Серия «Математика»
2024. Т. 47. С. 78—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 510.643
MSC 03B44, 03B42, 03A05, 03B45, 03B70
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.78

Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений $\mathcal{CTLK}$

С. И. Башмаков[1]✉, **К. А. Смелых**[1]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ krauder@mail.ru

Аннотация. Рассматривается многоагентная логика деревьев вычислений — $\mathcal{CTLK}$ (Computation Tree Logic with Knowledge). Каждый агент представляет свой собственный вычислительный маршрут исходной задачи, а каждое новое ветвление возможных вычислительных маршрутов порождает новых агентов. Логика $\mathcal{CTLK}$ представляет собой естественное обогащение языка $\mathcal{CTL}$ дополнительными операторами знания. Предложена реляционная — альтернативная автоматной — семантика логики, описаны свойства $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фреймов, доказана финитная аппроксимируемость.

Ключевые слова: многоагентная логика, ветвящаяся временная логика, реляционная семантика Крипке, метод фильтрации, финитная аппроксимируемость

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Ссылка для цитирования: Башмаков С. И., Смелых К. А. Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений $\mathcal{CTLK}$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 78–92.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.78

Research article

Relational Version of the Multi-agent Computation Tree Logic $\mathcal{CTLK}$

Stepan I. Bashmakov[1✉], **Kirill A. Smelykh**[1]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ krauder@mail.ru

Abstract. This paper deals with multi-agent computation tree logic — $\mathcal{CTLK}$ (Computation Tree Logic with Knowledge). Each agent represents its own computational route of the initial problem, and new branches of possible computational routes spawn new agents. The logic $\mathcal{CTLK}$ is a natural enrichment of $\mathcal{CTL}$ by new knowledge operators. We introduce alternative to automata Kripke's relational semantics, describes properties of $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-frame and proves finite approximability.

Keywords: multi-agent logic, branching temporal logic, Kripke relational semantics, filtration method, finite approximability

Acknowledgements: This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement 075-02-2023-936).

For citation: Bashmakov S. I., Smelykh K. A. Relational Version of the Multi-agent Computation Tree Logic $\mathcal{CTLK}$. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 78–92. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.78

1. Введение

Комбинирование временных логик и логики знания представляет собой мощный инструмент формальной верификации программных систем с несколькими агентами. Оно позволяет моделировать различные сценарии взаимодействия агентов и проверять соответствующие свойства системы, что потенциально позволяет значительно улучшить качество и надежность программного обеспечения [9].

Различные подходы к интерпретации внутренних свойств при моделировании временного процесса и процесса сохранения и передачи данных привели к формированию труднообозримой области исследований [5;6;10]. В [11] приводится классификация таких логик по использованному языку и требованиям к системе, для которой будет использоваться тот или иной представитель класса. Свойства *знаний* в каждой такой системе чутко зависит от этих допущений. Именно широкий прикладной потенциал временных логик знания, определяемых чаще всего при помощи автоматной или реляционной семантики, представляет наибольший интерес для исследования.

Логика деревьев вычислений $\mathcal{CTL}$, как и ветвящаяся временная логика BTL (Branching-time logic) [8], представляет собой разновидность временной логики, используемой для описания систем, в которых вычислительный процесс развивается во времени с возможностью ветвления и выбора альтернативных путей развития. Семантически $\mathcal{CTL}$ обычно описывают при помощи семантики бесконечных недетерминированных автоматов, графически представляющих собой древовидную структуру, каждая отдельная ветвь которой является альтернативной вычислительной возможностью — вычислительным маршрутом. Фактически дерево вычислений представляет собой все возможные способы реализации вычислительного процесса. Для каждой задачи, решение которой характеризуется некоторым деревом вычислений, существует эквивалентная реляционная модель, которая также включает все возможные вычислительные альтернативы и может быть как конечной, так и потенциально бесконечной на каждом маршруте. Логика $\mathcal{CTL}$ позволяет выразить различные свойства системы, например свойства корректности, безопасности и логической эквивалентности. Она используется для формальной верификации программных систем и обеспечения их надежности и безопасности [2].

Пополнение языка логики $\mathcal{CTL}$ операторами знания порождает логику $\mathcal{CTLK}$, которая, как было показано в [9], полностью наследует структуру недетерминированных автоматов, характеризующих $\mathcal{CTL}$, а вычислительные маршруты получают агентную интерпретацию: каждое новое ветвление, возникающее в любой временной момент вычислительного процесса, порождает нового агента. Каждый агент представляет собой держателя собственного вычислительного маршрута внутри модели, т. е. определенной последовательности вычислений. Агент знает только то, что происходит в его временном маршруте, и не имеет доступа к информации, которая доступна другим агентам, за исключением общих участков маршрута. Если возможное число ветвлений модели заранее не определено, число агентов системы может оказаться потенциально счетным.

Нами предложена альтернативная заданной ранее семантике недетерминированных автоматов — реляционная семантика, позволившая характеризовать исследуемую логическую систему $\mathcal{CTLK}^{Rel}$. Описаны и доказаны свойства таких моделей, доказана финитная аппроксимируемость логики.

2. Основные определения

Язык модальной логики $L^{\mathcal{ML}}$ представляет собой набор, включающий в себя множество пропозициональных переменных $Prop$, пропозициональную константу $\perp$, скобки $(,)$, стандартные булевы операции $\vee, \wedge, \to, \neg$ и одноместный модальный оператор общезначимости $\Box$.

Определение 1. *Выражение в языке $L^{\mathcal{ML}}$ называется правильно построенной формулой (сокращено п.п.ф.), если оно построено по следующим правилам:*

- *$p \in Prop$ является п.п.ф.;*
- *если ϕ и ψ — п.п.ф., то $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$, $\phi \vee \psi$, $\neg\phi$ — п.п.ф.;*
- *применение одноместного модального оператора $\Box$ к п.п.ф. образует п.п.ф.*

Оператор возможности $\Diamond$ выразим в языке логики стандартным образом: $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$, константа $\bot$— выражением $\bot := p \wedge \neg p$.

Множество всех правильно построенных формул в языке $L^{\mathcal{ML}}$ обозначим $For(L^{\mathcal{ML}})$.

Определение 2. *Фреймом Крипке F называется пара $F = \langle W, R\rangle$, состоящая из непустого множества W и бинарного отношения R на W. Элементы W называются мирами или состояниями. Если xRy, мы говорим, что y достижим из x или x видит y.*

Определение 3. *Модель M фрейма Крипке F — это пара $M = \langle F, V\rangle$, где V — означивание, т. е. функция, сопоставляющая каждой переменной $p \in Prop$ множество миров в W ($V : Prop \to 2^{|W|}$). Индукцией по сложности формулы определим отношение выполнимости $\langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi$ на произвольном элементе $a \in W$ модели M следующим образом:*

$\langle M, a\rangle \Vdash_V p \quad \Leftrightarrow x \in V(p)$, *для каждого* $p \in Prop$;

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi$ *и* $\langle M, a\rangle \Vdash_V \psi$;

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi$ *или* $\langle M, a\rangle \Vdash_V \psi$;

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \langle M, a\rangle \Vdash_V \varphi$ *влечёт* $\langle M, a\rangle \Vdash_V \psi$;

$\langle M, a\rangle \nVdash_V \bot$

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \Box\varphi \quad \Leftrightarrow \langle M, b\rangle \Vdash_V \varphi\ \forall b \in W\colon aRb$;

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \langle M, a\rangle \nVdash_V \varphi$;

$\langle M, a\rangle \Vdash_V \Diamond\varphi \quad \Leftrightarrow \langle M, b\rangle \Vdash_V \varphi\ \exists b \in W\colon aRb$.

Формула φ истинна на модели $M := \langle F, V\rangle$, если φ выполнима на каждом элементе модели M; φ истинна на фрейме F, если φ истинна на всех моделях $M := \langle F, V\rangle$. Наконец, φ истинна на классе фреймов C, если φ истинна на каждом фрейме $F \in C$.

Определение 4. *Логикой $\mathcal{ML}$ языка $L^{\mathcal{ML}}$ будем называть множество всех $L^{\mathcal{ML}}$-формул, истинных на множестве всех фреймов некоторого ограниченного класса C, т. е.*

$$\mathcal{ML} = \{\varphi \in For(L^{\mathcal{ML}}) : F \Vdash \varphi \forall F \in C\}.$$

Определение 5. *Если* $F = \langle W, R\rangle$ *— фрейм и* $H \subseteq W$, *то*

– *множеством преемников элемента* $b \in W$ *назовем* $H \uparrow W = \{a \in W \mid \exists b \in H : bRa\}$;

– *множеством предшественников элемента* $b \in W$ *назовем* $H \downarrow W = \{a \in W \mid \exists b \in H : aRb\}$.

Определение 6. *Логика* $\mathcal{ML}$ *называется финитно аппроксимируемой (или обладает свойством конечной модели), если существует класс конечных фреймов* C *такой, что*

$$\mathcal{ML} = \{\varphi \in For(L^{\mathcal{ML}}) : \ \forall F \in C \ F \Vdash \varphi\}.$$

3. Реляционная семантика логики $L^{\mathcal{CTLK}^{Rel}}$

Алфавит языка $L^{\mathcal{CTLK}}$ включает счетный набор пропозициональных переменных $Prop = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, скобки $(,)$ стандартные булевы операции, временные операторы $\{AX, EX, AU, EU\}$ и множество одноместных модальных операторов $\{\Box_{\leq}, \Box_1, \ldots, \Box_n, ...\}$.

Определение 7. *Выражение в языке* $L^{\mathcal{CTLK}}$ *называется правильно построенной формулой (сокращено п.п.ф.), если оно построено по следующим правилам:*

– $p \in Prop$ *является п.п.ф.;*

– *если* ϕ *и* ψ *— п.п.ф., то* $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$, $\phi \vee \psi$, $\neg\phi$ *— п.п.ф.;*

– *применение одноместных модальных операторов* $\Box_{\leq}, \Box_1, \ldots, \Box_n, \ldots$ *к п.п.ф. образует п.п.ф.;*

– *применение одноместных временных операторов* EX *и* AX *к п.п.ф. образует п.п.ф.;*

– *если* φ *и* ψ *— п.п.ф., то* $A(\varphi U \psi)$ *и* $E(\varphi U \psi)$ *— п.п.ф.*

Множество правильно построенных формул в языке $L^{\mathcal{CTLK}}$ будем обозначать $For(L^{\mathcal{CTLK}})$ в соответствии с определением 1.

3.1. Семантика Крипке для логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$

Определение 8. $\mathcal{CTLK}^{Rel}$*-фреймом назовём упорядоченный набор*

$$F := \langle W, R_{\leq}, R_1, \ldots, R_n, \ldots\rangle,$$

где

– *W — объединение непустых непересекающихся множеств временных слоев, т. е.*
$W = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} C_t$, $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \emptyset$ если $t_1 \neq t_2$.
Каждый временной слой $C_t \subseteq W$ представляет собой набор всевозможных состояний момента времени t, достижимых из начального момента вычислений $t = 1$;

– *R_i, где $i \in I$ — линейное отношение порядка, задающее последовательность состояний:*

$$\forall a, b \in W : aR_i b \Rightarrow \exists k, j \in \mathbb{N}\,(k \leq j)\ (a \in C_k)\&(b \in C_j);$$

– *$R_\leq$ — отношение частичного порядка на элементах W, задающее временную связь между слоями:*

$$\bigcup_{\forall i\in\mathcal{I}} R_i = R_\leq;\ \ \forall b \in W \exists a \in C_1 : aR_\leq b.$$

Определение 9. *Моделью на $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фрейме F назовём пару $M := \langle F, V\rangle$, где $V : Prop \mapsto 2^W$. Тогда для любого элемента $a \in C_t \subseteq W$, $\forall t \in \mathbb{N}$ истинность формул с модальными операторами задается следующим образом:*

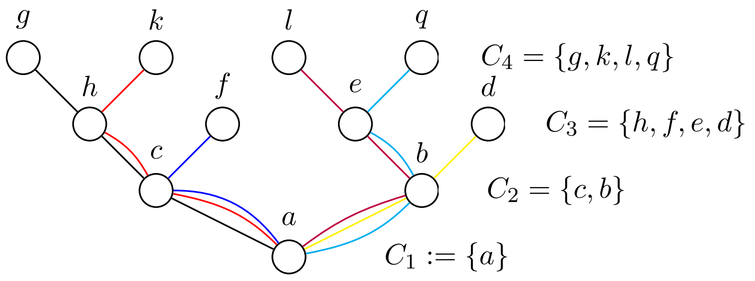
– $\langle M, a\rangle \Vdash_V \Box_\leq\varphi \Leftrightarrow \forall z \in W : aR_\leq z \Rightarrow \langle M, z\rangle \Vdash_V \varphi$;

– $\forall i \in \mathcal{I}\,\langle M, a\rangle \Vdash_V \Box_i\varphi \Leftrightarrow \forall z \in W : aR_i z \Rightarrow \langle M, z\rangle \Vdash_V \varphi$.

Фреймы моделируют деревья вычислений, где каждая ветвь — это альтернативный вычислительный маршрут. Реляционная же модель включает все возможные вычислительные альтернативы для задачи и может быть конечной или потенциально бесконечной в зависимости от разрешимости самой задачи и выбранного вычислительного маршрута. Каждое новое ветвление порождает новый агент, представляющий свой собственный маршрут внутри фрейма. Фрейм состоит из временных слоев, содержащих различные состояния вычислительного процесса, доступные в один и тот же момент времени. Отношение достижимости определяет возможность перехода из одного состояния в другое в разные моменты времени.

Фреймы могут представлять собой сложную структуру, где помимо ветвлений различные вычислительные маршруты могут склеиваться или совпадать участками значительной длины для различных агентов.

Пример 1. Примером конечного фрейма Крипке логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ может послужить следующая несложная бинарная структура:



Временные слои изображены и пронумерованы от 0 до 3, разным цветом выделены различные агентные отношения. Бинарность древовидной структуры этого фрейма, конечно, не является свойством логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ и предложена только для наглядности примера.

3.2. Связь с логикой $\mathcal{CTL}$ и $\mathcal{K}$

Введем необходимые обозначения, используемые нами в дальнейшем при доказательстве утверждений. Маршрутом агента s будем называть последовательность всех состояний агентного отношения, т. е. $(a_1^s, a_2^s, a_3^s, ..., a_n^s, ...) \in W$, где $\forall i\, (a_i^s, a_{i+1}^s) \in R_s$. Пусть A^s — начальный участок маршрута конечной длины; B^s — заключительный (потенциально) бесконечный участок маршрута. Тогда наш маршрут можно записать как $(A^s, a_{n_1}^s, a_{n_2}^s, ..., a_{n_k}^s, B^s)$, где $(a_{n_1}^s, a_{n_2}^s, ...a_{n_k}^s)$ — некоторый ограниченный *участок маршрута*, представляющий интерес для исследования. Запись вида $\exists b \in (a_{n_1}, ..., a_{n_k})^s$ означает, что состояние b лежит на участке маршрута от n_1 до n_k, принадлежащего агенту s.

3.2.1. *Операторы из $\mathcal{CTL}$ в $\mathcal{CTLK}^{Rel}$*

Переопределим общепринятые в $\mathcal{CTL}$ временные операторы, используя введенные выше отношения. Для любого $a \in C_t \subseteq W$:

- $\langle M, a\rangle \Vdash_V EX\varphi \Leftrightarrow \exists b \in C_{t+1} : aR_{\leq}b \Rightarrow b \Vdash_V \varphi$;
- $\langle M, a\rangle \Vdash_V AX\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_{t+1} : aR_{\leq}b \Rightarrow b \Vdash_V \varphi$;
- $\langle M, a\rangle \Vdash_V A(\varphi\, U\, \psi) \Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{I})(\exists j \in \mathbb{N})\exists b \in C_{t+j} : aR_ib : b \Vdash_V \psi$ и $\forall c \in (a, \ldots, a_{j-1})^i$, где $a_j = b$ и $c \Vdash_V \varphi$;
- $\langle M, a\rangle \Vdash_V E(\varphi\, U\, \psi) \Leftrightarrow (\exists i \in \mathcal{I})(\exists j \in \mathbb{N})\exists b \in C_{t+j} : aR_ib : b \Vdash_V \psi$ и $\forall c \in (a, \ldots, a_{j-1})^i$, где $a_j = b$ и $c \Vdash_V \varphi$.

Применительно к реляционной семантике логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ действие формул, содержащих описанные выше операторы, можно сформулировать следующим образом:

- $EX\varphi$ — в следующем слое вычислений в некотором состоянии будет выполняться φ;

- $AX\varphi$ — в следующем слое вычислений во всех состояниях будет выполняться φ;
- $E(\varphi U \psi)$ — найдется агент, на маршруте которого будет выполняться φ, пока не выполнится ψ;
- $A(\varphi U \psi)$ — на всех агентных маршрутах будет выполняться φ, пока не выполнится ψ.

Перечисленные операторы могут быть выражены друг через друга следующим образом:

$$A(\varphi U \psi) \equiv \neg E(\neg\varphi U \neg\psi);\ E(\varphi U \psi) \equiv \neg A(\neg\varphi U \neg\psi);\ AX\varphi \equiv \neg EX\varphi.$$

Другие временные операторы из $\mathcal{CTL}$ определяются стандартным образом:

- $AF\varphi \equiv A(true\, U\, \varphi)$ — на каждом агентном маршруте найдется состояние, в котором будет выполняться φ;
- $EF\varphi \equiv E(true\, U\, \varphi)$ — найдется состояние некоторого агентного маршрута, на котором будет выполняться φ;
- $AG\varphi \equiv \neg EF\neg\varphi \equiv \Box_{\leq}\varphi$ — на каждом агентом маршруте будет выполняться φ;
- $EG\varphi \equiv \neg AF\neg\varphi$ — в каждом агентном маршруте, начиная с некоторого состояния, будет выполняться φ.

Определение 10. *Логикой $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ языка $L^{\mathcal{CTLK}}$ будем называть множество всех $\mathcal{CTLK}$-формул, истинных на множестве всех фреймов некоторого ограниченного класса C, т. е.*

$$\mathcal{CTLK}^{Rel} = \{\varphi \in For(L^{\mathcal{CTLK}}) : F \Vdash \varphi \forall F \in C\}.$$

3.2.2. *Операторы из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{CTLK}^{Rel}$*

В языке логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ действие оператора *общего знания* может быть определено классическим образом:

$$\langle F, a\rangle \Vdash_V \mathcal{C}\varphi \Leftrightarrow \forall z \in W : a \left(\bigcup_{\forall i \in \mathcal{I}} R_i\right)^+ z \Rightarrow \langle F, z\rangle \Vdash_V \varphi.$$

Общее знание описывает совокупность всей информации, доступной всем агентам вычислительного процесса, в нашей интерпретации — совокупность всех возможных вычислительных маршрутов. В соответствии с определением модели отношение, задающее оператор $\mathcal{C}$, в нашем случае совпадает с отношением $R_{\leq}$.

Так как каждое ветвление фрейма порождает нового агента, то совокупность всех агентных перемещений (транзитивное замыкание) совпадает с описанным выше отношением достижимости:

$$a \left(\bigcup_{\forall i \in \mathcal{I}} R_i\right)^+ z \equiv aR_{\leq}z.$$

4. Свойства $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фреймов

Отталкиваясь от определений этих фреймов, опишем основные свойства $\mathcal{CTLK}^{Rel}$:

1) $R_{\leq}$ рефлексивное отношение;
2) $R_{\leq}$ транзитивное отношение;
3) если $aR_{\leq}b$, то $\neg bR_{\leq}a$, кроме $a = b$ (антисимметричность $R_{\leq}$);
4) R_i линейное отношение;
5) R_i рефлексивное отношение;
6) R_i транзитивное отношение;
7) если aR_ib, то $\neg bR_ia$, кроме $a = b$ (антисимметричность R_i);
8) если aR_ib, то $aR_{\leq}b$.

Введенные выше свойства непосредственно следуют из определений модельных отношений. Также верно следующее:

Предложение 1. *Для $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фрейма справедливы следующие свойства:*

9) если $aR_{\leq}b$, то $\exists$, что aR_ib;

10) если aR_ib и $bR_{\leq}c$, то $\exists j$ aR_jc;

11) если $aR_{\leq}b$ и $aR_{\leq}c$, то либо $b = c$, либо aR_ib и aR_jc, либо $\exists i$, что bR_ic или cR_ib;

12) $\bigcap_{\forall i \in \mathcal{I}} R_i \neq \emptyset$.

Доказательство.

9) Очевидно, так как каждое ветвление порождает нового агента и любой вычислительный маршрут вкладывается в отношение $R_{\leq}$, задающее структуру всего фрейма.

10) Отношение $R_{\leq}$ транзитивно. Кроме того, в силу (8), если aR_ib, то $aR_{\leq}b$. Тогда из записи aR_ib и $bR_{\leq}c$ будет следовать $aR_{\leq}c$. В силу свойства 9) найдется такой агент j, что aR_jc.

11) Рассмотрим несколько случаев:

    а) $c = b$, тогда из свойства 9) следует, что $aR_{\leq}b$ и $\exists i$, что aR_ib.

б) На некотором временном слое произошло ветвление, b и c лежат на разных ветках, значит, в силу свойства 10) они будут принадлежать разным агентам i и j. Но $R_i \cap R_j \neq \emptyset$, так как у любой пары агентов существует общий участок маршрута, начинающийся с корня фрейма;

в) В случае если b и c принадлежат одному агенту и не равны либо b находится ниже c, либо наоборот в силу свойств 4) и 7).

12) Следует из рефликсивности R_i, причем $\forall i \; aR_ia$, где a — начальное состояние (корень) фрейма. $\square$

5. Финитная аппроксимируемость логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$

Логика называется финитно аппроксимируемой, если ее можно задать как множество формул, истинных на некоторой конечной совокупности конечных фреймов. Основной и наиболее популярной техникой доказательства финитной аппроксимируемости является метод фильтрации [7]. Применим метод, предложив описание специальных конечных моделей.

5.1. Метод фильтрации для $\mathcal{CTLK}^{Rel}$

Будем говорить, что $\forall x, y \in W$, в т.ч. $(x, y) \in R_i$, Σ-эквивалентны в модели M (обозн. $x \sim_\Sigma y$), если

$$\langle M, x\rangle \Vdash_V \varphi \Leftrightarrow \langle M, y\rangle \Vdash_V \varphi \quad \forall \varphi \in \Sigma.$$

Очевидно, что $\sim_\Sigma$ задает отношение эквивалентности на W. Введем следующее обозначение: $[x]_\Sigma$ — класс эквивалентности, порожденный элементом x, т. е. $[x]_\Sigma = \{y \in W : x \sim_\Sigma y\}$. В случаях, которые не вызывают противоречий, будем опускать индекс Σ и писать просто $[x]$ и $x \sim y$.

Фильтрацией модели $M = \langle W, R_\leq, R_1, \ldots, R_n, \ldots, V\rangle$ на наборе формул Σ будем называть модель $H = \langle W', S_\leq, S_1, \ldots, S_n, \ldots, V'\rangle$, построенную по следующим правилам:

1) $W' = \{[x] : x \in W\}$;

2) $V'(p) = \{[x] : x \in V(p)\}, \quad \forall p \in \Sigma$;

3) $xR_iy, * \in \{\leq, i\} \Rightarrow [x]S_i[y], \forall x, y \in W$;

4) Если $[x]S_i[y]$, тогда в случае:

   а) $x \Vdash_V AX\varphi$, верно $y \Vdash_V \varphi$, при $x \in C_t$ и $y \in C_{t+1}$;

б) $x \Vdash_V \Box_i \varphi$, верно $y \Vdash_V \varphi$;

в) $x \Vdash_V \Box_{\leq} \varphi$, верно $y \Vdash_V \varphi$;

г) $x \Vdash_V A(\varphi U \psi)$, верно $x \Vdash_V \psi$ или ($y \Vdash_V A(\varphi U \psi)$ и $x \Vdash_V \varphi$);

д) $x \Vdash_V E(\varphi U \psi)$, верно $x \Vdash_V \psi$ или ($\exists j \in \mathcal{I}$ и $\exists z \in W : xR_j y$ в т.ч. при $z = y$ и на $z \Vdash_V E(\varphi U \psi)$, $x \Vdash_V \varphi$).

Если $F = \langle W, R_{\leq}, R_1, \ldots, R_n, \ldots \rangle$ — $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фрейм и $B \subseteq W$, то в соответствии с определением 5:

- множеством преемников элемента $b \in W$ назовем $B \uparrow W = \{a \in W \mid \exists b \in B : bR_{\leq} a\}$;

- множеством предшественников элемента $b \in W$ назовем $B \downarrow W = \{a \in W \mid \exists b \in B : aR_i b\}$.

В случаях, не вызывающих двусмысленности, вместо $B \uparrow W$ и $B \downarrow W$ мы пишем просто $B \uparrow$ и $B \downarrow$. Если $x \in W$, мы также пишем $x \uparrow$ и $x \downarrow$ вместо $\{x\} \uparrow$ и $\{x\} \downarrow$ соответственно. Когда из контекста ясно, какая именно модель подразумевается в рассуждениях, будем опускать избыточное обозначение означивания: $x \Vdash \varphi$ вместо $x \Vdash_V \varphi$.

Теорема 1. *Пусть H фильтрованная модель модели M на наборе формул Σ. Тогда для каждого элемента $x \in W$ и для каждой формулы $\varphi \in \Sigma$,*

$$\langle M, x \rangle \Vdash \varphi \Leftrightarrow \langle H, [x] \rangle \Vdash \varphi.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по построению формулы φ:

1) Пусть $\varphi = p \in Prop$. Если $x \Vdash p$, то $x \in V(p)$ и, по правилу построения модели (2), если $\langle M, x \rangle \Vdash p$, то $\langle H, [x] \rangle \Vdash p$.

   Обратно, пусть $[x] \Vdash p$, тогда $[x] \in V'(p)$. По (2) получаем, что на $x \Vdash p$.

2) Предположим, что $\varphi = AX\psi$ и $x \Vdash \varphi$. Для доказательства $[x] \Vdash \varphi$ надо показать, что $[y] \Vdash \psi$ для всех потомков элемента $[x]$ в следующем слое. Пусть $[x] S_{\leq} [y]$, тогда по (4а), $y \Vdash \psi$, если $x \in C_t \,\&\, y \in C_{t+1}$ и по предположению индукции $[y] \Vdash \psi$.

   Обратно, пусть $[x] \Vdash \varphi$, тогда возьмем произвольный $y \in C_{t+1} \cap x \uparrow$. По (3), $[x] S_{\leq} [y]$ и $[y] \Vdash \psi$ и по предположению индукции $y \Vdash \psi$.

3) Покажем, что $\varphi = \Box_* \psi$, где $* \in \{\leq, i\}$ $\forall i \in \mathcal{I}$ и $x \Vdash \varphi$. Пусть $[x] S_* [y]$, тогда, по (4б-в), $\forall z \in W$, в т.ч. $xR_* z$, $z \Vdash \psi$ в т.ч. для $z = y$ такого, что $[y] \Vdash \psi$.

   Обратно, $[x] \Vdash \varphi$, тогда возьмем $y \in x \uparrow$, и, по (3), $[x] S_* [y]$ и $[y] \Vdash \psi$, где $y \Vdash \psi$.

4) $\varphi = A(\psi_1 U \psi_2)$ и $x \Vdash \varphi$, тогда либо $[x] \Vdash \psi_2$, либо $[x] \nVdash \psi_2$. В случае $[x] \Vdash \psi_2$, пусть $[x] = [y]$ и $[x]S_{\leq}[y]$, по (4г), $y \Vdash_V \psi_2$ и $[y] \Vdash \psi_2$. Если $[x] \nVdash \psi_2$, то пусть $[x]S_{\leq}[y]$, по (4г), $y \Vdash \varphi$ и $[y] \Vdash \varphi$.

   Обратно, пусть $[x] \Vdash \varphi$, тогда $y \in x\uparrow$, по (3), $[x]S_{\leq}[y]$ и либо $[y] = [x]$, либо $[y] \Vdash \psi_2$, но всегда $y \Vdash \psi_2$.

5) $\varphi = E(\psi_1 U \psi_2)$ и $x \Vdash \varphi$, тогда либо $[x] \Vdash \psi_2$, либо $[x] \nVdash \psi_2$. В случае $[x] \Vdash \psi_2$, пусть $[x] = [y]$ и $[x]S_i[y]$, по (4д), $y \Vdash_V \psi_2$ и $[y] \Vdash \psi_2$. Если $[x] \nVdash \psi_2$, то пусть $\exists j \in \mathcal{I}$: $[x]S_j[y]$, по (4е), $\exists z \in W$: $[x]S_j[z]$ и $[z]S_j[y]$ на $z \Vdash_V \varphi$ и $[z] \Vdash \varphi$.

   Обратно, пусть $[x] \Vdash \varphi$, тогда $\exists y \in x\uparrow$ и $\exists i \in \mathcal{I}$ такие, что xR_iy, по (3), $[x]S_i[y]$ и либо $[y] = [x]$, где $y \Vdash_V \psi_2$, либо $\exists z \in W$: $[x]S_i[z]$ и $[z]S_i[y]$, такой что $[z] \Vdash \varphi$ и, по (4е), где $x \nVdash \varphi$ и $x \Vdash \psi_1$, на $z \Vdash \varphi$. $\square$

Отношение $S_{\leq}$, в соответствии со свойствами отношений, будем определять как $\bigcup_{\forall i \in \mathcal{I}} S_i = S_{\leq}$.

В целом условия (3) и (4) не позволяют однозначно определить отношение S_i. В действительности мы можем выбрать любое отношение S_i, лежащее в интервале $\underline{S_i} \subseteq S_i \subseteq \overline{S_i}$, где

$$\underline{S_i} = \{\langle [x],[y] \rangle : \exists x', y' \in W(x' \sim x \wedge y' \sim y \wedge x'R_iy')\},$$

$$\overline{S_i} = \{\langle [x],[y] \rangle : \forall \Box_i\varphi \in \Sigma(x \Vdash \varphi \to y \Vdash \varphi\}.$$

В связи с этим фильтрацию на фрейме

$$\underline{H} = \langle W', \underline{S_{\leq}}, \underline{S_1}, \ldots, \underline{S_n}, \ldots \rangle$$

будем называть наименьшей фильтрацией фрейма M на наборе формул Σ, в то же время фильтрацию на фрейме

$$\overline{H} = \langle W', \overline{S_{\leq}}, \overline{S_1}, \ldots, \overline{S_n}, \ldots \rangle$$

назовём грубой фильтрацией.

Несмотря на то что все основные отношения на исходных $\mathcal{CTLK}^{Rel}$-фреймах транзитивны, процедура фильтрации не гарантирует по умолчанию сохранение транзитивности на фильтрованной модели. Для транизитивизации отношения достаточно рассматривать транзитивное замыкание $\widehat{\underline{S_i}}$ отношения $\underline{S_i}$, т. е. положим

$$\widehat{\underline{S_i}} = \{\langle [x],[y] \rangle : \exists n > 0 [x]\underline{S_i}^n[y]\}.$$

Из [7] известно следующее:

Предложение 2. *Предположим, что H — это фильтрация модели M через множество Σ, которое является конечным базисом над M, а Δ — конечный базис Σ. Тогда H содержит не более $2^{|\Delta|}$ точек.*

Очевидно, что две точки Σ-эквивалентны в M, если они Δ-эквивалентны. Поэтому количество попарно не Σ-эквивалентных точек в M не больше, чем количество подмножеств в Δ.

В силу теоремы 1 и предложения 2 получаем

Следствие 1. *Пусть M — контрмодель для формулы φ, а Σ — конечное множество формул, замкнутых относительно подформул. Тогда каждая фильтрация M набором Σ является конечной контрмоделью для φ.*

В силу того, что для каждой формулы φ существует фильтрация H, построенная на некотором Σ контрмодели M, такой, что $H \Vdash \mathcal{CTLK}^{Rel}$, заключаем, что логика $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ допускает фильтрацию. Как следствие, получаем финитную аппроксимируемость логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ ([7], следствие 5.26).

6. Заключение

Логика $\mathcal{CTL}$ на сегодняшний день является одной из фундаментальных систем, используемых при построении и моделировании программных вычислений. В отличие от линейной временной логики $\mathcal{CTL}$ позволяет в полной мере реализовывать потенциал алгоритмов параллельных вычислений, проводя одновременную симуляцию различных сценариев развития событий. С увеличением выразительных средств языка логики за счёт добавления агентных операторов $\mathcal{CTLK}$ увеличивается и потенциал для задач семантического моделирования: от бизнес-информатики и построения вероятностных выводов [1; 3] до описания процесса обработки принимаемой и передаваемой информации вычислительной машиной [4].

Безусловно, нами предприняты только первые шаги в изучении логики $\mathcal{CTLK}$, а вопрос идентичности логик $\mathcal{CTLK}$ и $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ остаётся актуальным для дальнейших исследований. Однако факт возможной характеризации моделируемых в логике задач при помощи привычных конечных реляционных моделей позволяет надеяться на положительное разрешение многих других важных вопросов для этой логической системы — от построения базиса допустимых правил вывода до разрешимости и унификации.

Список источников

1. Витяев Е. Е. Семантический вероятностный вывод предсказаний // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 21. С. 33–50. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.33

2. Карпов Ю. Г. Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб. : БХВ-Петербург, 2010. 560 с.
3. Манцивода А. В., Пономарев Д. К. К семантическому документному моделированию бизнес-процессов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 29. С. 52–67. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.52
4. Kripke-style models for logics of evidence and truth / H. Antunes, W. Carnielli, A. Kapsner, A. Rodrigues // Axioms. 2020. Vol. 9, N 3, 100. https://doi.org/10.3390/axioms9030100
5. Bashmakov S. I., Zvereva T. Yu. Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality. // Bulletin of the Section of Logic. 2022. Vol. 51, N 3. P. 345–361. https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.16
6. Bashmakov S. I., Zvereva T. Yu. Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl. // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, N 2. P. 1361–1373. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.082
7. Chagrov A., Zacharyaschev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1997. 605 p.
8. Clarke E. M., Emerson E. A. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic // Logics of Programs. Logic of Programs 1981. Lecture Notes in Computer Science. 1982. Vol. 131. P. 52–71. https://doi.org/10.1007/BFb0025774
9. Dima C. Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall // Computational Logic in Multi-Agent Systems. CLIMA 2008. Lecture Notes in Computer Science. 2008. Vol. 5405. P. 117–131. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02734-5_8
10. Guelev D. P., Dima C., Enea C. An alternating-time temporal logic with knowledge, perfect recall and past: axiomatisation and model-checking // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2011. Vol. 21, N 1. P. 93–131.
11. Halpern J. Y., Vardi M. Y. The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds // J. Computer and System Sciences. 1989. Vol. 38, N 1. P. 195–237.

References

1. Vityaev E.E. Semantic probabilistic inference of predictions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2017, vol. 21, pp. 33–50. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.33
2. Karpov Yu.G. *Model checking. Verification of parallel and distributed program systems*. St. Petersburg, BHV-St. Petersburg Publ., 2010, 560 p.
3. Mantsivoda A.V., Ponomaryov D.K. Towards Semantic Document Modelling of Business Processes *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 29, pp. 52–67. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.52
4. Antunes H., Carnielli W., Kapsner A., Rodrigues A. Kripke-style models for logics of evidence and truth. *Axioms*, 2020, vol. 9, no. 3: 100. https://doi.org/10.3390/axioms9030100
5. Bashmakov S.I., Zvereva T.Yu. Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality. *Bulletin of the Section of Logic*, 2022, vol. 51, no. 3, pp. 345–361. https://doi.org/10.18778/0138-0680.2022.16

6. Bashmakov S.I., Zvereva T.Yu. Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 1361–1373. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.082
7. Chagrov A., Zacharyaschev M. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997, 605 p.
8. Clarke E.M., Emerson E.A. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic. *Logics of Programs. Logic of Programs 1981. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 131, 1982, pp. 52–71. https://doi.org/10.1007/BFb0025774
9. Dima C. Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall. *Computational Logic in Multi-Agent Systems. CLIMA 2008. Lecture Notes in Computer Science, 2008, vol. 5405, pp. 117–131. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02734-5_8*
10. *Guelev D.P., Dima C., Enea C. An alternating-time temporal logic with knowledge, perfect recall and past: axiomatisation and model-checking. Journal of Applied Non-Classical Logics, 2011, vol. 21, no. 1, pp. 93–131. https://doi.org/10.3166/jancl.21.93-131*
11. *Halpern J.Y., Vardi M.Y. The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds. J. Computer and System Sciences, 1989, vol. 38, no. 1, pp. 195–237. https://doi.org/10.1016/0022-0000(89)90039-1*

Об авторах

Башмаков Степан Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, krauder@mail.ru, https://orcid.org/orcid.org/0000-0002-3354-0383

Смелых Кирилл Александрович, студент, Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, lastth@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0007-3228-2806

About the authors

Stepan I. Bashmakov, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, krauder@mail.ru, https://orcid.org/orcid.org/0000-0002-3354-0383

Kirill A. Smelykh, student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, lastth@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0007-3228-2806

Поступила в редакцию / Received 15.08.2023
Поступила после рецензирования / Revised 04.12.2023
Принята к публикации / Accepted 06.12.2023