Серия «Математика»
2024. Т. 47. С. 93—106

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 512.554
MSC 17D99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.93

Автомофизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над областями целостности. I

А. В. Казакова[1✉]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ alvkazakova@gmail.com

Аннотация. Пусть $N\Phi(K)$ – нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей, ассоциированная с системой корней Φ. Исследуется известная задача описания автоморфизмов алгебр и колец Ли $N\Phi(K)$. Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны Y. Cao, D. Jiang, J. Wang (2007 г.). При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т. е. действующих по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца. Для типа A_n описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ над K получил В.М. Левчук (1983 г.). Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ описаны В.М. Левчуком (1990 г.) для типа D_4 над K, а для остальных типов А.В. Литавриным (2017 г.), исключая типы G_2 и F_4. Описываются автоморфизмы нильтреугольного кольца Ли типа G_2 над областью целостности K при следующих ограничениях на K: либо $K = 2K = 3K$, либо $3K = 0$. Для исследования автоморфизмов существенно используются верхние и нижние центральные ряды, описываемые в данной работе.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, кольцо, автоморфизм, гиперцентральный автоморфизм

Ссылка для цитирования: Казакова А. В. Автомофизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над областями целостности. I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 93–106.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.93

Research article

Automophisms of Nil-Triangular Subrings of Algebras Chevalley Type G_2 Over Integral Domain. I

Alyona V. Kazakova[1]✉

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ alvkazakova@gmail.com

Abstract. Let $N\Phi(K)$ be the nil-triangular subalgebra of the Chevalley algebra over an associative commutative ring K with the identity associated with a root system Φ. This paper studies the well-known problem of describing automorphisms of Lie algebras and rings $N\Phi(K)$. Automorphisms of the Lie algebra $N\Phi(K)$ under restrictions $K = 2K = 3K$ on ring K are described by Y. Cao, D. Jiang, J. Wang (2007). When passing from algebras to Lie rings, the group of automorphisms expands. Thus, the subgroup of central automorphisms is extended, i.e. acting modulo the center, ring automorphisms induced by automorphisms of the main ring are added. For the type A_n, a description of automorphisms of Lie rings $N\Phi(K)$ over K was obtained by V.M. Levchuk (1983). Automorphisms of the Lie ring $N\Phi(K)$ are described by V.M. Levchuk (1990) for type D_4 over K, and for other types by A.V. Litavrin (2017), excluding types G_2 and F_4. In this paper we describe automorphisms of a nil-triangular Lie ring of type G_2 over an integrity domain K under the following restrictions on K: either $K = 2K = 3K$, or $3K = 0$. To study automorphisms, the upper and lower central series described in this paper, are essentially used.

Keywords: Chevalley algebra, nil-triangular subalgebra, ring, automorphism, hypercentral automorphism

For citation: Kazakova A. V. Automophisms of Nil-Triangular Subrings of Algebras Chevalley Type G_2 Over Integral Domain. I. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 93–106. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.93

1. Введение

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ евклидова пространства и базисом Шевалле, который составляют подходящий базис подалгебры Картана и вектора e_r, $r \in \Phi$. Подалгебру с базизом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ для системы Φ^+ положительных корней, как и в [4], обозначим через $N\Phi(K)$ и назовём *нильтреугольной*.

Автоморфизмы алгебры $N\Phi(K)$ являются и автоморфизмами множества $N\Phi(K)$, рассматриваемого как кольцо. При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется, поскольку в кольце не обязано сохраняться умножение на скаляр. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т. е. действующих тождественно по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Далее K — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Для типа A_n описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ над K получил В. М. Левчук [4] в 1983 г.; в основном существование нестандартных автоморфизмов здесь зависит от аннулятора в кольце K элемента 2. Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ описаны в [3] для типа D_4 над K, а в [1;6;7] – для остальных типов, исключая типы G_2 и F_4. Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны в 2007 г. в [8].

В статье описываются автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, когда K есть область целостности и $K = 2K = 3K$ или $3K = 0$ — теорема 2. В доказательствах теоремы 2 существенно используется структура центральных рядов кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, которая получена в теореме 1.

2. Центральные ряды и гиперцентральные автоморфизмы

Для описания автоморфизмов колец нам потребуются определённые характеристические идеалы. Аннулятором множества M в произвольном кольце R называем множество

$$Ann_R(M) = \{\alpha \in R \mid M\alpha = \alpha M = 0\}.$$

В произвольном кольце Ли $R = (R, +, *)$, аналогично группам вводят *гиперцентральный* или *верхний* центральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \ldots,$$

$$Z_{i+1} := \{g \in R \mid g * R \subseteq Z_i\} \quad (i \geq 0),$$

и *нижний* центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_n \supseteq \ldots, \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n * R \ \ (n \geq 1).$$

Автоморфизм, действующий тождественно по модулю центра Z_1, называют *центральным.* В 1990 г. в [3] введено обобщение центральных автоморфизмов — гиперцентральные автоморфизмы. Автоморфизм группы или кольца Ли L, единичный по модулю m-го гиперцентра и неединичный по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты* m (кратко — *гиперцентральным*, когда L не совпадает с m-м гиперцентром).

Пусть Φ^+ – множество положительных корней системы Φ, а $\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ – её фундаментальная система простых корней из Φ. Для любого $r \in \Phi$ через $ht(r)$ обозначим высоту корня r. По определению при $r = a_1 r_1 + ... a_l r_l$ полагаем $ht(r) = a_1 + ... a_l$. Согласно теореме о базисе алгебры Шевалле [9, теорема 4.2.1], для произвольных корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \;\; (r + s \in \Phi), \tag{2.1}$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1$, ± 2 или ± 3, причём равенство $N_{r,s} = \pm 3$ возможно только для Φ типа G_2. Выбор знаков $N_{r,s}$ далее зафиксируем в соответствии с [9, с. 211].

В [9] введен *стандартный* центральный ряд алгебры Ли $N\Phi(K)$, где

$$L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$
$$L_i := \langle K e_r \mid r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h - 1).$$

Когда верхний и нижний центральные ряды в $N\Phi(K)$ стандартны, то

$$L_i = \Gamma_i = Z_{h-i} \; (1 \leq i \leq h).$$

Описание верхних и нижних центральных рядов завершено в [1], [7] для классических типов и требуется лишь для типов G_2 и F_4.

Исследуем их для типа G_2. Пусть a, b простые корни для Φ типа G_2, корень a — короткий и $|a| < |b|$. Тогда

$$\Phi^+ = \{a, b, a + b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b\}.$$

Верхние и нижние центральные ряды унипотентной подгруппы U группы Шевалле типа G_2 дает лемма 1 из [2]. Ее доказательство переносится и на случай кольца Ли $NG_2(K)$. Аннулятор элемента t в кольце K обозначаем через Δ_t.

Теорема 1. *Пусть K — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с 1. Для кольца Ли $NG_2(K) = L_1$ верны равенства:*

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 =& L_1 = Z_5;\\
\Gamma_2 =& K e_{a+b} + 2K e_{2a+b} + 3K e_{3a+b} + K e_{3a+2b};\\
\Gamma_3 =& 2K e_{2a+b} + 6K e_{3a+b} + 3K e_{3a+2b};\\
\Gamma_i =& 6L_i, \quad i = 4, 5, 6;\\
Z_1 =& \Delta_2 \Delta_3 \; e_{a+b} + \Delta_3 \; e_{2a+b} + L_5;\\
Z_2 =& \Delta_2 \Delta_3 \; e_a + \Delta_2 \Delta_3 \; e_b + (\Delta_2 + \Delta_3) \; e_{a+b} + \Delta_3 \; e_{2a+b} + L_4;\\
Z_i =& (\Delta_2 + \Delta_3) L_1 + L_{6-i}, \quad i = 3, 4.
\end{aligned}$$

Доказательство. Установим формулы для членов Γ_i, Z_i при $i \geq 1$, используя 2.1 и выбор структурных констант $N_{r,s}$ согласно [9, с. 211].

Так как по определению $\Gamma_1 = N\Phi(K)$ и, очевидно, справедливы включения $6K \subseteq 3K$, $6K \subseteq 2K$, $3K \subseteq K$ и $2K \subseteq K$, то получаем равенства

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 =& \Gamma_1 * \Gamma_1 = K e_{a+b} + 2K e_{2a+b} + 3K e_{3a+b} + K e_{3a+2b} + 3K e_{3a+2b} =\\
&= K e_{a+b} + 2K e_{2a+b} + 3K e_{3a+b} + K e_{3a+2b} + K e_{3a+2b};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_3 =&\Gamma_2 * \Gamma_1 = 2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b} + 6Ke_{3a+2b} + 3Ke_{3a+2b} = \\ &=2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b} + 6Ke_{3a+2b} = \\ &=2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b}.\end{aligned}$$

Аналогично находим остальные члены нижнего центрального ряда:

$$\Gamma_4 = 6Ke_{3a+b} + 6Ke_{3a+2b}; \qquad \Gamma_5 = 6Ke_{3a+2b}; \qquad \Gamma_6 = 0.$$

Построим члены Z_i верхнего центрального ряда при $i \geqslant 1$, используя таблицу умножения 2.1. Будем учитывать, что идеалы $\Delta_2\Delta_3 \subseteq \Delta_2$, $\Delta_2\Delta_3 \subseteq \Delta_3$ и $\Delta_2\Delta_3 \subseteq (\Delta_2 + \Delta_3)$. Несложно получается

$$Z_1 = Z(R) = \Delta_2\Delta_3\ e_{a+b} + \Delta_3\ e_{2a+b} + L_5.$$

Для того чтобы найти Z_2, представим слагаемые идеала Z_1 как произведения элементов Z_2 и кольца R, используя определение члена верхнего центрального ряда:

$$\begin{aligned}\Delta_2\Delta_3\ e_{a+b} &= \Delta_2\Delta_3\ e_a * Ke_b = \Delta_2\Delta_3\ e_b * Ke_a; \\ 2\Delta_3\ e_{2a+b} &= (\Delta_2 + \Delta_3)e_{a+b} * Ke_a = (\Delta_2 + \Delta_3)e_a * Ke_{a+b}; \\ 3Ke_{3a+2b} &= Ke_{2a+b} * Ke_{a+b} = Ke_{a+b} * Ke_{2a+b}; \\ Ke_{3a+2b} &= Ke_{3a+b} * Ke_b = Ke_b * Ke_{3a+b}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $Ke_{3a+b} \nsubseteq Z_1$ и $3Ke_{3a+b} = Ke_{2a+b} * Ke_a$, получаем, что

$$0 = 3\Delta_3\ e_{3a+b} = \Delta_3\ e_{2a+b} * Ke_a = \Delta_3\ e_a * Ke_{2a+b}.$$

Откуда получаем $Z_2 = \Delta_2\Delta_3\ e_a + \Delta_2\Delta_3\ e_b + (\Delta_2+\Delta_3)\ e_{a+b} + \Delta_3\ e_{2a+b} + L_4$.

Опишем идеал Z_3, представив слагаемые идеала Z_2 как произведения элементов Z_3 и кольца R

$$\begin{aligned}(\Delta_2 + \Delta_3)\ e_{a+b} &= (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_a * Ke_b = (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_b * Ke_a; \\ 2\Delta_3\ e_{2a+b} &= (\Delta_2 + \Delta_3)e_{a+b} * Ke_a = (\Delta_2 + \Delta_3)e_a * Ke_{a+b}; \\ 3Ke_{3a+b} &= Ke_{2a+b} * Ke_a = Ke_{2a+b} * Ke_a; \\ 3Ke_{3a+2b} &= Ke_{2a+b} * Ke_{a+b} = Ke_{a+b} * Ke_{2a+b}; \\ Ke_{3a+2b} &= Ke_{3a+b} * Ke_b = Ke_b * Ke_{3a+b}.\end{aligned}$$

Откуда получаем $Z_3 = (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_a + (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_b + (\Delta_2 + \Delta_3)\ e_{a+b} + L_3$. Остальные члены верхнего центрального ряда получаются тривиально. □

Замечание 1. Очевидно, что $\Delta_t = 0$ для произольного элемента $t \in K$, $t \neq 0$, не являющегося делителем нуля в кольце K. Поэтому для области целостности K получаем $\Delta_2 \cdot \Delta_3 = 0$ и формулы в теореме 1 для Z_1 и Z_2 упрощаются.

Следствие 1. *Верхний или нижний центральный ряд кольца Ли $NG_2(K)$ не является стандартным тогда и только тогда, когда $2K \neq K$ или $3K \neq K$.*

3. Некоторые автоморфизмы кольца Ли $NG_2(K)$

По лемме 1 кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождают множества Ke_r $(r \in \Phi^+)$, а при $p(\Phi)!K = K$ – даже Ke_r $(r \in \Pi)$. К основным соотношениям относятся также и соотношения в кольце коэффициентов.

Для автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ полезна (и очевидна)

Лемма 1. *Автоморфизм ϕ аддитивной группы кольца Ли $N\Phi(K)$ есть его автоморфизм тогда и только тогда, когда ϕ сохраняет соотношения:*

$$xe_r + ye_r = (x+y)e_r \ (r \in \Phi^+, \ x, y \in K);$$

$$xe_r * ye_s = xyN_{r,s}e_{r+s} \ (r, s, r+s \in \Phi^+);$$

$$xe_r * ye_s = 0 \ (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+).$$

В алгебре Шевалле типа Φ над K подалгебра $N\Phi(K)$ характеристична относительно каждого *корневого* автоморфизма $x_r(t)$ $(r \in \Phi, t \in K)$ [9, §4.3]. Его ограничение даёт автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$

$$x_r(t) : e_r \to e_r, \quad e_s \to \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}t^i e_{ir+1} \quad (s \in \Phi^+ \backslash \{r\});$$

$$M_{r,s,0} := 1, \quad M_{r,s,i} := (1/i!)N_{r,s}N_{r,r+s} \ldots N_{r,(i-1)r+s}.$$

Все корневые автоморфизмы $x_r(t)$ порождают подгруппу J *внутренних* автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$. Известно, что она изоморфна фактор-группе унипотентной группы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \to \chi(r)e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют любому K-характеру χ решётки корней, т. е. гомоморфизму подгруппы $\langle\Phi\rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [9, §7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Кольцевые автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ выделяем по аналогии с [9]. Произведения внутренних, диагональных, кольцевых и центральных автоморфизмов называют *стандартными* автоморфизмами.

Один нестандартный автоморфизм, известный для Φ типа A_n с 1950-х гг., определён Гиббсом [10] для всех $k \in K$, а для Φ типа G_2 — по правилу

$$\xi(k) : e_a \to e_a, \ e_b \to e_b + ke_{3a+b}, \ e_r \to e_r \ \text{ для остальных } r \in \Phi^+. \quad (3.1)$$

В соответствии с [8] и [5] его называют автоморфизмом Гиббса. Ясно, что при $k \neq 0$ он является гиперцентральным автоморфизмом высоты 2.

Далее мы выделим нестандартный автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 при $t \in K$

$$\begin{aligned} \xi(t): \quad & e_a \to e_a + te_{3a+b}, \quad e_{a+b} \to e_{a+b} + te_{3a+2b}; \\ & e_r \to e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Отображение ξ является автоморфизмом кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным кольцом K.*

Доказательство. Из того, что в кольце $NG_2(K)$ для автоморфизма ξ выполняются обычные свойства линейности $(\alpha x + \beta y)^\xi = \alpha(x)^\xi + \beta(y)^\xi$, следует, что он является линейным преобразованием, под действием которого сохраняется умножение на скаляр. Отсюда и из того, что $NG_2(K)$ по сложению — абелева группа, следует, что отображение ξ — автоморфизм K-модуля кольца $N\Phi(K)$ типа G_2. Проверим соотношения из леммы 1 при $t \in K$.

$$\xi(e_b * e_a) = \xi(N_{b,a}e_{a+b}) = N_{b,a}\xi(e_{a+b}) = N_{b,a}(e_{a+b} + te_{3a+2b});$$

$$\xi(e_b) * \xi(e_a) = e_b * (e_a + te_{3a+b}) = N_{b,a}e_{a+b} + N_{b,3a+b}te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенств

$$(N_{b,a} - N_{b,3a+b})t = 0; \quad N_{b,a} = N_{b,3a+b},$$

инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ — автоморфизм. □

4. Автоморфизмы кольца $NG_2(K)$

Исследуем описание автоморфизмов кольца Ли $NG_2(K)$ или $N\Phi(K)$ типа G_2 над областью целостности K.

Теорема 2. *Пусть K есть область целостности, $2K = K$, и если $charK \neq 3$, то $3K = K$. Тогда произвольный автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 есть произведение стандартного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма высоты 2 вида 3.1, а при $3K = 0$ и гиперцентрального автоморфизма высоты 2 вида 3.2.*

Доказательство. **Случай $6K = K$.** Пусть $R = NG_2(K)$ и $\phi \in AutR$. В силу равенства $6K = K$ кольцо $R = NG_2(K)$ порождается аддитивными подгруппами Ke_a, Ke_b. Поэтому действие ϕ на них определяет автоморфизм ϕ однозначно. Вначале исследуем действие ϕ по модулю R^2. Известно, что степень R^m аддитивно порождают все произведения элементов из R конечной длины $\geq m$ с любыми расстановками скобок. Используя определение 2.1 структурных констант базиса кольца R, находим, что $Ann\ R = Ke_{3a+2b}$.

Лемма 3. *Все идеалы* L_2, L_3, L_4, L_5 *являются характеристическими в кольце* $N\Phi(K)$ *над кольцом* K *при* $6K = K$ *и* $L_m = R^m$.

Из леммы 3 ясно, что характеристичны и централизаторы идеалов L_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, в частности централизатор $C(R^4) = Ke_a + R^2$. Идеал $Ke_b + R^2 = C_{\mod R^5}(R^2) := \{\gamma \in N\Phi(K) \mid \gamma\alpha = 0 \mod R^5 \;\; \forall \alpha \in R^2\}$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и $R^2 = Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mod R^2;$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mod R^2,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ области целостности K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, т. е. выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C_{\mod R^5}(R^2)$, R^2 и двух серий равенств

$$Ke_a + R^2 = C(R^4) = (C(R^4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (R^2)^\phi = K^\sigma e_a + R^2;$$

$$Ke_b + R^2 = C_{\mod R^5}(R^2) = (C_{\mod R^5}(R^2))^\phi = (Ke_b)^\phi + (R^2)^\phi = K^\lambda e_b + R^2.$$

Докажем инъективность σ. Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mod R^2; \qquad (ye_a)^\phi = y^\sigma e_a \mod R^2.$$

Предположим, что $x^\sigma = y^\sigma = c$, тогда

$$(xe_a)^\phi = ce_a + Y_1,\; Y_1 \in R^2; \qquad (ye_a)^\phi = ce_a + Y_2,\; Y_2 \in R^2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in R^2$ и $A = ce_a + Y_1,\; B = ce_a + Y_2$, откуда

$$1)\ (A - B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x - y)e_a;$$

$$2)\ (A - B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in R^2.$$

Учитывая характеристичность R^2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность σ доказана. Аналогичное доказательство для $\lambda \in End\ K^+$. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю R^3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b};$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\lambda \cdot 1^\sigma = K = 1^\lambda \cdot K^\sigma$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K = K^\lambda$, соотношений, указанных выше, и

Лемма 4. *В кольце с 1 для любого $x \in K$ из равенства $xK = K$ следует обратимость в K элемента x.*

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mod R^3;$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mod R^3, \ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, т. е. $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю R^3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mod Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum_{s>r} Ke_s$. Считаем, что $s > r$, если коэффициенты разложения $s - r$ по базе $\Pi(\Phi^+)$ положительны.

Кроме того, $(xe_a)^\phi = xe_a + x^\lambda e_{a+b} + x^{\lambda'} e_{2a+b} + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mod Ann\ R$;

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^\mu e_{a+b} + x^{\mu'} e_{2a+b} + x^{\mu''} e_{3a+b} \mod Ann\ R$$

для некоторых $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu'' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов, используя обратимость элементов $2, 3 \in K$:

$$(xe_a * e_a)^\phi = (-2)x1^\lambda e_{2a+b} + 3x1^{\lambda'} e_{3a+b} + 2x^\lambda e_{2a+b} - 3x^{\lambda'} e_{3a+b}, \quad (4.1)$$

откуда $2x^\lambda = 2x1^\lambda$ и $3x^{\lambda'} = 3x1^{\lambda'}$.

$$(xe_a * e_b)^\phi = (-x)e_{a+b} - 2x1^\mu e_{2a+b} + 3x1^{\mu'} e_{3a+b} \mod Ann\ R;$$
$$(e_a * xe_b)^\phi = (-x)e_{a+b} - 2x^\mu e_{2a+b} + 3x^{\mu'} e_{3a+b} \mod Ann\ R, \quad (4.2)$$

откуда $2x^\mu = 2x1^\mu$ и $3x^{\mu'} = 3x1^{\mu'}$.

$$(xe_b * e_b)^\phi = (x1^{\mu''} - x^{\mu''})e_{3a+2b} + (3x^\mu 1^{\mu'} - 3x^{\mu'} 1^\mu)e_{3a+2b}. \quad (4.3)$$

Аналогично предыдущим случаям $x^{\mu''} = x1^{\mu''}$ для всех $x \in K$. Из 4.1–4.3 следует, что $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \mu'' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ последовательно на внутренние автоморфизмы вида $\chi_b(u)$, $\chi_{a+b}(u)$ получаем

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mod Ann\ R;$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^\mu e_{a+b} + x^{\mu'} e_{2a+b} + x^{\mu''} e_{3a+b} \mod Ann\ R.$$

Откуда $(xe_a * e_b)^\phi = (-x)e_{a+b} - 2x1^\mu e_{2a+b} + 3x1^{\mu'} e_{3a+b} - x^{\lambda''} e_{3a+2b}$, $(e_a * xe_b)^\phi = (-x)e_{a+b} - 2x^\mu e_{2a+b} + 3x^{\mu'} e_{3a+b} - x1^{\lambda''} e_{3a+2b}$. Из чего следует, что $\lambda'' \in End\ K^+$ действует как умножение на скаляр, так как $x^{\lambda''} = x1^{\lambda''}$.

Умножением ϕ последовательно на внутренние автоморфизмы вида $\chi_{2a+b}(u)$, $\chi_a(u)$ и гиперцентральный автоморфизм Гиббса 3.1 получаем $(xe_a)^\phi = xe_a + x^\psi e_{3a+2b}$, $(xe_b)^\phi = xe_b + x^\nu e_{2a+b} + x^{\nu'} e_{3a+2b}$ для некоторых $\psi, \nu, \nu' \in End\ K^+$. Кроме того, $\nu = 0$, так как

$$(xe_{a+b})^\phi = (xe_b)^\phi * (e_a)^\phi = xe_{a+b} - 3x^\nu e_{3a+b};$$

$$0 = (xe_b)^\phi * (xe_{a+b})^\phi = (-3)x^\nu xe_{3a+2b} + (-3)x^\nu xe_{3a+2b} = (-6)x^\nu xe_{3a+2b}.$$

Откуда $-6x^\nu = 0$.

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [11, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b}$, $(1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K)$, $(1+\zeta)(e_r) \to e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a$, $(xe_b)^\phi = xe_b$.

Случай $3K = 0$, $2K = K$. Исследуем произвольный автоморфизм $\phi \in Aut\ R$. Кольцо R порождается аддитивными подгруппами Ke_a, Ke_b и Ke_{3a+b}. Поэтому действие на них характеризует автоморфизм ϕ. Вначале исследуем действие по модулю Z_2 и $Ann\ R$. Находим аннуляторы кольца R и его степени R^2, а также идеал $C_{\bmod Ke_{2a+b}}(L_2)$, где $L_2 = Z_2$ — член верхнего центрального ряда, $Ke_{2a+b} = 2Ke_{2a+b} = \Gamma_3$ — член нижнего центрального ряда:

$$Ann\ R = Ke_{2a+b} + Ke_{3a+2b};$$

$$R^2 = Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + Ke_{3a+2b};$$

$$Ann\ R^2 = Ke_b + Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b};$$

$$C_{\bmod Ke_{2a+b}} Z_2 = Ke_a + Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}.$$

Учитывая характеристичность членов верхнего и нижнего центральных рядов кольца R и характеристичность идеалов $Ann\ R^2$ и $C_{\bmod Ke_{2a+b}} Z_2$ при $x, y, z \in K$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mod Z_2;$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mod Z_2;$$

$$(ze_{3a+b})^\phi = z^\mu e_{3a+b} + z^{\mu'} e_{a+b} \mod Ann\ R$$

для подходящих эндоморфизмов $\sigma, \lambda, \mu, \mu'$ аддитивной группы K^+ области целостности K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R). Сюръективность σ, λ следует из характеристичности идеалов $Ann\ R^2$, $C_{\bmod Ke_{2a+b}} Z_2$, Z_2 и двух серий равенств

$$Ke_a + Z_2 = (C_{\bmod Ke_{2a+b}} Z_2)^\phi = (Ke_a)^\phi + (Z_2)^\phi = K^\sigma e_a + Z_2;$$

$$Ke_b + Z_2 = Ann\ R^2 = (Ann\ R^2)^\phi = (Ke_b)^\phi + (Z_2)^\phi = K^\lambda e_b + Z_2.$$

Отсюда получаем $K^\sigma = K = K^\lambda$ для $\sigma, \lambda \in End\ K^+$. Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается как в случае $6K = K$. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

Из того, что эндоморфизм $\mu' = 0$, так как $0 = 0^\phi = (Ke_a * Ke_{3a+b})^\phi = K^\sigma K^{\mu'} e_{2a+b}$, характеристичности идеалов Z_2 и R^2, а также равенств

$$Ke_{3a+b} + R^2 = Z_2 = (Z_2)^\phi = (Ke_{3a+b})^\phi + (R^2)^\phi = K^\mu e_{3a+b} + R^2,$$

следует сюръективность $\mu \in End\ K^+$, поскольку $K^\mu = K$. Инъективность μ доказывается аналогично инъективности σ, λ. Отсюда $\mu \in Aut\ K^+$.

По модулю $Ann\ R$ верны две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{3a+2b} = (Ke_{3a+2b})^\phi = (Ke_b)^\phi * (1 \cdot e_{3a+b})^\phi = K^\lambda \cdot 1^\mu e_{a+b},$$

откуда $K^\lambda \cdot 1^\sigma = K = 1^\lambda \cdot K^\sigma$ и $K^\lambda \cdot 1^\mu = K = 1^\lambda \cdot K^\mu$. Отсюда вытекает обратимость элементов $1^\sigma, 1^\lambda, 1^\mu$.

С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1^\mu = 1$.

Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт:

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mod Ann\ R;$$

$$(e_b * xe_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mod Ann\ R;$$

$$(xe_b * e_{3a+b})^\phi = (xe_b)^\phi * e_{3a+b}^\phi = x^\lambda \cdot 1^\mu e_{3a+2b};$$

$$(e_b * xe_{3a+b})^\phi = e_b^\phi * (xe_{3a+b})^\phi = 1^\lambda \cdot x^\mu e_{3a+2b}.$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma = x^\mu$ для любого $x \in K$, т. е. $\lambda = \sigma = \mu$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ K$, в силу равенств (по модулю $Ann\ R$):

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

С точностью до умножения ϕ на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$ мы получим, что $\sigma = 1$, откуда ($x \in K$)

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mod Q(r) \quad (r \in \Pi), (xe_{3a+b})^\phi = xe_{3a+b} \mod Ann\ R;$$
$$(xe_s)^\phi = xe_s \mod Q(s) \backslash Ke_{3a+b} \quad \text{для остальных } s \in \Phi^+.$$

Кроме того, $(xe_a)^\phi = xe_a + x^\sigma e_{a+b} + x^{\sigma'} e_{3a+b} \mod Ann\ R$, $(xe_b)^\phi = xe_b + x^\lambda e_{a+b} + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mod Ann\ R$, $(xe_a)^\phi = xe_{3a+b} \mod Ann\ R$ для некоторых $\sigma, \sigma', \lambda, \lambda' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов:

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = x1^\sigma e_{2a+b} + 2x^\sigma e_{2a+b}, \tag{4.4}$$

откуда $x^\sigma = x1^\sigma$;

$$(xe_b * e_b)^\phi = x1^{\lambda'} e_{3a+2b} + 2x^{\lambda'} e_{3a+2b}, \tag{4.5}$$

откуда $x^{\lambda'} = x1^{\lambda'}$;

$$\begin{aligned}(xe_a * e_b)^\phi &= (-x)e_{a+b} + x1^\lambda e_{2a+b} + 2x^{\sigma'} e_{3a+2b};\\ (e_a * xe_b)^\phi &= (-x)e_{a+b} + x^\lambda e_{2a+b} + 2x1^{\sigma'} e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{4.6}$$

откуда $x^\lambda = x1^\lambda$ и $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

Аналогично предыдущим случаям $x^\lambda = x1^\lambda$ и $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$ для всех $x \in K$. Из 4.4-4.6 следует, что $\lambda, \lambda', \sigma, \sigma' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножим ϕ последовательно на внутренние автоморфизмы вида $\chi_b(u)$ и $\chi_a(u)$, затем на гиперцентральные автоморфизмы: Гиббса 3.1 и 3.2 при любых $k \in K$, а также на центральный автоморфизм из [11] вида ($s_i \in K$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$\begin{aligned}(1+\zeta)(s_i) : xe_a &\to xe_a + s_1 e_{2a+b} + s_2 e_{3a+2b};\\ xe_b &\to xe_b + s_3 e_{2a+b} + s_4 e_{3a+2b};\\ xe_{3a+b} &\to xe_{3a+b} + s_5 e_{2a+b} + s_6 e_{3a+2b};\\ xe_r &\to xe_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+,\end{aligned}$$

получим $(xe_a)^\phi = xe_a$, $(ye_b)^\phi = ye_b$, $(ze_{3a+b})^\phi = ze_{3a+b}$. □

5. Заключение

В статье получено описание групп автоморфизмов колец Ли $NG_2(K)$ над областью целостности , за исключением некоторых случаев. Остальные случаи планируется описать в следующей статье. В работе существенным является то, что группа автоморфизмов $NG_2(K)$ при $2K = 3K = K$ кроме стандартных автоморфизмов содержит гиперцентральный автоморфизм 3.1 высоты 2, а при ограничении на K таком, что $3K = 0$, появляются другие гиперцентральные автоморфизмы.

Список источников

1. Левчук В. М., Литаврин А. В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 467–477. URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.040

2. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 141–161.
3. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп Шевалле // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
4. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24, № 4. С. 64–80.
5. Левчук В. М., Литаврин А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов // Вестник СибГАУ. 2016. Т. 17, № 2. С. 324–328.
6. Литаврин А. В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 13, № 3. С. 41–55.
7. Литаврин А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов : дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.06. Красноярск, 2017. 74 с.
8. Cao Y., Jiang D., Wang J. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings // Intern. J. Algebra and Computation. 2007. Vol. 17, N 3. P. 527–555.
9. Carter R. Simple Groups of Lie Type. New York : Wiley and Sons, 1972. 331 p.
10. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, N 2. P. 203–208.
11. Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. The automorphism group of certain radical rings // J. Algebra. 2001. Vol. 243. P. 473–485. https://doi.org/10.1006/jabr.2001.886

References

1. Levchuk V.M., Litavrin A.V. Gipercentral'nye avtomorfizmy nil'treugol'nyh podalgebr algebr Shevalle [Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 467–477. Available at: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.040 (in Russian)
2. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of lie type groups of small ranks. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, pp. 97–112. https://doi.org/10.1007/BF02001355
3. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of chevalley groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, pp. 211–224. https://doi.org/10.1007/BF01979936
4. Levchuk V.M. Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms. *Siberian Mathematical Journal*, 1983, vol. 24, pp. 543–557. https://doi.org/10.1007/BF00969552
5. Levchuk V.M., Litavrin A.V. Automorphisms of nil-triangular subrings in Chevalley algebra of orthogonal type. *Sibirskii Gosudarstvennyi Aerokosmicheskii Universitet imeni Akademika M.F. Reshetneva. Vestnik* 2016, vol. 17, no. 2, pp. 324–328 (in Russian)
6. Litavrin A.V. Avtomorfizmy nil'potentnoj podalgebry $N\Phi(K)$ algebry Shevalle simplekticheskogo tipa [Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ Chevalley algebra of symplectic type]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2015, vol. 13, no. 3, pp. 41–55. (in Russian)
7. Litavrin A.V. Avtomorfizmy nil'treugol'nyh podkolec algebr Shevalle klassicheskih tipov [Automorphisms of nil-triangular subrings of algebras Chevalley of classic

types]. Thesis for: Cand. Sc. (Physics and Mathematics) : 01.01.06. Siberian Federal University, 2017, 74 p. (in Russian)

8. Cao Y., Jiang D., Wang J. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings. *Intern. J. Algebra and Computation,* 2007, vol. 17, no. 3, pp. 527–555.
9. Carter R. *Simple Groups of Lie Type.* New York, Wiley and Sons, 1972. 331 p.
10. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups. *J. Algebra*, 1970, vol. 14, no. 2, pp. 203–228.
11. Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. The automorphism group of certain radical rings. *J. Algebra*, 2001, vol. 243, pp. 473–485. https://doi.org/10.1006/jabr.2001.886

Об авторах

Казакова Алёна Викторовна, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, alvkazakova@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6667-441X

About the authors

Alyona V. Kazakova, Postgraduate, Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, alvkazakova@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6667-441X

Поступила в редакцию / Received 23.10.2023
Поступила после рецензирования / Revised 16.12.2023
Принята к публикации / Accepted 19.01.2024