Серия «Математика»
2024. Т. 47. С. 137—146

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 512.542
MSC 20E25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.137

О прямых произведениях групп диэдра в локально конечных группах

И. А. Тимофеенко[1], **А. А. Шлепкин**[1]✉

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ shlyopkin@gmail.com

Аннотация. Отмечено, что при изучении бесконечных групп, как правило, накладывают некоторые условия конечности (например, требуют, чтобы группа была периодической, группой Шункова, группой Фробениуса, локально конечной группой). Подчеркнуто, что понятие насыщенности позволяет эффективно устанавливать внутреннее строение различных классов бесконечных групп. К настоящему времени получен большой массив результатов о группах, насыщенных различными классами конечных групп. Указано, что еще одним важным направлением в исследованиях групп с условиями насыщенности является изучение групп, насыщенных прямыми произведениями различных групп. Получено значимое продвижение в решении вопроса Б. Амберга и Л. С. Казарина о периодических группах, насыщенных группами диэдра, в классе локально конечных групп. Доказано, что локально конечная группа, насыщенная прямым произведением конечного числа конечных групп диэдра, изоморфна прямому произведению локально циклических групп, умноженных на инволюцию. Также доказано, что локально конечная группа, насыщенная прямым произведением конечного числа конечных групп диэдра, является разрешимой.

Ключевые слова: локально конечная группа, прямое произведение групп, группа диэдра, насыщенность заданным множеством групп

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19–71–10017).

Ссылка для цитирования: Тимофеенко И. А., Шлепкин А. А. О прямых произведениях групп диэдра в локально конечных группах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 137–146.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.137

Research article

On Direct Products of Dihedral Groups in Locally Finite Groups

Ivan A. Timofeenko[1], **Aleksei A. Shlepkin**[1]✉

[1] Siberian federal university, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ shlyopkin@gmail.com

Abstract. When studying infinite groups, as a rule, some finiteness conditions are imposed. For example, they require that the group be periodic, a Shunkov group, a Frobenius group, or a locally finite group. The concept of saturation allows us to effectively establish the internal structure of various classes of infinite groups. To date, a large array of results on groups saturated with various classes of finite groups has been obtained. Another important direction in the study of groups with saturation conditions is the study of groups saturated by direct products of various groups. Significant progress has been made in solving the problem of B. Amberg and L. S. Kazarin on periodic groups saturated with dihedral groups in the class of locally finite groups. It is proved that a locally finite group saturated by the direct product of a finite number of finite groups of a dihedron is isomorphic to the direct product of locally cyclic groups multiplied by an involution. It is also proved that a locally finite group saturated by the direct product of a finite number of finite dihedral groups is solvable.

Keywords: locally finite group, direct product of groups, dihedral group, saturation by a given set of groups

Acknowledgements: The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 19-71-10017).

For citation: Timofeenko I. A., Shlepkin A. A. On Direct Products of Dihedral Groups in Locally Finite Groups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 137–146. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.137

1. Введение

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [6]. Понятие насыщенности позволяет эффективно исследовать группы с условиями конечности, масштабируя известные свойства конечных групп (в том числе конечных простых неабелевых групп) на бесконечные группы [4; 5]. В [1] поставлен вопрос 1 (Л. С. Казарин, Б. Амберг):

Будет ли разрешимой периодическая группа, у которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению d конечных групп диэдра? В случае $d = 1$ это так.

Сформулируем данный вопрос в терминах насыщенности.

Будет ли разрешимой периодическая группа, насыщенная прямыми произведениями d конечных групп диэдра. В случае $d = 1$ это так.

Для случая $d = 1$ ответ на этот вопрос положительный. Отметим, что ограничение на фиксированность d существенно, так как из [3; 10] вытекает существование неразрешимых периодических групп, насыщенных прямыми произведениями d конечных групп диэдра при условии, что d не фиксируется.

Теорема. *Пусть G — локально конечная группа, насыщенная группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{R_1^{(n)} \times \cdots \times R_i^{(n)} \times \cdots \times R_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

d — фиксированное натуральное число, $R_i^{(n)}$ — конечные группы диэдра вида

$$R_i^{(n)} = C_i^{(n)} \leftthreetimes \langle r_i^{(n)} \rangle,$$

$C_i^{(n)}$ — группы без инволюций, $r_i^{(n)}$ — инволюции, для любого $c \in C_i^{(n)}$, $c^{r_i^{(n)}} = c^{-1}$. Тогда

$$G = A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_d,$$

где $A_i = B_i \leftthreetimes \langle v_i \rangle$, B_i — локально циклические группы без инволюций, v_i — инволюции, для любого $b \in B_i, b^{v_i} = b^{-1}$. В частности, G — разрешимая группа.

Частный случай теоремы, когда $d = 2$, доказан [2].

2. Определения, известные факты

Определение 1. *Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.*

Предложение 1. [9, теорема 3]. *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены.*

Предложение 2. [8, теорема 2]. *В бесконечной 2-группе G любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Предложение 3. [7]. *Локально конечная группа с условием минимальности черниковская.*

3. Доказательство теоремы

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Пусть G — контрпример к утверждению теоремы. Тогда $\mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$.

Лемма 1. *G — бесконечная локально конечная группа.*

Доказательство. Действительно, в противном случае по условию теоремы для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$G \simeq (R_1^{(n)} \times \cdots \times R_i^{(n)} \times \cdots \times R_d^{(n)}) \in \mathfrak{M}.$$

Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 2. *Все элементы нечетного порядка группы G порождают абелеву подгруппу C.*

Доказательство. Возьмем два различных элемента нечетного порядка a, b из G. Так как G — локально конечная группа, то $\langle a, b\rangle$ — конечная группа. По условию теоремы $\langle a, b\rangle \leqslant G_{a,b} < G$, где

$$G_{a,b} \simeq (R_1^n \times \cdots \times R_i^n \times \cdots \times R_d^n) \in \mathfrak{M}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где

$$R_i^n = C_i^n \leftthreetimes \langle t_i^n \rangle,$$

C_i^n — группы без инволюций, t_i^n — инволюции, для любого $c \in C_i^n, c^{t_i^n} = c^{-1}$. Тогда

$$G_{a,b} = M_1 \times \cdots \times M_i \times \cdots \times M_d,$$

где $M_i = N_i \leftthreetimes \langle w_i \rangle$, N_i — циклические группы без инволюций, w_i — инволюции, для любого $b \in N_i, b^{w_i} = b^{-1}$. Следовательно,

$$G_{a,b} = (N_1 \leftthreetimes \langle w_1 \rangle) \times \cdots \times (N_i \leftthreetimes \langle w_i \rangle) \times \cdots \times (N_d \leftthreetimes \langle w_d \rangle) =$$

$$= (N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_d) \leftthreetimes (\langle w_1 \rangle \times \cdots \times \langle w_i \rangle \times \cdots \times \langle v_d \rangle).$$

Очевидно, элементы a, b лежат в подгруппе $(N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_d)$, следовательно, перестановочны, так как последняя абелева. В силу произвольности выбора элементов a, b как элементов нечетного порядка группы G получаем, что все элементы нечетного порядка группы G образуют абелеву подгруппу. Обозначим ее через C. □

Зафиксируем группу C из утверждения леммы 2.

Лемма 3. *Для любого $p \in \pi(C)$ p-ранг группы C не более d.*

Доказательство. Предположим, что $p-$ранг C больше d. Тогда в C найдется конечная подгруппа $p-$ранга $d+1$ — $\langle c_1\rangle \times \cdots \times \langle c_d\rangle \times \langle c_{d+1}\rangle$, где $c_1, \cdots, c_d, c_{d+1}$ — элементы порядка p из группы C. По условию теоремы

$$\langle c_1\rangle \times \cdots \times \langle c_d\rangle \times \langle c_{d+1}\rangle \leqslant G_{(c_1,\cdots,c_{(d},c_{d+1})} < G,$$

$$G_{(c_1,\cdots,c_{(d},c_{d+1})} \simeq (R_1^n \times \cdots \times R_i^n \times \cdots \times R_d^n) \in \mathfrak{M}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где

$$R_i^n = C_i^n \leftthreetimes \langle t_i^n\rangle,$$

C_i^n — группы без инволюций, t_i^n — инволюции, для любого $c \in C_i^n, c^{t_i^n} = c^{-1}$. Тогда

$$G_{(c_1,\cdots,c_{(d},c_{d+1})} = M_1 \times \cdots \times M_i \times \cdots \times M_d,$$

где $M_i = N_i \leftthreetimes \langle w_i\rangle$, N_i — циклические группы без инволюций, w_i — инволюции, для любого $b \in N_i, b^{w_i} = b^{-1}$. Следовательно,

$$G_{(c_1,\cdots,c_{(d},c_{d+1})} = (N_1 \leftthreetimes \langle w_1\rangle) \times \cdots \times (N_i \leftthreetimes \langle w_i\rangle) \times \cdots \times (N_d \leftthreetimes \langle w_d\rangle) =$$

$$= (N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_d) \leftthreetimes (\langle w_1\rangle \times \cdots \times \langle w_i\rangle \times \cdots \times \langle w_d\rangle).$$

Очевидно, группа $\langle c_1\rangle \times \cdots \times \langle c_d\rangle \times \langle c_{d+1}\rangle$ является подгруппой группы

$$(N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_d),$$

что невозможно, поскольку p-ранг последней не более d. □

Лемма 4. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

1. *$S = \langle z_1\rangle \times \cdots \times \langle z_i\rangle \times \cdots \times \langle z_d\rangle$, где z_i — инволюции.*
2. *Любая силовская 2-подгруппа группы G сопряжена с S.*
3. *$S < F \in \mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$.*
4. *$F = F_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times F_d$, где $F_i = X_i \leftthreetimes \langle z_i\rangle$, X_i — циклические группы без инволюций, для любого $b \in X_i, b^{z_i} = b^{-1}$.*

Доказательство. Поскольку элементами множества $\mathfrak{M}$ являются конечные группы, то элементами множества $\mathfrak{M}(1)$ также являются конечные группы. По условию теоремы существует подгруппа $F \in \mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$. Следовательно, F – конечная группа и

$$F = F_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times F_d,$$

где $F_i = X_i \leftthreetimes \langle z_i\rangle$, X_i — циклические группы без инволюций, z_i — инволюции, для любого $b \in X_i, b^{z_i} = b^{-1}$. Положим

$$S = \langle z_1\rangle \times \cdots \times \langle z_i\rangle \times \cdots \times \langle z_d\rangle$$

и покажем, что S – силовская 2-подгруппа группы G.

Пусть K — конечная 2-подгруппа группы G. По условию теоремы

$$K < G_K \in \mathfrak{M}_G(K).$$

Следовательно,

$$G_K = (N_1 \leftthreetimes \langle w_1 \rangle) \times \cdots \times (N_i \leftthreetimes \langle w_i \rangle) \times \cdots \times (N_d \leftthreetimes \langle w_d \rangle) =$$

$$= (N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_d) \leftthreetimes (\langle w_1 \rangle \times \cdots \times \langle w_i \rangle \times \cdots \times \langle w_d \rangle),$$

где N_i — циклические группы без инволюций, w_i — инволюции и для любого $d \in N_i, d^{w_i} = d^{-1}$. Можно считать, что

$$S_K = \langle w_1 \rangle \times \cdots \times \langle w_i \rangle \times \cdots \times \langle w_d \rangle -$$

силовская 2-подгруппа G_K, содержащая подгруппу K. В силу произвольности выбора K как конечной 2-подгруппы группы G получаем, что любая конечная 2-подгруппа группы G имеет порядок не более 2^d. По предложению 2 все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены с S(предложение 1).

Утверждения 1, 2 доказаны.

Утверждения 3, 4 имеют место, если F взять из доказательства утверждений 1, 2 приведенного выше. □

Зафиксируем группы S, F, F_i, X_i и инволюции z_i из условия и утверждения леммы 4.

Лемма 5. $G = C \leftthreetimes S$ *– счетная группа.*

Доказательство. Из леммы 3 вытекает, что для любого натурального n число элементов группы C, имеющих порядок не более n, конечно. Следовательно, C — счетная группа. По леммам 2, 4 $G = C \leftthreetimes S$. Из сказанного выше вытекает, что G — счетная группа. □

Лемма 6. *Пусть* $g \in G$. *Тогда* $X_i^g = X_i$ *и* $\forall x \in X_i$, $x^g = x$, *либо* $x^g = x^{-1}$.

Доказательство. Из леммы 5 вытекает, что $g = cs$, где $c \in C$, $s \in S$. По лемме 4 (п. 1)

$$s = z_1^{m_1} \cdot \ \cdots \ \cdot z_i^{m_i} \cdot \ \cdots \ \cdot z_d^{m_d},$$

где $m_i \in \{0, 1\}, z_i^0 = 1, z_i^1 = z_i$. Вычисляем с учетом того, что $x \in B_i$.

$$x^g = x^{cs} = (x^c)^s = x^s = x^{z_1^{m_1} \cdot \ \cdots \ \cdot z_i^{m_i} \cdot \ \cdots \ \cdot z_d^{m_d}} = x^{z_i^{m_i}}.$$

По лемме 4 (п. 3) либо $x^{z_i^{m_i}} = x$, либо $x^{z_i^{m_i}} = x^{-1}$. □

Лемма 7. *Пусть* $X \in \mathfrak{M}_G(F)$ *и* $F < X$. *Тогда имеют место следующие три утверждения:*

$$1.\ X = (H_1 \leftthreetimes \langle z_1 \rangle) \times \cdots \times (H_i \leftthreetimes \langle z_i \rangle) \times \cdots \times (H_d \leftthreetimes \langle z_d \rangle) = \\ = (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes (\langle z_1 \rangle \times \cdots \times \langle z_i \rangle \times \cdots \times \langle z_d \rangle) = \\ = (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes S,$$

где H_i *— циклические группы без инволюций, и для любого* $h \in H_i$, $h^{z_i} = h^{-1}$.

2. $(\langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_i \rangle \times \cdots \times \langle v_d \rangle) = S = (\langle z_1 \rangle \times \cdots \times \langle z_i \rangle \times \cdots \times \langle z_d \rangle)$.

3. $X_i \leq H_i$.

Доказательство. По условию теоремы и лемме 4 (п. 4)

$$X = (H_1 \leftthreetimes \langle v_1 \rangle) \times \cdots \times (H_i \leftthreetimes \langle v_i \rangle) \times \cdots \times (H_d \leftthreetimes \langle v_d \rangle) = \\ = (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes (\langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_i \rangle \times \cdots \times \langle v_d \rangle) = \\ = (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes S,$$

где H_i — циклические группы без инволюций, для любого $h \in H_i, h^{v_i} = h^{-1}$.

По лемме 4 (п.4) для некоторого

$$h \in (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d)$$

$$(\langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_i \rangle \times \cdots \times \langle v_d \rangle)^h =$$

$$(\langle v_1^h \rangle \times \cdots \times \langle v_i^h \rangle \times \cdots \times \langle v_d^h \rangle) = S = (\langle z_1 \rangle \times \cdots \times \langle z_i \rangle \times \cdots \times \langle z_d \rangle).$$

Так как для любого $x \in H_i,\ x^h = x$, то для любого $x \in H_i, x^{v_i^h} = x^{-1}$. Возьмем в качестве инволюций v_i инволюции v_i^h.

Утверждение 2 доказано.

Пусть $\langle b \rangle = X_1$. По лемме 6 для любой инволюции v_i либо $b^{v_i} = b$, либо $b^{v_i} = b^{-1}$. Так как $Z(X) = 1$, то для некоторой инволюции v_{i_1}, $b^{v_{i_1}} = b^{-1}$. Покажем, что в этом случае $X_1 \leq H_{v_i}$. Действительно, в противном случае

$$b = h_1 \cdot \ \cdots \ \cdot h_j \cdot \ \cdots \ \cdot h_i \cdot \ \cdots \ \cdot h_d$$

и для некоторого $j \neq i,\ h_j \neq 1$. Но тогда

$$b^{v_i} = (h_1 \cdot \cdots \cdot h_j \cdot \cdots \cdot h_i \cdot \cdots \cdot h_d)^{v_i} = (h_1^{v_i} \cdot \cdots \cdot h_j^{v_i} \cdot \cdots \cdot h_i^{v_i} \cdot \cdots \cdot h_d^{v_i} =$$

$$= h_1 \cdot \cdots \cdot h_j \cdot \cdots \cdot h_i^{-1} \cdot \cdots \cdot h_d) = b^{-1} = h_1^{-1} \cdot \cdots \cdot h_j^{-1} \cdot \cdots \cdot h_i^{-1} \cdot \cdots \cdot h_d^{-1}.$$

Ввиду утверждения леммы 2 это возможно только в случае, когда для любого $h_l \neq h_i,\ h_l = 1$, в частности $h_j = 1$. Противоречие с тем, что $h_j \neq 1$. Таким образом $b = h_i$. В силу того, что b – образующий группы X_1, получаем, что $X_1 \leq H_{i_1}$. Далее, используя индукцию, показываем, что утверждение 3 имеет место. □

Завершим доказательство теоремы. Ввиду леммы 5

$$G = \{g_1, \ \cdots \ g_n \ \cdots \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть n_1 наименьшее из $\mathbb{N}$ с тем свойством, что $g_{n_1} \notin F$. По условию теоремы

$$\langle F, \ s_{n_1}\rangle < F_1 \in \mathfrak{M}(F).$$

По лемме 7

$$F_1 = (H_1^{(1)} \leftthreetimes \langle t_1^{(1)}\rangle) \times \cdots \times (H_i^{(1)} \leftthreetimes \langle t_i^{(1)}\rangle) \times \cdots \times (H_d^{(1)} \leftthreetimes \langle t_d^{(1)}\rangle) =$$

$$= (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes (\langle t_1^{(1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_i^{(1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_d^{(1)}\rangle) =$$

$$= (H_1 \times \cdots \times H_i \times \cdots \times H_d) \leftthreetimes S,$$

$$(\langle t_1^{(1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_i^{(1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_d^{(1)}\rangle) = S = (\langle z_1\rangle \times \cdots \times \langle z_i\rangle \times \cdots \times \langle z_d\rangle),$$

где H_i — циклические группы без инволюций, для любого $h \in H_i$, $h^{t_i^{(1)}} = h^{-1}$ и

$$X_i \leq H_i^{(1)}.$$

Зафиксируем группу F_1. Передположим, что группа F_l построена. Пусть n_{l+1} наименьшее из $\mathbb{N}$ с тем свойством, что $s_{n_{l+1}} \notin F_l$. По условию теоремы и лемме 7

$$\langle F_l, \ s_{n_{l+1}}\rangle < F_{l+1} \in \mathfrak{M}(1),$$

$$F_{l+1} = (H_1^{(l+1)} \leftthreetimes \langle t_1^{l+1}\rangle) \times \cdots \times (H_i^{(l+1)} \leftthreetimes \langle t_i^{l+1}\rangle) \times \cdots \times (H_d^{(l+1)} \leftthreetimes \langle t_d^{l+1}\rangle) =$$

$$= (H_1^{(l+1)} \times \cdots \times H_i^{(l+1)} \times \cdots \times H_d^{(l+1)}) \leftthreetimes (\langle t_1^{l+1}\rangle \times \cdots \times \langle t_i^{l+1}\rangle \times \cdots \times \langle t_d^{l+1}\rangle) =$$

$$= (H_1^{(l+1)} \times \cdots \times H_i^{(l+1)} \times \cdots \times H_d^{(l+1)}) \leftthreetimes S,$$

где $H_i^{(l+1)}$ — циклические группы без инволюций, для любого $h \in H_i^{(l+1)}$, $h^{t_i^{(l+1)}} = h^{-1}$ и

$$H_i^{(l)} \leq H_i^{(l+1)}.$$

Действуя подобным образом, строим бесконечную последовательность вложенных друг в друга подгрупп группы G:

$$F_1 < F_2 < \ \cdots \ < F_l < F_{l+1} < \ \cdots \ .$$

Ввиду конечности S можно считать, что

$$(\langle t_1^{(l)}\rangle \times \cdots \times \langle t_i^{(l)}\rangle \times \cdots \times \langle t_d^{(l)}\rangle) = (\langle t_1^{(l+1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_i^{(l+1)}\rangle \times \cdots \times \langle t_d^{(l+1)}\rangle)$$

и $t_i^{(l)} = t_i^{(l+1)}$. Положим $v_i = t_i^{(l)}$ По построению

$$G = \cup_{l=1}^{\infty} F_l = (\cup_{l=1}^{\infty} H_1^{(l)} \leftthreetimes \langle v_1\rangle) \times \cdots \times (\cup_{l=1}^{\infty} H_i^{(l)} \leftthreetimes \langle v_i\rangle) \times \cdots \times (\cup_{l=1}^{\infty} H_d^{(l)}) \leftthreetimes \langle v_d\rangle),$$

где $\cup_{l=1}^{\infty} H_i^{(l)}$ — локально циклические группы без инволюций, и для любого $h \in \cup_{l=1}^{\infty} H_i^{(l)}, h^{v_i} = h^{-1}$. Положим $B_i = \cup_{l=1}^{\infty} H_i^{(l)},\ A_i = B_i \leftthreetimes \langle v_i \rangle$. Тогда

$$G = A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_d,$$

где $A_i = B_i \leftthreetimes \langle v_i \rangle$, B_i — локально циклические группы без инволюций, v_i — инволюции, для любого $b \in B_i, b^{v_i} = b^{-1}$. В частности, G — разрешимая группа.

Теорема доказана.

Список источников

1. Белоусов И. Н., Кондратьев А. С., Рожков А. В. XII школа конференция посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 281–285. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-286-295
2. Кухарев А. В., Шлепкин А. А. Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 71–81. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.71
3. Лысёнок И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Известия РАН. Серия: Математика. 1996. Т. 60, № 3. С. 3–224.
4. Шлепкин А. А. Группы с сильно вложенной подгруппой, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. № 31. С. 132–141. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.132
5. Шлепкин А. А., Сабодах И. В. О двух свойствах группы Шункова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. № 35. С. 103–119. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.103
6. Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Математические труды ИМ СО РАН. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
7. Шунков В. П. О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 10, № 2. С. 220-248.
8. Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484-496.
9. Шунков В. П. Об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 603-614.
10. Ivanov S. V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation. 1994. N 4. P. 1–308.

References

1. Belousov I.N., Kondratiev A.S., Rozhkov A.V. XII school conference dedicated to the 65th anniversary of the birth of A.A. Makhneva. *Tr. IMM UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 281–285. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-286-295 (in Russian)

2. Kukharev A.V., Shlepkin A.A. Locally Finite Groups Saturated with Direct Product of Two Finite Dihedral Groups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2023, vol. 44, pp. 71–81. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.71 (in Russian)
3. Lysenok I.G. Infinite Burnside groups of even period. *Izvestiya RAN. Ser. Matematika,* 1996, vol. 60, no. 3, pp. 3–224. (in Russian)
4. Shlepkin A.A. Groups with a Strongly Embedded Subgroup Saturated with Finite Simple Non-abelian Groups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2020, vol. 31, pp. 132–141. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.132
5. Shlepkin A.A., Sabodakh I.V. On Two Properties of Shunkov Groupals. *The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics,* 2021, vol. 35, pp. 103–119. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.103 (in Russian)
6. Shlepkin A.K. On some periodic groups saturated with finite simple subgroups. *Matematicheskie trudy IM SO RAN*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 129–138.
7. Shunkov V.P. On the minimality problem for locally finite groups. *Algebra and Logic,* 1970, vol. 10, no. 2, pp. 220–248. (in Russian)
8. Shunkov V.P. On one class of p-groups *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, no. 4, pp. 484–496. (in Russian)
9. Shunkov V.P. On Abelian subgroups in biprimitively finite groups. *Algebra and Logic*, 1973, vol. 12, no. 5. pp. 603–614. (in Russian)
10. Ivanov S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents. *Int. J. of Algebra and Computation*, 1994, no. 4, pp. 1–308.

Об авторах

Тимофеенко Иван Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, зав. лаб., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, ivan.timofeenko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4996-4674

Шлепкин Алексей Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, shlyopkin@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2241-2842

About the authors

Ivan A. Timofeenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of Laboratory, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, ivan.timofeenko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4996-4674

Aleksei A. Shlepkin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, shlyopkin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2241-2842

Поступила в редакцию / Received 04.10.2023
Поступила после рецензирования / Revised 07.12.2023
Принята к публикации / Accepted 13.12.2023