Серия «Математика»
2024. Т. 48. С. 21—33

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49J15, 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.21

Параметрическая трансформация квадратичного функционала в линейной системе управления

В. А. Срочко[1], Е. В. Аксенюшкина[2]✉

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
[2] Байкальский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ aks.ev@mail.ru

Аннотация. Рассматривается линейно-квадратичная задача на множестве кусочно-линейных управлений. Критерий качества управления определяется знаконеопределенными матрицами и содержит управляющие параметры при квадратичных формах. Предлагается процедура поиска параметров на основе задачи минимизации функции обусловленности общей матрицы квадратичной формы с ограничением в форме условия ее знакоопределенности. В результате такой регуляризации исходная целевая функция многоэкстремальной структуры приобретает свойство сильной выпуклости или вогнутости со всеми позитивными последствиями в плане эффективного решения соответствующих задач оптимизации. Приведен иллюстративный пример, демонстрирующий аналитическое решение параметрической задачи.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача с параметрами, спектральное число обусловленности, оптимизация параметров

Ссылка для цитирования: Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметрическая трансформация квадратичного функционала в линейной системе управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48. С. 21–33.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.21

Research article

Parametric Transformation of a Quadratic Functional in a Linear Control System

Vladimir A. Srochko[1], Elena V. Aksenyushkina[2]✉

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
[2] Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ aks.ev@mail.ru

Abstract. A linear-quadratic problem on a set of piecewise linear controls is considered. The control quality criterion is determined by indefinite matrices and contains control parameters for quadratic forms. A procedure for searching parameters based on the problem of minimizing the condition function of a general matrix of quadratic form with a restriction in the form of the condition of its sign definiteness. As a result of such regularization, the initial objective function acquires the property of strong convexity or concavity with all the positive consequences in terms of the effective solution of the corresponding optimization problems. An illustrative example is given that demonstrates the analytical solution of a parametric problem.

Keywords: linear-quadratic problem with parameters, spectral condition number, optimization of parameters

For citation: Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. Parametric Transformation of a Quadratic Functional in a Linear Control System. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 21–33. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.21

1. Введение

Линейно-квадратичные задачи оптимального управления имеют вариативный характер по части целевого функционала, который может содержать разноплановые и знаконеопределенные квадратичные формы относительно фазовых и управляющих переменных. Это приводит к невыпуклым экстремальным задачам, глобальное решение которых носит, вообще говоря, проблематичный характер. Однако тот же функционал после параметризации и обоснованного выбора параметров приобретает благоприятное свойство выпуклости вместе с возможностью эффективного решения соответствующей задачи. Необходимым элементом такой трансформации является параметризация множества допустимых управлений: ступенчатые или кусочно-линейные функции на заданной сетке узлов по времени. Эволюцию такого подхода к программному решению линейно-квадратичных задач отражают публикации [1; 2; 7; 8; 10] вместе с характеризацией альтернативных результатов [4; 5; 9].

В данной статье предлагается еще один шаг в этом направлении. На множестве параметров, которые обеспечивают сильную выпуклость целевой функции, формулируется задача минимизации спектрального числа обусловленности матрицы квадратичной формы, определяющей конечномерный вариант исходной задачи управления. Как известно, это число выражается как отношение экстремальных собственных значений

(λ_{max} и λ_{min}) порождающей матрицы и характеризует ее вычислительное качество в смысле устойчивого и эффективного решения сопутствующих задач. В данном случае это задача на минимум соответствующей квадратичной формы. Предлагаемая спектральная задача параметрической оптимизации обеспечивает относительно хорошую обусловленность для матрицы квадратичной формы при условии ее положительной определенности ($cond(\cdot) \to \min,\ \lambda_{min} > 0$). Получена оценка сверху для функции обусловленности, что приводит к упрощенной задаче на минимум дробно-линейной функции.

Представленные задачи параметрической оптимизации, вообще говоря, следует решать в приближенном варианте на основе приемлемой процедуры упорядоченного перебора значений целевой функции на допустимой сетке параметров. Тем не менее приведен иллюстративный пример, который демонстрирует возможность аналитического решения спектральных задач.

Аналогичным образом реализуется переход к сильно вогнутой функции. Остается отметить, что после параметрической регуляризации целевой функции $\phi(z)$ и конкретизации допустимого множества Z соответствующие задачи приобретают возможность эффективного численного решения на основе известных методов и стандартных программных комплексов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления в следующей постановке:

$$\Phi(u) = \alpha\langle x(T), Cx(T)\rangle +$$

$$+\int_{t_0}^{T} (\beta\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \gamma\langle u(t), P(t)u(t)\rangle)dt \to min,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = 0, \tag{2.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.2}$$

Здесь $u(t) - (r \times 1)$, $x(t) - (n \times 1)$ вектор-функции (управление и состояние), матрицы квадратичных форм симметричны, матричные функции $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$, множество $U \subset R^r$ выпукло и компактно (стандарт: r-мерный параллелепипед).

Подчеркнем, что матрицы квадратичных форм в функционале $\Phi(u)$ являются, вообще говоря, знаконеопределенными (нестандартаная ситуация). Тем не менее знакоопределенность той или иной матрицы является допустимой и даже приоритетной (например, выпукло-вогнутая структура функционала по квадратичным формам).

Обратим внимание на параметры α, β, γ в выражении для $\Phi(u)$ (весовые коэффициенты), которые естественно положительны и отражают возможность воздействия на функционал с определенными целями. Отметим также, что нулевое начальное состояние фазовой системы (2.1) выбрано для упрощения сопутствующих выкладок без потери сущности результатов.

Проведем описание множества допустимых управлений. Введем на отрезке $[t_0, T]$ сетку узлов $\{t_0,\, t_1,\, ...,\, t_m,\, t_{m+1} = T\}$ с условием $t_{j-1} < t_j$ и выделим промежутки

$$T_0 = [t_0, t_1], \quad T_j = [t_{j-1}, t_{j+1}],\ j = \overline{1, m}, \quad T_{m+1} = [t_m, t_{m+1}].$$

Определим на $[t_0, T]$ базисные функции кусочно-линейной структуры

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}, & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases} \qquad \varphi_{m+1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin T_{m+1}, \\ \frac{t - t_m}{t_{m+1} - t_m}, & t \in T_{m+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & t \notin T_j, \end{cases} \qquad j = \overline{1, m}.$$

Отметим область значений

$$\varphi_j(t) \in [0, 1], \qquad \varphi_j(t_i) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad i, j = \overline{0, m+1}$$

и взаимосвязь “несоседних” функций

$$\varphi_j(t)\varphi_k(t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \ \ |j - k| > 1.$$

Введем набор r-мерных векторов $z^j = (z_{1j},\, ...,\, z_{rj})$, $j = \overline{0, m+1}$ и образуем их прямую сумму — вектор $z = (z^0,\, z^1,\, ...,\, z^m,\, z^{m+1})$ размерности $(m+2)r$. Определим множество

$$Z = \{z = (z^0,\, z^1,\, ...,\, z^m,\, z^{m+1}) : \ z^j \in U, \ \ j = \overline{0, m+1}\},$$

которое является выпуклым и компактным.

Для $z \in Z$ сформируем управление

$$u(t, z) = \sum_{j=0}^{m+1} \varphi_j(t) z^j, \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.3}$$

Это кусочно-линейная вектор-функция на заданной сетке со значениями z^i в узловых точках $t_i : u(t_i, z) = z^i,\ i = \overline{0, m+1}$.

При этом управление $u(t, z)$ удовлетворяет ограничению (2.2) с выпуклым множеством U.

Подведем итог. Вектор-функцию $u(t, z)$ назовем допустимым управлением. Задача оптимизации может быть представлена следующим образом:

$$\Phi(u) \to \min, \quad u \in \{u(t, z),\ z \in Z\}. \tag{2.4}$$

Проведем преобразование задачи оптимального управления (2.4) в конечномерный формат относительно переменной z.

3. Конечномерное описание задачи

Управление $u(t, z)$ порождает фазовую траекторию $x(t, z)$ в силу системы

$$\dot{x}(t, z) = A(t)x(t, z) + B(t)u(t, z), \quad x(t_0, z) = 0.$$

Для $j = \overline{0, m+1}$ определим $(n \times r)$ матричную функцию $X_j(t)$ согласно уравнению

$$\dot{X}_j(t) = A(t)X_j(t) + B(t)\varphi_j(t), \quad X_j(t_0) = O.$$

Тогда траектория $x(t, z)$ выражается по формуле

$$x(t, z) = \sum_{j=0}^{m+1} X_j(t)z^j, \quad t \in [t_0, T],$$

которая проверяется непосредственным дифференцированием.

Далее действуем по аналогии со схемой преобразований из [8].

Рассмотрим функционал $\Phi(u)$ на процессе $\{u(t, z), x(t, z)\}$.

Для $j, k = \overline{0, m+1}$ введем обозначения

$$C_{jk} = X_j^{\mathsf{T}}(T)CX_k(T), \quad Q_{jk} = \int_{t_0}^{T} X_j^{\mathsf{T}}(t)Q(t)X_k(t)dt,$$

$$P_{jk} = \int_{t_0}^{T} P(t)\varphi_j(t)\varphi_k(t)dt, \quad |j - k| \le 1.$$

Это симметричные матрицы порядка r. Матрицы C_{jk}, Q_{jk} объединим в блочные конструкции

$$C_b = [C_{jk}], \quad Q_b = [Q_{jk}], \quad j, k = \overline{0, m+1}.$$

Это блочные матрицы порядка $(m+2)r$, которые с учетом правила блочного транспонирования являются симметричными:

$$C_b^{\mathsf{T}} = [C_{kj}^{\mathsf{T}}] = [C_{jk}] = C_b, \quad Q_b^{\mathsf{T}} = [Q_{kj}^{\mathsf{T}}] = [Q_{jk}] = Q_b.$$

Матрицы P_{jk}, $|j-k| \le 1$ объединим в блочную трехдиагональную матрицу $P_b = [P_{jk}]$, которая также является симметричной:

$$P_b^{\mathsf{T}} = [P_{kj}^{\mathsf{T}}] = [P_{kj}] = [P_{jk}] = P_b.$$

Для блочных векторов $z = (z^0, ..., z^{m+1})$, $y = (y^0, ..., y^{m+1})$ обозначим операцию скалярного произведения

$$\langle\langle z, y \rangle\rangle = \sum_{j=0}^{m+1} \langle z^j, y^j \rangle.$$

Тогда квадратичная форма с матрицей $C_b = [C_{jk}]$ выражается привычным образом:

$$\langle\langle z, C_b z \rangle\rangle = \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \langle z^j, C_{jk} z^k \rangle.$$

Введенные конструкции дают возможность представить функционал Φ в задаче (2.4) через вектор управляющих переменных z :

$$\Phi(u(\cdot, z)) = \langle\langle z, [\alpha C_b + \beta Q_b + \gamma P_b] z \rangle\rangle.$$

Обозначим матрицу

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha C_b + \beta Q_b + \gamma P_b$$

и сформулируем задачу (2.4) в конечномерном варианте

$$\phi(z) = \langle\langle z, S(\alpha, \beta, \gamma) z \rangle\rangle \to \min, \quad z \in Z. \tag{3.1}$$

4. Параметрическая регуляризация задачи

Перейдем к выбору параметров α, β, γ с целью обеспечить задаче (3.1) «хорошие» признаки в плане численного решения. В первую очередь это свойство выпуклости или вогнутости для целевой функции $\phi(z)$. Соответствующие условия на параметры оформим через экстремальные собственные значения $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ блочных матриц.

Свойство сильной выпуклости квадратичной функции $\phi(z)$ эквивалентно спектральному неравенству

$$\lambda_{min}(S(\alpha, \beta, \gamma)) > 0. \tag{4.1}$$

Используя оценку снизу

$$\lambda_{min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \geq$$
$$\geq \alpha\lambda_{min}(C_b) + \beta\lambda_{min}(Q_b) + \gamma\lambda_{min}(P_b) = s_{min}(\alpha,\beta,\gamma), \qquad (4.2)$$

получаем достаточное условие сильной выпуклости (линейное неравенство)

$$s_{min}(\alpha,\beta,\gamma) > 0. \qquad (4.3)$$

Аналогичным образом реализуется свойство сильной вогнутости функции $\phi(z)$:

– спектральное неравенство

$$\lambda_{max}(S(\alpha,\beta,\gamma)) < 0; \qquad (4.4)$$

– оценка сверху

$$\lambda_{max}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \leq$$
$$\leq \alpha\lambda_{max}(C_b) + \beta\lambda_{max}(Q_b) + \gamma\lambda_{max}(P_b) = s_{max}(\alpha,\beta,\gamma); \qquad (4.5)$$

– достаточное условие сильной вогнутости

$$s_{max}(\alpha,\beta,\gamma) < 0. \qquad (4.6)$$

Понятно, что приведенные условия связаны со знакоопределенностью матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$(4.1) \;\Leftrightarrow\; S(\alpha,\beta,\gamma) > 0, \qquad (4.3) \;\Rightarrow\; S(\alpha,\beta,\gamma) > 0;$$
$$(4.4) \;\Leftrightarrow\; S(\alpha,\beta,\gamma) < 0, \qquad (4.6) \;\Rightarrow\; S(\alpha,\beta,\gamma) < 0.$$

Далее отметим, что указанные неравенства выделяют, вообще говоря, некоторые множества параметров α,β,γ, обеспечивающих желательные свойства целевой функции. Отсюда возникает необходимость использовать эту множественность в рамках дополнительной оптимизации некоторого критерия качества, связанного с данной ситуацией. Таким критерием может быть число обусловленности матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$, которое характеризует ее вычислительную устойчивость.

Рассмотрим первый вариант, когда работают неравенства (4.1) или (4.2), обеспечивающие матрице $S(\alpha,\beta,\gamma)$ положительную определенность. В этом случае ее спектральное число обусловленности выражается по формуле

$$cond\; S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\lambda_{max}(S(\alpha,\beta,\gamma))}{\lambda_{min}(S(\alpha,\beta,\gamma))}.$$

Отсюда естественно приходим к задаче минимизации по параметрам

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \to min, \quad \lambda_{min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) > 0. \tag{4.7}$$

Возможно упрощение задачи (линеаризация). Используя неравенства (4.2), (4.5), получаем оценку сверху

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \le \frac{s_{max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{min}(\alpha,\beta,\gamma)}.$$

В результате возникает параметрическая задача на минимум дробно-линейной функции при линейном условии

$$\frac{s_{max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{min}(\alpha,\beta,\gamma)} \to min, \quad s_{min}(\alpha,\beta,\gamma) > 0. \tag{4.8}$$

Таким образом, полученные задачи оптимизации по параметрам обеспечивают для квадратичной функции $\phi(z)$ из (3.1) свойство сильной выпуклости при условии относительно хорошей обусловленности матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$ квадратичной формы.

Приближенное решение предлагаемых задач можно проводить, например, в рамках дискретного перебора значений целевых функций на допустимой сетке $\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$ параметров с некоторым условием нормировки (например, $\gamma_k = 1$).

В конкретных задачах целесообразно находить некоторые соотношения между параметрами, которые решают задачу оптимизации либо обеспечивают уменьшение целевой функции (см. разд. 5).

Рассмотрим второй вариант, когда выполняются неравенства (4.4) или (4.6), т. е. матрица $S(\alpha,\beta,\gamma)$ является отрицательно определенной. В этом случае проще всего перейти к матрице $(-S)$ и реализовать для нее предыдущие соотношения с учетом очевидной взаимосвязи

$$cond\ (-S) = cond\ S, \quad \lambda_i(-S) = -\lambda_i(S).$$

Подведем итог. В результате предлагаемой параметрической регуляризации целевой функции $\phi(z)$ задача (3.1) приобретает позитивную структуру в плане глобального решения (минимизация сильно выпуклой или сильно вогнутой квадратичной функции с хорошей обусловленностью на выпуклом множестве).

Проведем конкретизацию задачи (3.1) по части допустимого множества Z. Рассмотрим тот стандартный случай, когда в исходной задаче область управления U — r-мерный параллелепипед. Соответствующее множество Z имеет аналогичную структуру: двусторонние неравенства по переменным.

Для выпуклого варианта получаем специальную задачу квадратичного программирования, которая решается за конечное число итераций (методы особых точек или сопряженных градиентов [3;6]). Второй вариант приводит к задаче минимизации сильно вогнутой функции $\phi(z)$ на параллелепипеде Z. Ее решение можно проводить на основе теории глобального поиска, ядром которой является известное условие глобальной оптимальности [9]. В качестве альтернативы допустимо использовать подход через угловые точки параллелепипеда: метод линеаризации и процедуры улучшения экстремальных точек [7].

5. Иллюстративный пример

С целью реализации процедуры решения параметрической задачи (4.7) рассмотрим простейшую систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = u(t,z), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0$$

на множестве управлений

$$u(t,z) = z_0(1-t) + z_1 t$$

(частный случай формулы (2.3) для $m = 0,\ r = 1$).

Соответствующие траектории имеют вид

$$x_1(t,z) = \frac{1}{2} z_0 t^2 + \frac{1}{6}(z_1 - z_0)t^3, \quad x_2(t,z) = z_0 t + \frac{1}{2}(z_1 - z_0)t^2.$$

Определим квадратичный функционал с параметрами $\alpha,\ \gamma$:

$$\Phi(u) = 4\alpha(x_2^2(1,z) - 3x_1(1,z)x_2(1,z)) + 3\gamma \int_0^1 u^2(t,z)dt.$$

Структура $\Phi(u)$ и выбор числовых коэффициентов связаны с упрощением ручных вычислений.

Целевая функция конечномерной задачи (3.1) выражается по формуле

$$\phi(z) = -\alpha(z_0^2 + z_0 z_1) + \gamma(z_0^2 + z_0 z_1 + z_1^2).$$

Выделим матрицу квадратичной формы

$$S(\alpha,\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma - \alpha & \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \\ \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0, \ \ \gamma > 0$$

и определим условие ее положительной определенности

$$S(\alpha,\gamma) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0, \ \ \gamma > \alpha.$$

Найдем собственные значения

$$\lambda_{min}(S(\alpha,\gamma)) = \frac{2\gamma - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + (\gamma - \alpha)^2}}{2},$$

$$\lambda_{max}(S(\alpha,\gamma)) = \frac{2\gamma-\alpha+\sqrt{\alpha^2+(\gamma-\alpha)^2}}{2}$$

и сформируем число обусловленности

$$cond\ S(\alpha,\gamma) = \frac{\lambda_{max}(S(\alpha,\gamma))}{\lambda_{min}(S(\alpha,\gamma))}.$$

В результате определяется задача оптимизации по параметрам

$$cond\ S(\alpha,\gamma) \to min, \quad \alpha>0,\ \ \gamma>\alpha. \tag{5.1}$$

Для решения задачи найдем частную производную по γ непосредственным дифференцированием целевой функции

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} cond\ S(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha(\gamma-3\alpha)}{2\sqrt{\alpha^2+(\gamma-\alpha)^2}\,\lambda^2_{min}(S(\alpha,\gamma))}.$$

Отсюда заключаем для $\alpha>0,\ \gamma>\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} cond\ S(\alpha,\gamma)\ \begin{cases} <0, & \gamma<3\alpha,\\ =0, & \gamma=3\alpha,\\ >0, & \gamma>3\alpha.\end{cases}$$

Следовательно, значение $\gamma=3\alpha$ минимизирует функцию обусловленности по переменной γ на множестве $\alpha>0,\ \gamma>\alpha$:

$$cond\ S(\alpha,3\alpha) \le cond\ S(\alpha,\gamma), \quad \alpha>0,\ \gamma>\alpha.$$

Подсчитаем значение

$$cond\ S(\alpha,3\alpha) = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}. \tag{5.2}$$

Оно не зависит от α. Это значит, что соотношение между параметрами $\gamma=3\alpha$ решает задачу оптимизации (5.1) с минимальным значением (5.2), т.е. задача (5.1) имеет множество решений $\{\gamma=3\alpha,\ \alpha>0\}$. При этом итоговая сильно выпуклая функция $\phi(z)$ задачи (3.1) выражается по формуле

$$\phi(z) = \alpha(2z_0^2+2z_0z_1+3z_1^2).$$

Наконец, обратим внимание на величину минимума (5.2). Интересно отметить ее связь с параметром золотого сечения $\tau=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\tau}{\tau-1} = \tau^2 = \tau+1 \approx 2,618.$$

В заключение коротко прокомментируем параметрическую задачу (4.8) на минимум оценки сверху для числа обусловленности. В данном случае эта задача конкретизируется следующим образом:

$$s(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha(\sqrt{2}-1)+3\gamma}{-\alpha(\sqrt{2}+1)+\gamma} \to min, \quad \alpha>0, \quad \gamma>(\sqrt{2}+1)\alpha. \tag{5.3}$$

Частные производные целевой функции в допустимой области знакопостоянны:

$$\frac{\partial s(\alpha,\gamma)}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial s(\alpha,\gamma)}{\partial \gamma} < 0.$$

Отсюда заключаем:

1) функция $s(\alpha,\gamma)$ монотонно возрастает по α, причем $\lim\limits_{\alpha\to 0} s(\alpha,\gamma) = 3$;

2) функция $s(\alpha,\gamma)$ монотонно убывает по γ, причем $\lim\limits_{\gamma\to\infty} s(\alpha,\gamma) = 3$.

В результате получаем стратегию изменения параметров в рамках задачи (5.3): уменьшение α или увеличение γ с ограничением $\alpha > 0,\ \gamma > (\sqrt{2}+1)\alpha$. При этом минимальное значение оценочной функции $s(\alpha,\gamma)$ при $\alpha \to 0$ или $\gamma \to \infty$ равно 3.

6. Заключение

Описанная технология параметрической регуляризации многочленного квадратичного функционала представляется вполне перспективным средством перевода многоэкстремальных задач в разряд выпуклых с последующим применением эффективных методов решения. Подобная параметризация невыпуклых функционалов является вполне реализуемой в процессе постановки задачи или на уровне построения вспомогательных задач численных методов.

Список источников

1. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, вып. 1. С. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115
2. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики Ур О РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 5–16. https://doi.org/ 10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Кн. 1. М. : МЦНМО, 2011. 620 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. Построение программного и позиционного решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1748–1779.
5. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67–84.

6. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 304 с.
7. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 33. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3
8. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметрическая регуляризация линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-линейных управлений // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 57–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.57
9. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск : Наука, 2003. 356 с.
10. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. On Resolution of an Extremum Norm Problem for the Terminal State of a Linear System // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 34. С. 3–17. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.3

References

1. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Regularization procedure for bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model.*Bulletin of St. Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Management processes*, 2022, vol. 18, no. 1, pp. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115 (in Russian)
2. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Solution of a linear-quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parameterization of the functional. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2022, vol. 28, no.3, pp. 5–16. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16 (in Russian)
3. Vasiliev F.P. *Optimization methods: P1.* Moscow, ICNMO Publ., 2011, 620 p. (in Russian)
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Pavlenok N.S. Constructing software and positional solutions to a linear-quadratic optimal control problem. *Journal. calculation. matem. and checkmate. physics*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1748–1779. (in Russian)
5. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V. Development and experience of using the parameterization method in degenerate dynamic optimization problems. *Izvestiya RAS. Theory and control systems*, 2004, no. 5, pp. 67–84. (in Russian)
6. Izmailov A.F., Solodov M.V. *Numerical optimization methods.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 304 p. (in Russian)
7. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V., Antonik V.G. Solution of linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 33, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37 .3 (in Russian)
8. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. Parametric regularization of a linear-quadratic problem on a set of piecewise linear controls. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 57–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.57
9. Strekalovsky A.S. *Elements of nonconvex optimization.* Novosibirsk, Nauka Publ., 2003. 356 p. (in Russian)

10. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. On Resolution of an Extremum Norm Problem for the Terminal State of a Linear System *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 3–17. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.3

Об авторах

Срочко Владимир Андреевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, srochko@math.isu.ru

Аксенюшкина Елена Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц., Байкальский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, aks.ev@mail.ru

About the authors

Vladimir A. Srochko, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, srochko@math.isu.ru

Elena V. Aksenyushkina, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Baikal State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, aks.ev@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 11.01.2024
Поступила после рецензирования / Revised 08.02.2024
Принята к публикации / Accepted 26.02.2024