + \lambda^{-1}Q^*(I - \lambda^{-1}B_{11})^{-1}Q.$$

Из положительной определенности оператора $L(\lambda)$ для некоторых $\lambda < 0$ следует, что $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega, \rho_0)$. Отсюда и из представления (1.19) следует, что существует $(\mathcal{B}_{\mathcal{A}} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а значит, оператор $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}})$.

IV этап. Найдем область определения $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}})$ оператора $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Прежде всего, из представления для $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ следует, что $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Далее, должно иметь смысл выражение

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11}\vec{w} + QA^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) \\ Q^*\vec{w} + (M+I)A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) \end{pmatrix},$$

т. е. $Q^*\vec{w} + (M+I)A^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ или

$$A^{-1/2}Q^*\vec{w} + A^{-1/2}MA^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \mathcal{D}(A).$$

Далее, так как $A^{-1/2}MA^{1/2}(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) = A^{-1}(B_{22} + A_{22})(\rho_0^{-1}\nabla\Phi) \in \mathcal{D}(A)$, то из последнего имеем, что $A^{-1/2}Q^*\vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \mathcal{D}(A)$.

Наконец, так как область определения линейного оператора есть линейное множество, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и $A^{-1/2}Q^*\vec{w} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, то $\rho_0^{-1}\nabla\Phi$ также принадлежит $\mathcal{D}(A^{1/2})$. Таким образом, имеем (1.17). □

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2\mathcal{X}(t)}{dt^2} + \mathcal{B}_{\mathcal{A}}\mathcal{X}(t) = \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \quad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1. \quad (1.20)$$

Определение 1. *Назовем функцию $\mathcal{X}(t)$ сильным решением задачи (1.20), если выполнены условия: $\mathcal{X}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}))$; выполнено уравнение и начальные условия из (1.20).*

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\mathcal{X}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}), \quad \mathcal{X}^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mathcal{A}}^{1/2}), \quad \mathcal{F}(t) \in C^1\left(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\right), \tag{1.21}$$

тогда задача Коши (1.20) имеет сильное решение.

Доказательство. Так как операторный коэффициент при искомой функции в уравнении (1.20) не является положительно определенным оператором (что следует из его представления), то данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см. [11, с. 282], [9, с. 133]). В связи с этим перепишем (1.20) в следующем виде:

$$\frac{d^2\mathcal{X}}{dt^2} + \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = \mathcal{F} - \mathcal{R}\mathcal{X}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} := \mathcal{B}_{\mathcal{A}} + \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \operatorname{diag}(I_0; 0),$$

где I_0 — единичный оператор в $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$. В полученном уравнении оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ является самосопряженным и положительно определенным. Поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [8, с. 175–177]). Далее, так как оператор $\mathcal{R}$ ограничен, то возмущенный оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} - \mathcal{R}$, согласно теореме 8.5 из [8, с. 177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда следует, что при выполнении условий (1.21) задача (1.20) имеет единственное сильное решение в смысле определения 1. □

Замечание 1. Возвращаясь по обратным заменам, можно проверить, что

$$\mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{f}(t,x) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)).$$

Отметим также, что если функция $\mathcal{X}(t)$ — сильное решение задачи (1.15), то эта функция есть сильное решение задачи (1.20). Обратное, однако, не всегда верно. Это связано с тем, что при выводе задачи Коши (1.20) осуществлялось замыкание Q^+. Тем самым остается открытым вопрос о том, каким специальным образом выбирать начальные условия исходной начально-краевой задачи, чтобы вернуться от задачи (1.20) к задаче (1.15), а значит, и к (1.2) – (1.6). С другой стороны, особый интерес представляет собой так называемые нормальные колебания данной гидросистемы, которыми принято называть такие решения $\mathcal{X}(t)$ однородного уравнения (1.20), которые зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$. На этом пути задача может быть сведена к некоторому операторному пучку, с помощью которого можно установить характерные свойства процесса распространения волн в сжимаемой стратифицированной жидкости.

Заключение

В данной работе исследуется задача о малых движениях сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости, целиком заполняющей неподвижный контейнер. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства, а также вспомогательные краевые задачи. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве (1.15). Далее с полученным уравнением ассоциируется аналогичное уравнение с замкнутым оператором (1.20). На этой основе найдены достаточные условия существования решения соответствующей задачи.

Список источников

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наукова думка, 1965.
2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений // Сибирский математический журнал. 1979. Т. 20, № 1. С. 3–22.
3. Бреховский Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М. : Наука, 1982.
4. Габов С. А., Малышева Г. Ю., Свешников А. Г. Об одном уравнении составного типа, связанном с колебаниями сжимаемой стратифицированной жидкости // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1171–1180.
5. О некоторых уравнениях, возникающих в динамике вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости / С. А. Габов, Г. Ю. Малышева, А. Г. Свешников, А. К. Шатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 12. С. 1850–1863.
6. Габов С. А., Оразов Б. Б., Свешников А. Г. Об одном эволюционном уравнении четвертого порядка, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 19–25.
7. Габов С. А. Об одном эволюционном уравнении, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1037–1040.
8. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев : Вища школа, 1989.
9. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений жифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970.
10. Закора Д. А. Операторный подход к задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН. 2018. Т. 64, № 3. С. 459–489. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-3-459-489
11. Операторные методы в прикладной математике. Т. 2. Основные курсы / Н. Д. Копачевский, Т. Я. Азизов, Д. А. Закора, Д. О. Цветков. Симферополь : ИТ. АРИАЛ, 2022. URL:

12. Холодова С. Е. Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 2101–2109.
13. Фордук К. В. Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 103–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103
14. Цветков Д. О. Малые движения системы идеальных стратифицированных жидкостей, полностью покрытой крошеным льдом // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 105–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.105
15. Цветков Д. О. Колебания стратифицированной жидкости,частично покрытой крошеным льдом // Известия вузов. Математика. 2018. № 12. С. 70–85.
16. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel ; Boston ; Berlin : Birkhauser, 2001. URL:
17. Tsvetkov D. O. Oscillations of a liquid partially covered with ice // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. Vol. 42, N 5. C. 1078–1093. https://doi.org/10.1134/S199508022105019X

References

1. Berezanskiy Yu.M. *Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators.* Kiev, Naukova Dumka Publ., 1965. (in Russian)
2. Birman M.Sh., Solomyak M.Z. Asymptotics of the spectrum of differential equations. *J. Soviet Math.*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 247–283. https://doi.org/10.1007/BF00976125
3. Brekhovsky L.M., Goncharov V.V. *Introduction to continuum mechanics.* Moscow, Nauka Publ., 1982. (in Russian)
4. Gabov S.A., Malysheva G.Yu., Sveshnikov A.G. An equation of composite type connected with oscillations of a compressible stratified fluid. *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 7, pp. 1171–1180. (in Russian)
5. Gabov S.A., Malysheva G.Yu., Sveshnikov A.G., Shatov A.K. Some equations that arise in the dynamics of a rotating, stratified and compressible fluid. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 6, pp. 162–170.
6. Gabov S.A., Orazov B.B., Sveshnikov A.G. A fourth-order evolution equation encountered in underwater acoustics of a stratified fluid. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 19–25. (in Russian)
7. Gabov S.A. On an evolution equation arising in the hydroacoustics of a stratified fluid. *Sov. Math., Dokl.*, 1986, vol. 33, pp. 464–467.
8. Goldstein J.A. *Semigroups of linear operators and applications.* New York, Oxford University Press, 1989.
9. Daletsky Yu.L., Krein M.G. *Stability of solutions of differential equations in a Banach space.* Moscow, Nauka Publ.,1970. (in Russian)
10. Zakora D.A. Operator approach to the problem on small motions of an ideal relaxing fluid. *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 236, no. 6, pp. 773–804. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05968-9
11. Kopachevsky N.D., Azizov T.Ya., Zakora D.A., Tsvetkov D.O. *Operator methods in applied mathematics. Vol. 2.* Simferopol, 2022. (in Russian)

12. Kholodova S.E. Wave motions in a compressible stratified rotating fluid. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2007, vol. 47, pp. 2014–2022. https://doi.org/10.1134/S0965542507120111
13. Forduk K.V. Oscillations of a system of rigid bodies partially filled with viscous fluids under the action of an elastic damping device. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 103–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103 (in Russian)
14. Tsvetkov D.O. Small movements of a system of ideal stratified fluids completely covered with crumbled ice. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2018, vol. 26, pp. 105–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.105 (in Russian)
15. Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified liquid partially covered by crumpling ice. *Russian Math.*, 2018, vol. 62, pp. 59–73. https://doi.org/10.3103/S1066369X18120058
16. Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid.* Basel, Boston, Berlin, Birkhauser, 2001.
17. Tsvetkov D.O. Oscillations of a liquid partially covered with ice. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2021, vol. 42, no. 5, pp. 1078–1093. https://doi.org/10.1134/S199508022105019X

Об авторах

Цветков Денис Олегович, канд. физ.-мат. наук, доц., Крымский федеральный университет, Физико-технический институт, Симферополь, 295000, Российская Федерация, tsvetdo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1068-0102

About the authors

Denis O. Tsvetkov, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Crimean Federal University, Institute of Physics and Technology, Simferopol, 295000, Russian Federation, tsvetdo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1068-0102

Поступила в редакцию / Received 30.10.2023
Поступила после рецензирования / Revised 24.01.2024
Принята к публикации / Accepted 05.02.2024