Серия «Математика»
2023. Т. 46. С. 51—65

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.97
MSC 49K99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.51

О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть I

Д. А. Овсянников [1✉] **, Е. Д. Котина**[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация
✉ d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Аннотация. Рассматриваются проблемы программного управления пучком траекторий. Исследуются постановки, которые возникают при рассмотрении задач управления пучками заряженных частиц, а также, например, при обработке изображений. В прикладных задачах часто необходимо исследовать задачу управления центром тяжести некоторого множества или изменение плотности распределения частиц в соответствии с некоторым заданным. Предлагаемые функционалы могут быть эффективно использованы при построении поля скоростей при обработке различных изображений, в частности медицинских диагностических изображений. Задача построения поля скоростей рассматривается как задача управления и оптимизации, причем, в отличие от предыдущих работ авторов, при оптимизации используются макропараметры, характеризующие исследуемые объекты. Получены вариации исследуемых функционалов и даются необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: программное управление, поле скоростей, пучок траекторий, вариация функционала, оптимизация, обработка изображений

Ссылка для цитирования: Овсянников Д. А., Котина Е. Д. О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 51–65.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.51

Research article

On Some Problems of Trajectory Beam Program Control. Part I

Dmitri A. Ovsyannikov [1✉]**, Elena D. Kotina** [1]

[1] St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation

✉ d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Abstract. This paper deals with problems of program control of a trajectory beam. We investigate formulations that arise when considering problems of charged particle beams control, as well as, for example, in image processing. In applied problems, it is often necessary to investigate the problem of the gravity center control of some set or changing the density distribution of particles according to some given one. The functionals proposed in the paper can be effectively used for the velocity field constructing in various image processing, in particular, medical diagnostic images. In this paper, the problem of constructing a velocity field is considered as a control and optimization problem, and, unlike the previous works of the authors, macroparameters characterizing the objects under study are used in optimization. In the article, variations of the studied functionals are obtained and the necessary optimality conditions are given.

Keywords: program control, velocity field, trajectory beam, functional variation, optimization, image processing

For citation: Ovsyannikov D. A., Kotina E. D. On Some Problems of Trajectory Beam Program Control. Part I. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 51–65. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.51

1. Введение

Построению программных управлений посвящено множество публикаций различных авторов. В настоящей статье рассматриваются задачи программного управления пучком траекторий [5; 6]. Исследуются задачи управления центром тяжести некоторого множества при различных заданиях целевого множества и плотности распределения в нем точек. Другими словами, в работе изучаются задачи перевода одной точки в другую с учетом плотности распределения точек в соответствующих множествах фазового пространства. Такие задачи возникают в различных прикладных исследованиях, в частности при управлении пучками заряженных частиц в ускоряющих и фокусирующих структурах, а также, например, при обработке изображений. В работе вводятся соответствующие функционалы. Исследование ведется с использованием преобразования пучков траекторий по сечениям. Сформулированы необходимые леммы, позволяющие проводить конструктивный анализ приращений функционалов, заданных на пучках траекторий. Найдены аналитические представления вариаций исследуемых функционалов и получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Динамическая система, исследуемая в работе, может описываться как нелинейными, так и линейными уравнениями. Первая часть работы посвящена исследованию введенных функционалов для нелинейной системы, во второй части будет рассматриваться линейная система.

Особо следует отметить, что рассматриваемые в работе функционалы могут эффективно быть использованы при построении поля скоростей при обработке изображений. В вопросах обработки изображений при построении поля скоростей данная проблема известна как задача определения оптического потока для последовательных изображений [7;9;10;16;21]. Обработка и анализ изображений, в том числе построение поля скоростей, актуальны в таких важных областях, как медицинская диагностика, робототехника, компьютерное зрение, включающее методы отслеживания объектов и анализа движения на цифровых изображениях, а также космические исследования, исследования движения арктических льдов, транспортных потоков и т. д. [2; 17; 18; 20].

В предыдущих работах авторов проблема построения поля скоростей рассматривалась как задача управления и оптимизации, в частности, при обработке радионуклидных изображений разрабатывался оптимизационный подход как для непрерывных [8;14;15], так и для дискретных систем [3; 12; 13]. В данной работе при оптимизации используются макропараметры исследуемых объектов. Полученные вариации функционалов и необходимые условия оптимальности могут служить основой для построения новых оптимизационных алгоритмов нахождения поля скоростей с учетом макропараметров. Заметим, что данную работу также можно рассматривать как один из подходов к решению задачи электродинамики, а именно нахождения поля скоростей, реализующего ту или иную динамику пучков заряженных частиц [1; 11; 19].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{2.1}$$

Здесь t — время, x — n-вектор фазовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u = u(t)$ — r-мерная вектор-функция на $[0, T]$, T — фиксировано, $f = f(t, x, u)$ — n-мерная вектор-функция непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ по переменным x, u и кусочно-непрерывная по t. Считаем, что управления $u = u(t)$ составляют класс D векторных кусочно-непрерывных функций со значениями в U, U — компакт в R^r. Управления $u \in D$ будем называть также допустимыми управлениями.

Рассмотрим решения системы (2.1) при

$$x(0) = x_0 \in M_0. \tag{2.2}$$

Здесь $M_0 \subset R^n$ — множество начальных значений для системы (2.1). Считаем далее, что M_0 есть компактное множество ненулевой меры Лебега. Предполагаем, что решение задачи Коши с условием (2.2) определено на интервале $[0, T]$ при произвольном управлении $u \in D$ и любом $x_0 \in M_0$.

Обозначим через

$$x(t) = x_t = x(t, x_0, u), t \in [0, T] \tag{2.3}$$

решение системы (2.1) с начальным условием $x(0) = x_0$.

Множество этих решений назовем пучком траекторий (или просто пучком), исходящих из множества M_0 при заданном векторе управления u. Обозначим через $M_{t,u}$ сечение пучка траекторий в момент времени t при фиксированном векторе u, т. е. множество

$$M_{t,u} = \{x(t) = x(t, x_0, u), x_0 \in M_0\}. \tag{2.4}$$

Далее будем для определенности считать, что вектор x задает координаты некоторых частиц в фазовом пространстве.

Введем функцию плотности распределения частиц $\rho(t, x)$. Уравнение, которое определяет изменение функции плотности распределения частиц в пространстве с течением времени вдоль траекторий системы (2.1), имеет вид [5; 6]

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x} f(t,x,u) + \rho(t,x) \operatorname{div}_x f(t,x,u) = 0. \tag{2.5}$$

При этом

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), x \in M_0, \tag{2.6}$$

где $\rho_0(x)$ — заданная функция.

Отметим, что функция $\rho = \rho(t, x)$ в различных задачах механики и электродинамики играет роль плотности распределения массы или заряда, а при обработке изображений она может также играть роль количественной характеристики изображения (яркости), зависящей от пространственных координат и времени, в случае радионуклидных изображений, плотности распределения радиофармпрепарата (РФП) [14; 16; 17]. Уравнение (2.5) называют уравнением Лиувилля, или уравнением переноса. Если функция $\rho(t, x)$ описывает изменение плотности распределения вероятности во времени и фазовом пространстве координат динамической системы (2.1), то уравнение (2.5) есть уравнение Фокера – Планка – Колмогорова [4]. Такой процесс будет иметь место, когда семейство траекторий (2.3) с начальными условиями (2.2) соответствует множеству случайных начальных значений координат с плотностью распределения вероятности $\rho_0(x)$ (2.6). При этом

$$\int_{M_0} \rho_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = 1.$$

В данной статье мы будем рассматривать конкретные функционалы, которые могут быть использованы как при решении многообразных практических задач построения программных управлений, так и при решении некоторых нестандартных задач, в частности, при построении поля скоростей при обработке изображений.

Рассмотрим центр тяжести частиц на множестве $M_{T,u}$, определяемый плотностью распределения $\rho(t,x)$ в момент времени T, а именно

$$\bar{X}(u) = \frac{1}{\bar{\rho}_0}\int_{M_{T,u}} x_T \rho(T,x_T)\,\mathrm{d}x_T. \tag{2.7}$$

Наряду с функцией $\rho(t,x)$ будем рассматривать также функцию $\hat{\rho}(x)$, характеризующую плотность распределения частиц в рассматриваемом фазовом пространстве. Введем вектор-функцию

$$\hat{X}(u) = \frac{1}{\hat{\rho}_0}\int_{M_{T,u}} x_T \hat{\rho}(x_T)\,\mathrm{d}x_T. \tag{2.8}$$

Не умаляя общности, предполагаем далее, что

$$\begin{gathered}\bar{\rho}_0 = \int_{M_0} \rho_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = 1,\\ \hat{\rho}_0 = \int_{R_n} \hat{\rho}(x)\,\mathrm{d}x = 1.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Это позволяет нам также при необходимости трактовать функции $\rho(t,x)$ и $\hat{\rho}(x)$ как плотности распределения вероятности во времени и фазовом пространстве координат динамической системы (2.1).

Введем функционал

$$J(u) = (\bar{X}(u) - \hat{X}(u))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\bar{X}_i(u) - \hat{X}_i(u))^2. \tag{2.10}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (2.10) по всем управлениям $u \in D$. Вектор, определяемый выражением (2.8), будем условно называть также центром тяжести, определяемым плотностью распределения $\hat{\rho}(x)$ на $M_{T,u}$. Таким образом, ставится задача совпадения центров тяжести, определяемых плотностями распределения $\rho(t,x)$ и $\hat{\rho}(x)$, на множестве $M_{T,u}$. Так что можно говорить о переводе центра тяжести множества M_0, определяемого плотностью $\rho_0(x)$, в центр тяжести, определяемый плотностью $\hat{\rho}(x)$, при переводе множества M_0 в множество

$M_{T,u}$. Такая задача возникает при построении поля скоростей при обработке последовательных изображений. В данном случае мы будем изучать динамику макропараметров — центров тяжести изображений. Далее, с учетом поля скоростей для макропараметров, можно строить алгоритмы нахождения поля скоростей на всем изображении.

3. Преобразование пучков траекторий по сечениям

Рассмотрим допустимые управления $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ и соответствующие им траектории системы (2.1):

$$x(t) = x(t, x_0, u), \tilde{x}(t) = x(t, x_0, \tilde{u}), \tag{3.1}$$

которые удовлетворяют одинаковым начальным условиям

$$x(0) = \tilde{x}(0) = x_0.$$

Из предположения о единственности решения задачи Коши для системы (2.1) следует существование взаимно однозначного соответствия множеств $M_{t,u}$ и $M_{t,\tilde{u}}$ для различных управлений u и $\tilde{u}$. Будем рассматривать отображение [5; 6]

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}(x_t) \tag{3.2}$$

множества $M_{t,u}$ в множество $M_{t,\tilde{u}}$, определяемое траекториями (3.1), исходящими из одних и тех же точек множества M_0. В дальнейшем нас будет интересовать якобиан этого преобразования. Частные производные $\frac{\partial \tilde{x}_{t_i}}{\partial x_{t_j}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, существуют и непрерывны в силу непрерывной дифференцируемости решений системы (2.1) по начальным данным. Индексы i, j обозначают здесь соответствующие координаты векторов $\tilde{x}_t$ и x_t.

Рассмотрим матрицу Якоби $Y(t) = \frac{\partial \tilde{x}_t}{\partial x_t}$ преобразования (3.2). Нетрудно заметить, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} Y - Y \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x}. \tag{3.3}$$

При начальном условии $Y(t_0) = E$, где E — единичная матрица.

Лемма 1. *Якобиан преобразования (3.2) имеет вид*

$$\det(Y(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} sp\left(\Delta_{x,u} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x}\right) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{\rho(t, x(t))}{\tilde{\rho}(t, \tilde{x}(t))}. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\Delta_{x,u}\frac{\partial f(\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x}=\frac{\partial f(\tau,x(\tau)+\Delta x(\tau),u(\tau)+\Delta u(\tau))}{\partial x}-\\ -\frac{\partial f(\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Решение уравнения (3.3) $Y(t)$ с начальным условием $Y(0)=E$ можно представить в виде $Y(t)=\tilde{F}(x)F^{-1}(t)$, где $\tilde{F}(t)$ и $F(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений

$$\frac{d\tilde{F}}{dt}=\frac{\partial f(\tau,x+\Delta x,u+\Delta u)}{\partial x}\tilde{F},\ \frac{dF}{dt}=\frac{\partial f(\tau,x,u)}{\partial x}F,$$

нормированные при $t=0$, т. е. $\tilde{F}(t_0)=F(t_0)=E$. При этом

$$\det(Y(t))=\det(\tilde{F}(t))\det(F^{-1}(t)).$$

Отсюда по формуле Лиувилля находим выражение для якобиана (3.4). □

Будем далее обозначать через $\Delta u(t)=\tilde{u}(t)-u(t)$ вариацию управления $u(t)$, а через $\Delta x(t)=\tilde{x}(t)-x(t)$ — приращение траектории $x(t)$ при вариации управления $\Delta u(t)$. Вариация $\delta x(t)=\delta x(t,x_0,u)$ траектории $x(t,x_0,u)$ при вариации управления $\Delta u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta x}{dt}=\frac{\partial f(t,x(t,x_0,u),u(t))}{\partial x}\delta x+\Delta_u f(t,x(t,x_0,u),u(t)) \tag{3.6}$$

с начальным условием $\delta x(0)=0$.

В формуле (3.6) $\Delta_u f=f(t,x(t),u(t)+\Delta u(t))-f(t,x(t),u(t))$. По предположению $f(t,x,u)$ имеет непрерывные частные производные по x до второго порядка включительно, и, следовательно, вектор-функция $\delta x(t,x_0,u)=\delta x(t)=\delta x(x_t)$ непрерывно дифференцируема по x_t.

В следующей лемме дается другое представление для якобиана преобразования (3.2).

Лемма 2. *Якобиан преобразования (3.2) имеет вид*

$$\det\left(\frac{\partial\tilde{x}_t}{\partial x_t}\right)=1+\operatorname{div}_x\delta x(t)+o(\|\Delta_u f)\|_L+\|\Delta_u\operatorname{div}_x f\|_L). \tag{3.7}$$

При этом $\operatorname{div}_x\delta x(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d\operatorname{div}_x\delta x(t)}{dt}=\frac{\partial\operatorname{div}_x f(t,x(t),u(t))}{\partial x}\delta x(t)+\Delta_u\operatorname{div}_x f(t,x(t),u(t)) \tag{3.8}$$

при начальном условии $\operatorname{div}_x \delta x(t_0) = \operatorname{div}_x \delta x(t_0, x_0, u) = 0$, $t_0 = 0$. *Здесь*

$$\operatorname{div}_x \delta x = \operatorname{sp}\left(\frac{\partial \delta x(x_t)}{\partial x_t}\right)$$

и

$$\Delta_u \operatorname{div}_x f = \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t) + \Delta u(t)) - \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t)),$$

а $\|\Delta_u f\|_L$ *и* $\|\Delta_u \operatorname{div}_x f\|_L$ *есть нормы в пространстве суммируемых функций* $L[0, T]$.

Доказательство. Учитывая выражение для следа матрицы (3.5), якобиан (3.4) можно представить в виде

$$\det(Y(t)) = 1 + \int_{t_0}^{t} \{\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}_x f(\tau, x(\tau), u(\tau))\delta x(\tau) +$$
$$+\Delta_u f(\tau, x(\tau), u(\tau)))\} \, \mathrm{d}\tau + o(\|\Delta_u f)\|_L + \|\Delta_u \operatorname{div}_x f\|_L).$$

Отсюда, с учетом уравнения (3.8), получаем якобиан (3.7). □

Выпишем уравнения для плотности распределения частиц вдоль траекторий системы (2.1). Из уравнения (2.5) следует

$$\frac{d\rho(t, x(t))}{dt} = -\rho(t, x(t)) \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t)). \tag{3.9}$$

Вариацию плотности распределения $\delta\rho = \delta\rho(x, t)$ в этом случае можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\delta\rho}{dt} = -\delta\rho \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t)) - \\ -\rho\left(\frac{\partial \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t))}{\partial x}\delta x(t) - \Delta_u \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t))\right).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{div}_x \delta x(t)$ *и* $\delta\rho(t, x(t))$ *удовлетворяют уравнениям (3.8) и (3.10) соответственно. Предполагаем, что* $\operatorname{div}_x \delta x(0) = 0$ *и* $\delta\rho(0) = 0$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\delta\rho(t, x(t)) + \rho(t, x(t)) \operatorname{div}_x \delta x(t) = 0.$$

Доказательство. Используя уравнения (3.8), (3.9) и (3.10), нетрудно показать, что

$$\frac{d\delta\rho}{dt} = -\delta\rho \operatorname{div}_x f(t, x(t), u(t)) - \rho\frac{d}{dt} \operatorname{div}_x \delta x,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\delta\rho + \rho \operatorname{div}_x \delta x) = -(\delta\rho + \rho \operatorname{div}_x \delta x) \operatorname{div}_x f.$$

Отсюда, с учетом начальных условий, получаем утверждение леммы. □

Приведенные леммы далее используются при преобразовании вариации исследуемых функционалов.

4. Вариация функционала

Учитывая лемму 1, приращение вектор-функции (2.7) можно представить в виде

$$\Delta \bar{X}(u) = \delta \bar{X}(u) + o(\|\Delta_u f\|_L).$$

При этом вариация $\delta \bar{X}(u)$ имеет вид

$$\Delta \bar{X}(u) = \int_{M_{T,u}} \delta x_T \rho(T, x_T)\, \mathrm{d}x_T.$$

Рассмотрим теперь приращение $\Delta \hat{X}(u)$:

$$\Delta \hat{X}(u) = \int_{M_{T,\tilde{u}}} \tilde{x}_T \hat{\rho}(T, \tilde{x}_T)\, \mathrm{d}\tilde{x}_T - \int_{M_{T,u}} x_T \hat{\rho}(T, x_T)\, \mathrm{d}x_T. \tag{4.1}$$

Переходя в (4.1) в первом интеграле от интегрирования по множеству $M_{T,\tilde{u}}$ к интегрированию по множеству $M_{T,u}$ и учитывая лемму 2, приращение $\Delta \hat{X}(u)$ можно представить в виде

$$\Delta \hat{X}(u) = \int_{M_{T,u}} (x_T + \delta x(x_T)) \left(\hat{\rho}(x_T) + \frac{\partial \hat{\rho}(x_T)}{\partial x} \delta x(x_T) \right) (1+ \\ + \operatorname{div}_x \delta x(x_T))\, \mathrm{d}x_T - \int_{M_{T,u}} (x_T \hat{\rho}(T, x_T)\, \mathrm{d}x_T + \\ + o(\|\Delta_u f\|_L) + o(\|\Delta_u \operatorname{div}_x f\|_L).$$

Отсюда получаем вариацию для векторной функции $\hat{X}(u)$:

$$\delta \hat{X}(u) = \int_{M_{T,u}} (x_T \frac{\partial \hat{\rho}(x_T)}{\partial x} \delta x(x_T) + \hat{\rho}(x_T) \delta x(x_T) + \\ + x_T \hat{\rho}(x_T) \operatorname{div}_x \delta x(x_T)\, \mathrm{d}x_T.$$

Вариацию функционала (2.10) можно теперь представить в виде

$$\delta J(u) = 2(\bar{X}(u) - \hat{X}(u))^*(\delta\bar{X}(u) - \delta\hat{X}(u)). \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение вектор-функции $\psi(t,x)$ и $\lambda(t,x)$, которые на траекториях системы (2.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial f(t,x(t),u(t))}{\partial x} + E\operatorname{div}_x f(t,x(t),u(t))\right)^* \psi - \\ -\lambda\left(\frac{\partial \operatorname{div}_x f(t,x(t),u(t))}{\partial x}\right)^*, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \operatorname{div}_x f(t,x(t),u) \tag{4.4}$$

при конечных условиях

$$\psi(T) = -2\left(E(\rho(T,x(T)) - \hat{\rho}(x(T))) - x(T)\frac{\partial\hat{\rho}(x(T))}{\partial x}\right)^*(\bar{x}(u) - \hat{x}(u)), \tag{4.5}$$

$$\lambda(T) = -2(\bar{x}(u) - \hat{x}(u))^* x(T)\hat{\rho}(x(T)). \tag{4.6}$$

Здесь и далее знак * означает транспонирование матрицы или вектора.

Учитывая уравнение в вариациях (3.6) и уравнение (3.8) для дивергенции вектора $\delta x(t)$, можно записать очевидные равенства

$$\psi^*\left(\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta_u f\right) = 0, \tag{4.7}$$

$$\lambda\left(\frac{d}{dt}\operatorname{div}_x \delta x - \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}_x f)\delta x - \Delta_u \operatorname{div}_x f\right) = 0. \tag{4.8}$$

Преобразуем вариацию функционала (2.10) с использованием вспомогательных функций ψ и λ, введенных выше соотношениями (4.3)–(4.6). Проинтегрируем уравнения (4.7), (4.8) от 0 до T по сечениям пучка траекторий $M_{t,u}$ и прибавим полученные выражения к правой части равенства (4.2). После преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta J(u) = \int_0^T \int_{M_{t,u}} (\psi^*(t,x_t)\Delta_u f(t,x_t,u(t)) + \\ +\lambda(t,x_t)\Delta_u \operatorname{div}_x f(t,x_t,u(t)))\,\mathrm{d}x_t \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь случай заданного (фиксированного) центра тяжести, определяемого плотностью $\hat{\rho}(x)$. Обозначим через $\hat{X}$ центр тяжести, определяемый плотностью распределения $\hat{\rho}(x)$ в R^n. Имеем

$$\hat{X} = \int_{R^n} x\hat{\rho}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Введем функционал

$$J_1(u) = (\bar{X}(u) - \hat{X})^2. \tag{4.11}$$

Ставится задача минимизации функционала (4.11), т. е. минимизация при $t = T$ отклонения центра тяжести $\bar{X}(u)$, определяемого формулой (2.7), от фиксированного центра тяжести $\hat{X}$, определяемого формулой (4.10).

Вариация функционала (4.11) имеет вид

$$\delta J_1(u) = 2(\bar{X}(u) - \hat{X})\delta\bar{X}(u).$$

Преобразуя эту вариацию аналогично предыдущему случаю, получаем

$$\delta J_1(u) = \int_0^T \int_{M_{t,u}} \psi^* \Delta_u f\,\mathrm{d}x_t\mathrm{d}t, \tag{4.12}$$

где n-векторная функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x} + E\,\mathrm{div}_x\, f(t, x(t), u(t))\right)^* \psi, \tag{4.13}$$

при конечном условии

$$\psi(T) = -2(\bar{X}(u) - \hat{X})\rho(T, x(T)). \tag{4.14}$$

5. Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума

На основании полученных вариаций (4.9) и (4.12) можно сформулировать необходимые условия оптимальности в задачах минимизации функционалов (2.10) и (4.11). Введем функцию H, зависящую от переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r$ и вспомогательных переменных $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \lambda$:

$$H(t, x, \lambda, \psi, u) = \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i(t,x) f_i(t,x,u) + \lambda(t,x)\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_i}\right).$$

Теорема 1. *Пусть $u^0 = u^0(t)$ — оптимальное управление в задаче минимизации функционала (2.10), а функция $\lambda^0(t,x)$ и вектор-функция $\psi^0(t,x)$ удовлетворяют на оптимальном процессе уравнениям (4.3),* *(4.4) при конечных условиях (4.5),(4.6). Тогда при $t \in [0,T]$ выполняется условие максимума*

$$\max_{u\in U} \int_{M_{t,u^0}} H(t,x_t,\lambda^0(t,x_t),\psi^0(t,x_t),u)\,\mathrm{d}x_t = \\ = \int_{M_{t,u^0}} H(t,x_t,\lambda^0(t,x_t),\psi^0(t,x_t),u^0(t))\,\mathrm{d}x_t.$$

Теорема 2. *Пусть $u^0 = u^0(t)$ — оптимальное управление в задаче минимизации функционала (4.11), а вектор-функция $\psi^0(t,x)$ удовлетворяет на оптимальном процессе уравнению (4.13) при конечном условии (4.14). Тогда при $t \in [0,T]$ выполняется условие максимума*

$$\max_{u\in U} \int_{M_{t,u^0}} H(t,x_t,\psi^0(t,x_t),u)\,\mathrm{d}x_t = \\ = \int_{M_{t,u^0}} H(t,x_t,\psi^0(t,x_t),u^0(t))\,\mathrm{d}x_t.$$

Здесь $H(t,x,\psi,u) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t,x) f_i(t,x,u)$.

Доказательство теорем 1, 2 проводится стандартно с использованием игольчатой вариации [5; 6].

Замечание 1. Здесь и далее учитывается, что управления есть кусочно-непрерывные функции и в точках разрыва они принимают конечные пределы слева или справа.

6. Заключение

В работе исследованы функционалы, характеризующие такие макропараметры рассматриваемых объектов, как центры тяжести. Приведены аналитические представления вариации функционалов и необходимые условия оптимальности. Рассматриваемые функционалы могут быть использованы как при решении многообразных практических задач построения программных управлений, так и при решении некоторых нестандартных задач, например при построении поля скоростей при обработке изображений.

Список источников

1. Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М. : Высш. шк., 1982. 285 с.

2. Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты / В. Я. Геча, М. Ю. Жиленев, В. Б. Федоров, Д. А. Хрычев, Ю. И. Худак, А. В. Шатина // Российский технологический журнал. 2020. Т. 8, № 1. С. 97–109. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109
3. Котина Е. Д., Овсянников Д. А. Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, № 2. С. 213–224. http://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210
4. Красовский А. А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М. : Наука, 1968. 240 с.
5. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
6. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
7. Barron J., Fleet D. Performance of optical flow techniques // International Journal of Computer Vision. 1994. Vol. 12. P. 43–77.
8. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. Vol. 7. P. 174–181.
9. Bruhn A., Weickert J., Schnorr C. Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck: Combining Local and Global Optic Flow Methods // International Journal of Computer Vision. 2005. Vol. 61, N 3. P. 211–231.
10. Horn B. K. P., Schunck B. G. Determining optical flow // Artificial intelligence. 1981. Vol. 17, N 11. P. 185–203.
11. Kotina E. D. Beam Dynamics Formation in Magnetic Field // Proceedings of EPAC 2002. Paris, France. 2002. P. 1264–1266.
12. Kotina E. D. Discrete optimization problem in beam dynamics // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2006, Vol. 558, N 1. P. 292–294.
13. Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.3
14. Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Velocity field based method for data processing in radionuclide studies // Problems of Atomic Science and Technology. 2018. Vol. 115, N 3. P. 128–131.
15. Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M. Optimization approach to the velocity field determining problem // Cybernetics and physics. 2022. Vol. 11, N 3. P. 131–135.
16. Kotina E. D., Pasechnaya G. A. Optical flow-based approach for the contour detection in radionuclide images processing // Cybernetics and physics. 2014. Vol. 3, N 2. P. 62–65.
17. Kotina E., Ploskikh V., Shirokolobov A. Digital Image Processing in Nuclear Medicine // Physics of Particles and Nuclei. 2022. Vol. 53, N 2. P. 535–540.
18. Kopenkov V., Myasnikov V. The estimation of the traffic flow parameters based on the videoregistration data analysis // Computer Optics. 2014. Vol. 38, N 1. P. 81–86.
19. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D. Determination of velocity field by given density distribution of charged particles // Problems of Atomic Science and Technology. 2012. Vol. 79, N 3. P. 122–125.

20. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D., Shirokolobov A. Yu. Mathematical Methods of Motion Correction in Radionuclide Studies // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Vol. 88, N 6. P. 137–140.
21. Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping / N. Papenberg [et al.] // International Journal of Computer Vision. 2006. Vol. 67, N 2. P. 141–158.

References

1. Zubov V.I. *Dinamika upravlyayemykh sistem.* [Dynamics of Control Systems]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982, 285 p. (in Russian)
2. Gecha V., Zhilenev M., Fyodorov V., Khrychev D., Hudak Yu., Shatina A. Velocity field of image points in satellite imagery of planet's surface. *Russian Technological Journal*, 2020, vol. 8, no. 1, pp. 97–109. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-10914.
3. Kotina E.D., Ovsyannikov D.A. Mathematical model of joint optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 213–224. https:// doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210 (In Russian)
4. Krasovskiy A.A. *Statisticheskaya teoriya perekhodnykh protsessov v sistemakh upravleniya.* [Statistical theory of transient processes in control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 240 p. (in Russian)
5. Ovsyannikov D.A. *Matematicheskie metody upravlenija puchkami.* [Mathematical methods of beam control]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1980, 228 p. (in Russian)
6. Ovsyannikov D.A. *Modelling and optimization of charged particle beam dynamics.* Leningrad, Leningrad University Publ., 1990, 312 p. (in Russian)
7. Barron J., Fleet D. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 1994, vol. 12, pp. 43–77.
8. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing. *Cybernetics and Physics*, 2018, vol. 7, pp. 174–181.
9. Bruhn A., Weickert J., Schnorr C. Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck: Combining Local and Global Optic Flow Methods *International Journal of Computer Vision*, 2005, vol. 61, no. 3, pp. 211–231.
10. Horn B.K.P., Schunck B.G. Determining optical flow. *Artificial intelligence*, 1981, vol. 17, no. 11, pp. 185–203.
11. Kotina E.D. Beam Dynamics Formation in Magnetic Field. *Proceedings of EPAC 2002*, Paris, France, 2002, pp. 1264–1266.
12. Kotina E.D. Discrete optimization problem in beam dynamics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2006, vol. 558, no. 1, pp. 292–294.
13. Kotina E.D., Leonova E.B., Ploskikh V.A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 39, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.3

14. Kotina E.D., Ovsyannikov D.A. Velocity field based method for data processing in radionuclide studies. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2018, vol. 115, no. 3, pp. 128–131.
15. Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M. Optimization approach to the velocity field determining problem. *Cybernetics and physics*, 2022, vol. 11, no. 3, pp. 131–135.
16. Kotina E.D., Pasechnaya G.A. Optical flow-based approach for the contour detection in radionuclide images processing. *Cybernetics and physics*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 62–65.
17. Kotina E., Ploskikh V., Shirokolobov A. Digital Image Processing in Nuclear Medicine. *Physics of Particles and Nuclei*, 2022, vol. 53, no. 2. pp. 535–540.
18. Kopenkov V., Myasnikov V. The estimation of the traffic flow parameters based on the videoregistration data analysis. *Computer Optics*, 2014, vol. 38, no. 1, pp. 81–86.
19. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D. Determination of velocity field by given density distribution of charged particles. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2012, vol. 79, no. 3, pp. 122–125.
20. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D., Shirokolobov A. Yu. Mathematical Methods of Motion Correction in Radionuclide Studies. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2013, vol. 88, no. 6, pp. 137–140.
21. Papenberg N., Bruhn A., Brox T. et al. Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping. *International Journal of Computer Vision*, 2006, vol. 67, no. 2, pp. 141–158.

Об авторах

Овсянников Дмитрий Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, d.a.ovsyannikov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-0829-2023

Котина Елена Дмитриевна, д-р физ.-мат. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, e.kotina@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2057-682X

About the authors

Dmitri A. Ovsyannikov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation, d.a.ovsyannikov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-0829-2023

Elena D. Kotina, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation, e.kotina@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2057-682X

Поступила в редакцию / Received 04.09.2023
Поступила после рецензирования / Revised 09.10.2023
Принята к публикации / Accepted 17.10.2023