# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

# DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

**Серия «Математика»**
2023. Т. 46. С. 3—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49J20, 49M05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.3

## Оптимальное управление каскадной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

**А. В. Аргучинцев[1]✉, В. П. Поплевко[1]**

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ arguch@math.isu.ru

**Аннотация.** В классе гладких управляющих воздействий исследуется задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассматривается случай, когда функциональный параметр, входящий в правую часть системы, определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Управляющие воздействия стеснены поточечными (амплитудными) ограничениями. Задачи такого вида возникают при моделировании ряда процессов динамики популяций, взаимодействия потоков жидкости и газа с твердыми телами и т. п. Для такого рода задач неприменимы методы оптимального управления, основанные на использовании принципа максимума Л. С. Понтрягина, его следствий и модификаций. Предлагаемый подход основан на применении специальной вариации управления, которая обеспечивает гладкость варьируемых управлений и выполнение ограничений. Получено необходимое условие оптимальности. Предложена основанная на этом условии схема метода улучшения допустимого управления, обоснована сходимость метода. Приведен иллюстративный пример.

**Ключевые слова:** гиперболическая система, запаздывание, гладкие управляющие воздействия, необходимое условие оптимальности, метод улучшения

**Благодарности**: Исследование Аргучинцева А. В. выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/.

**Ссылка для цитирования**: Аргучинцев А. В., Поплевко В. П. Оптимальное управление каскадной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 3–18.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.3

Research article

## Optimal Control by a Cascade System of Hyperbolic and Ordinary Delayed Differential Equation

**Alexander V. Arguchintsev**[1]✉**, Vasilisa P. Poplevko**[1]

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ arguch@math.isu.ru

**Abstract**. In the class of smooth control functions, an optimal control problem of first-order semilinear hyperbolic equations is investigated. We consider the case when the functional parameter in the right side of the hyperbolic system is determined from the controlled system of ordinary differential equations with constant state delay. Control functions are restricted by pointwise (amplitude) constraints. Problems of this kind arise when modeling a number of processes of population dynamics, interaction of a fluid (liquid or gas) with solids, etc. Optimal control methods based on the use of the Pontryagin maximum principle, its consequences and modifications are not applicable for such problems. The proposed approach is based on a special control variation, which ensures the smoothness of variable controls and the fulfillment of restrictions. The necessary optimality condition is proved. A scheme of a method for improving permissible control based on this condition is proposed, the convergence of the method is justified. An illustrative example is given.

**Keywords:** hyperbolic system, delay, smooth controls, necessary optimality condition, improvement method

**Acknowledgements**: The study by A. Arguchintsev was financially supported by the Russian Science Foundation, Project No 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296.

**For citation**: Arguchintsev A. V., Poplevko V. P. Optimal Control by a Cascade System of Hyperbolic and Ordinary Delayed Differential Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 3–18. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.3

## 1. Введение

В статье рассматривается задача оптимального управления каскадной системой, состоящей из гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии эффекта запаздывания. Композиции взаимосвязанных гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений используются при моделировании целого ряда процессов динамики популяций [1;2], взаимодействия потоков жидкости и газа с твердыми телами или гибкими мембранами [15], химической ректификации [4–6], динамики плазмы [13], динамики кровотока [14] и др. Например, в моделях, описывающих динамику двух взаимодействующих популяций «растительноядный консумент – растения» [1, с. 218–219], для популяции растительноядных животных важно распределение по возрасту. Структура этой популяции описывается интегродифференциальным уравнением с гиперболическим дифференциальным оператором в левой части. В качестве независимых переменных выступают время, в течение которого рассматривается процесс, и возраст особей. Для моделирования же динамики популяции растения возраст часто не имеет существенного значения, а поэтому можно ограничиться классическим обыкновенным дифференциальным уравнением.

В настоящей статье исследуется комбинация полулинейной гиперболической системы первого порядка и обыкновенных дифференциальных уравнений. Функциональный параметр в правой части системы полулинейных гиперболических уравнений первого порядка определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Рассматриваются сосредоточенные управления, выбираемые из класса непрерывно дифференцируемых функций.

Интерес к такому достаточно необычному в задачах оптимизации классу управляющих воздействий вызван несколькими причинами.

Во-первых, некоторые обратные задачи математической физики могут быть интерпретированы как задачи оптимального управления с квадратичным функционалом качества. По смыслу задачи определяемые функциональные параметры в ряде случаев являются гладкими.

Во-вторых, гладкость управляющих параметров часто позволяет использовать классические или «почти» классические понятия решений уравнений с частными производными. Заметим, что до сих пор существует обычно маскируемое некоторыми авторами противоречие между неизбежным переходом к обобщенным решениям уравнений с частными производными в случае разрывных управлений и численной реализацией, основанной на разностных схемах, которые аппроксимируют несуществующие в классическом смысле частные производные.

В-третьих, в случае гладких управлений практически неприменим математический аппарат, использующий принцип максимума Л. С. Понтрягина и целый ряд градиентных методов.

Наконец, эффект запаздывания весьма актуален для ряда моделей, в которых неизбежен определенный зазор по времени между действием сосредоточенного управления и реакцией на управляющее воздействие распределенного по времени и пространству состояния.

Для исследования поставленной задачи удалось эффективно использовать методику [3], основанную на применении неклассического варианта вариации управления. Л. Е. Забелло применял комбинацию вариации подобного вида с игольчатым варьированием для вывода условия оптимальности типа принципа максимума в задачах оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием [7;8]. Данную вариацию можно рассматривать и как частный вид вариаций сдвига, использованных С. Ф. Морозовым и В. И. Суминым [9;10] в классе разрывных управлений. Применяемый в статье подход позволяет работать в классе гладких управляющих воздействий с автоматическим выполнением ограничений на управления поточечного вида. В настоящей статье применение методики авторов привело к достаточно прогнозируемому результату в виде условия оптимальности и методу улучшения гладких управлений. Основная сложность, по сравнению с [3], заключается в использовании несколько громоздкого математического аппарата для получения формулы приращения целевого функционала и оценки приращения состояния через параметр, характеризующий малость вариации при наличии эффекта запаздывания.

В конце статьи приведены результаты численного решения иллюстративного примера в системе MATLAB.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s,t), y(t), s, t), \tag{2.1}$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x(s,t)$ — $n$-мерная вектор-функция, $A(s,t)$ — $n \times n$ — матрица, $y(t)$ — $m$-мерная вектор-функция.

Предполагаем, что система (2.1) записана в инвариантном виде [12, с. 25–29], т. е. матрица $A(s,t)$ — диагональная. Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в $\Pi$:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1+1, m_1+2, \ldots, m_2;$$

$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2+1, m_2+2, \ldots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размера $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размера $(n-m_2)\times(n-m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы $A$ соответственно. Из вектора состояния $x$ выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы $A$:

$$x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы (2.1) зададим в следующем виде:

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0,t) = \eta(t), \quad x^-(s_1,t) = \mu(t), \quad t \in T. \quad (2.2)$$

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию

$$\frac{dy}{dt} = g(y(t), y(t-\alpha), u(t), t), \quad t \in T,$$
$$y(t) = y^0(t), \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0], \quad \alpha = const > 0, \quad (2.3)$$

где $y^0(t)$ — заданная функция.

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: управление $u(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $T$ и удовлетворяет поточечным ограничениям типа включения

$$u(t) \in U, \ t \in T, \quad (2.4)$$

где $U$ — компакт из $E^r$.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1), s)\, ds + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\, ds\, dt, \quad (2.5)$$

определенного на решениях задачи (2.1)–(2.3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (2.4).

Задача оптимального управления (2.1)–(2.5) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t), \ i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $A$ непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике $\Pi$;

2) вектор-функции $\eta(t), \ \mu(t)$ и $x^0(s)$ непрерывны соответственно на $T$ и $S$, а вектор-функция $y^0(t)$ непрерывна на $[t_0 - \alpha, t_0]$;

3) выполнены условия согласования:

$$\eta(t_0) = (x^0(s_0))^+, \ \mu(t_0) = (x^0(s_1))^-;$$

4) вектор-функция $g(y,z,u,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по $y, \ z \in E^m$ и $u \in U$; здесь мы ввели обозначение $z(t) = y(t-\alpha)$, которое неоднократно потребуется дальше;

5) вектор-функция $f(x,y,s,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$ и $y \in E^m$;

6) скалярные функции $\varphi(x,s)$, $F(x,s,t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$.

При сделанных предположениях для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) из класса непрерывных в $\Pi$ функций, каждая компонента которого непрерывно дифференцируема вдоль соответствующего семейства характеристик [12].

## 3. Формула приращения

Рассмотрим два произвольных допустимых процесса: $\{u, y = y(t,u), x = x(s,t,u)\}$ и $\{\widetilde{u} = u+\Delta u, \widetilde{y} = y+\Delta y = y(t,\widetilde{u}), \widetilde{x} = x+\Delta x = x(s,t,\widetilde{u})\}$. В дальнейшем обозначим дифференциальный оператор в (2.1) через $D_A x = \frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s}$. Здесь $D_A x = (D_1 x_1, \dots, D_n x_n)$ — обобщенная производная, каждая компонента которой $D_i x_i$ непрерывна вдоль соответствующего $i$-го семейства характеристик.

Тогда задача в приращениях имеет вид:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x,y,s,t), \tag{3.1}$$

$$\Delta x(s,t_0) = 0,\ \Delta x^+(s_0,t) = 0,\ \Delta x^-(s_1,t) = 0,$$

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta g(y,z,u,t), \quad \Delta y(t) = 0, \quad t \in [t_0-\alpha, t_0]. \tag{3.2}$$

Здесь

$$\Delta f(x,y,s,t) = f(\widetilde{x},\widetilde{y},s,t) - f(x,y,s,t),$$
$$\Delta g(y,z,u,t) = g(\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{u},t) - g(y,z,u,t).$$

Запишем приращение функционала на двух указанных допустимых процессах:

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt,$$

где

$$\Delta\varphi(x(s,t_1),s) = \varphi(\widetilde{x}(s,t_1),s) - \varphi(x(s,t_1),s),$$
$$\Delta F(x,s,t) = F(\widetilde{x},s,t) - F(x,s,t).$$

В эту формулу добавим нулевые слагаемые

$$\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - \Delta f(x,y,s,t)\rangle\,ds\,dt, \quad \int\limits_T \langle p(t), \frac{d\Delta y(t)}{dt} - \Delta g(y,z,u,t)\rangle\,dt,$$

где $\psi(s,t)$ и $p(t)$ — пока неопределенные $n$-мерная и $m$-мерная вектор-функции соответственно. Здесь через $\langle .,. \rangle$ обозначается скалярное произведение в евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Применим обычную и обобщенную [3, с. 25] формулы интегрирования по частям.

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt + \int\limits_S [\langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle -$$

$$-\langle \psi(s,t_0), \Delta x(s,t_0)\rangle]\,ds - \iint\limits_\Pi \langle D_A\psi + \frac{\partial A(s,t)}{\partial s}\psi, \Delta x(s,t)\rangle\,ds\,dt +$$

$$+\int\limits_T [\langle \psi(s_1,t), A(s_1,t)\Delta x(s_1,t)\rangle - \langle \psi(s_0,t), A(s_0,t)\Delta x(s_0,t)\rangle]\,dt +$$

$$+\langle p(t_1), \Delta y(t_1)\rangle - \langle p(t_0), \Delta y(t_0)\rangle - \int\limits_T \langle \frac{dp(t)}{dt}, \Delta y(t)\rangle\,dt -$$

$$-\iint\limits_\Pi \langle \psi(s,t), \Delta f(x,y,s,t)\rangle\,dsdt - \int\limits_T \langle p(t), \Delta g(y,z,u,t)\rangle\,dt.$$

Введем скалярные функции

$$H[s,t] = H(\psi,x,y,s,t) = \langle \psi, f(x,y,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$

$$h[t] = h(p,y,z,u,t) = \langle p, g(y,z,u,t)\rangle.$$

Тогда

$$\Delta H(\psi,x,y,s,t) = \Delta_{\widetilde{x}} H(\psi,x,y,s,t) + \Delta_{\widetilde{y}} H(\psi,\widetilde{x},y,s,t),$$

$$\Delta h(p,y,z,u,t) = \Delta_{\widetilde{u}} h(p,y,z,u,t) + \Delta_{\widetilde{y}} h(p,y,z,\widetilde{u},t) + \Delta_{\widetilde{z}} h(p,\widetilde{y},z,\widetilde{u},t),$$

где

$$\Delta_{\widetilde{u}} h(p,y,z,u,t) = h(p,y,z,\widetilde{u},t) - h(p,y,z,u,t),$$

$$\Delta_{\widetilde{y}} h(p,y,z,\widetilde{u},t) = h(p,\widetilde{y},z,\widetilde{u},t) - h(p,y,z,\widetilde{u},t),$$

$$\Delta_{\widetilde{z}} h(p,\widetilde{y},z,\widetilde{u},t) = h(p,\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{u},t) - h(p,\widetilde{y},z,\widetilde{u},t),$$

$$\Delta_{\widetilde{x}} H(\psi,x,y,s,t) = H(\psi,\widetilde{x},y,s,t) - H(\psi,x,y,s,t),$$

$$\Delta_{\widetilde{y}} H(\psi,\widetilde{x},y,s,t) = H(\psi,\widetilde{x},\widetilde{y},s,t) - H(\psi,\widetilde{x},y,s,t).$$

Используем следующие разложения:

$$\Delta\varphi(x(s,t_1),s) = \langle \frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x}, \Delta x(s,t_1)\rangle + o_\varphi(|\Delta x(s,t_1)|),$$

$$\Delta_{\widetilde{x}} H(\psi, x, y, s, t) = \langle \frac{\partial H(\psi, x, y, s, t)}{\partial x}, \Delta x(s,t) \rangle + o_H(|\Delta x(s,t)|),$$

$$\Delta_{\widetilde{y}} H(\psi, \widetilde{x}, y, s, t) = \langle \frac{\partial H(\psi, \widetilde{x}, y, s, t)}{\partial y}, \Delta y(t) \rangle + o_H(|\Delta y(t)|),$$

где

$$\frac{\partial H(\psi, \widetilde{x}, y, s, t)}{\partial y} = \Delta_{\widetilde{x}} \frac{\partial H(\psi, x, y, s, t)}{\partial y} + \frac{\partial H(\psi, x, y, s, t)}{\partial y}.$$

Знаком модуля здесь и далее обозначена евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве. Заметим, что

$$\iint\limits_{\Pi} \langle \frac{\partial H[s,t]}{\partial y}, \Delta y \rangle \, dsdt = - \iint\limits_{\Pi} \langle \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_{s}^{s_1} \frac{\partial H(\psi, x, y, \xi, t)}{\partial y} d\xi, \Delta y \rangle \, dsdt.$$

Рассмотрим следующее разложение:

$$\Delta_{\widetilde{y}} h(p, y, z, \widetilde{u}, t) = \langle \frac{\partial h(p, y, z, \widetilde{u}, t)}{\partial y}, \Delta y \rangle + o_h(|\Delta y(t)|),$$

здесь

$$\frac{\partial h(p, y, z, \widetilde{u}, t)}{\partial y} = \Delta_{\widetilde{u}} \frac{\partial h(p, y, z, u, t)}{\partial y} + \frac{\partial h(p, y, z, u, t)}{\partial y}.$$

Теперь рассмотрим разложение

$$\Delta_{\widetilde{z}} h(p, \widetilde{y}, z, \widetilde{u}, t) = \langle \frac{\partial h(p, \widetilde{y}, z, \widetilde{u}, t)}{\partial z}, \Delta z \rangle + o_h(|\Delta z|).$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\partial h(p, \widetilde{y}, z, \widetilde{u}, t)}{\partial z} = \Delta_{\widetilde{u}} \frac{\partial h(p, \widetilde{y}, z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(p, \widetilde{y}, z, u, t)}{\partial z},$$

где

$$\frac{\partial h(p, \widetilde{y}, z, u, t)}{\partial z} = \Delta_{\widetilde{y}} \frac{\partial h(p, y, z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(p, y, z, u, t)}{\partial z}.$$

Тогда получаем

$$\int\limits_{T} \langle \frac{\partial h(p, y, z, u, t)}{\partial z}, \Delta z \rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_{T} \langle \frac{\partial h(p(t), y(t), y(t-\alpha), u(t), t)}{\partial z}, \Delta y(t-\alpha) \rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0-\alpha}^{t_0} \langle \frac{\partial h(p(\theta+\alpha), y(\theta+\alpha), y(\theta), u(\theta+\alpha), \theta+\alpha)}{\partial z}, \Delta y(\theta) \rangle \, d\theta +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1-\alpha}\langle\frac{\partial h(p(\theta+\alpha),y(\theta+\alpha),y(\theta),u(\theta+\alpha),\theta+\alpha)}{\partial z},\Delta y(\theta)\rangle\,d\theta.$$

Здесь мы использовали следующее обозначение: $\theta=t-\alpha$, $\theta\in[t_0-\alpha,t_1-\alpha]$. Далее, возвращаясь к переменной $t$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1-\alpha}\langle\frac{\partial h(p(t+\alpha),y(t+\alpha),y(t),u(t+\alpha),t+\alpha)}{\partial z},\Delta y(t)\rangle\,dt.$$

Потребуем, чтобы функции $\psi(s,t)$, $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$D_A\psi+\frac{\partial A(s,t)}{\partial s}\psi=-\frac{\partial H(\psi,x,y,s,t)}{\partial x},\quad (s,t)\in\Pi,$$

$$\psi(s,t_1)=-\frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x},\quad s\in S,\tag{3.3}$$

$$\psi^+(s_1,t)=0,\quad \psi^-(s_0,t)=0,\quad t\in T;$$

$$\frac{dp}{dt}=\begin{cases}-\frac{\partial h[t]}{\partial y}-\frac{\partial h[t+\alpha]}{\partial z}-\int\limits_S\frac{\partial H[s,t]}{\partial y}\,ds, & t\in[t_0;t_1-\alpha),\\ -\frac{\partial h[t]}{\partial y}-\int\limits_S\frac{\partial H[s,t]}{\partial y}\,ds, & t\in[t_1-\alpha;t_1].\end{cases}\tag{3.4}$$

$$p(t_1)=0;\quad p(t)\equiv 0,\ t>t_1.$$

Здесь

$$\frac{\partial h[t+\alpha]}{\partial z}=\frac{\partial h(p(t+\alpha),y(t+\alpha),z(t),u(t+\alpha),t+\alpha)}{\partial z}.$$

Тогда формула приращения функционала принимает вид

$$\Delta J(u)=-\int_T\Delta_{\widetilde{u}}h(p(t),y(t),z(t),u(t),t)\,dt+\eta,\tag{3.5}$$

где

$$\eta=\int_S o_\varphi(|\Delta x(s,t_1)|)\,ds+\iint_\Pi(o_H(|\Delta x(s,t)|)\,dsdt+$$

$$+\iint_\Pi[o_H(|\Delta y(t)|+\langle\Delta_{\widetilde{x}}\frac{\partial H(\psi,x,y,s,t)}{\partial y},\Delta y(t)\rangle]\,dsdt+$$

$$+\int_T[o_h(|\Delta y(t)|)+\langle\Delta_{\widetilde{u}}\frac{\partial h(p,y,z,u,t)}{\partial y},\Delta y(t)\rangle+\langle\Delta_{\widetilde{u}}\frac{\partial h(p,\widetilde{y},z,u,t)}{\partial z},\Delta z(t)\rangle]\,dt$$

$$+\int\limits_T [o_h(|\Delta z(t)|) + \langle \Delta_{\widetilde{y}} \frac{\partial h(p,y,z,u,t)}{\partial z}, \Delta z(t)\rangle]\, dt.$$

В дальнейшем нам потребуются следующие неравенства, которые позволят оценить остаточный член в (3.5):

$$\gamma(t) = \max_{(\xi,\tau)\in\Pi(t)} |\Delta x(\xi,\tau)| \le M \int\limits_{t_0}^{t} |\Delta u(\tau)|\, d\tau, \tag{3.6}$$

$$\Pi(t) = \{(\xi,\tau)\in\Pi : \tau \le t\};$$

$$\gamma_1(t) = \max_{t_0\le\tau\le t} |\Delta y(\tau)| \le K \int\limits_{t_0}^{t} |\Delta u(\tau)|\, d\tau. \tag{3.7}$$

Для получения (3.6)–(3.7) используется интегральное представление решения (3.1), в котором интегрирование осуществляется вдоль характеристик гиперболической системы.

## 4. Вариация управления и необходимое условие оптимальности

Полученные в предыдущем разделе результаты (формула приращений и оценки приращений состояния) позволяют воспользоваться общей методикой [3], основанной на применении неклассических вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. Заметим, что при получении (3.5)–(3.7) существенным было предположение о дифференцируемости параметров задачи лишь по $x, y, z$, но нигде пока не использовались предположения о дифференцируемости соответствующих функций по $u$ и гладкости допустимых управлений. Поэтому формулы (3.5)–(3.7) могут применяться в качестве хорошей «заготовки» для исследования рассматриваемых задач в классах разрывных (например, ограниченных и измеримых или кусочно-непрерывных) управляющих воздействий. В данном разделе для нас теперь будут существенными перечисленные выше предположения на управления.

Проварьированное управление строится по правилу

$$u_{\varepsilon,\delta}(t) = u(t+\varepsilon\delta(t)), \;\; t\in T, \tag{4.1}$$

$\varepsilon\in[0,1]$ — параметр варьирования, $\delta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $t_0 \le t+\delta(t) \le t_1, \;\; t\in T$. Данная вариация «перемешивает» имеющиеся значения управления. Этим автоматически обеспечивается выполнение ограничений (2.4) на управляющее воздействие.

Воспользуемся формулой (3.5). Так как допустимые управления — гладкие функции, используем следующее разложение:

$$\Delta u = \dot{u}(t)\varepsilon\delta(t) + o(\varepsilon).$$

С помощью оценок (3.6), (3.7) получим

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int\limits_T \langle \frac{\partial h[t]}{\partial u}, \dot{u} \rangle \delta(t)\, dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности $\delta(t)$ вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Если процесс $\{u(t), y(t), x(s,t)\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче, то выполняется условие*

$$\omega(t) = \langle \frac{\partial h(p(t), y(t), z(t), u(t), t)}{\partial u}, \dot{u}(t) \rangle = 0, \quad t \in T,$$

*где $p(t)$ — решение сопряженной задачи (3.3),(3.4), вычисленное на рассматриваемом процессе.*

## 5. Метод улучшения гладких управлений

Опишем общую схему метода:

1. Выберем произвольное допустимое управление $u^0 = u^0(t)$ и положим $k = 0$.

2. По управлению $u^k$ строим решения $x^k$, $y^k$ прямой и $\psi^k$, $p^k$ сопряженной задач.

3. На полученных решениях вычисляем значение функционала $J^k = J(u^k)$ и строим функцию

$$\omega_k(t) = \langle h_u(p^k, y^k, z^k, u^k, t), \dot{u}^k \rangle.$$

Далее в каждой точке отрезка $T$ проверяется условие оптимальности $\omega_k(t) = 0$. Если оно выполнено, то метод заканчивает свою работу.

4. В противном случае строим гладкую вариацию управления по формуле (3.5). Возможны различные конструктивные способы выбора функции $\delta(t)$. В частности, при численных расчетах неплохо показал себя следующий вариант:

$$u^k_{\varepsilon_k}(t) = u^k(t + \varepsilon_k \delta_k(t)), \quad \delta_k(t) = \frac{(t - t_0)(t_1 - t)\omega_k(t)}{(t_1 - t_0) \max\limits_{t \in T} |\omega_k(t)|}.$$

Параметр $\varepsilon_k$ определяем из условия

$$\varepsilon_k : \;\; J(u^k_{\varepsilon_k}) = \min J(u^k_\varepsilon), \;\; \varepsilon \in [0, 1].$$

Случай, когда найденное значение этого параметра близко к нулю, соответствует неулучшению функционала на шаге метода.

5. В качестве очередного приближения выбирается $u^{k+1}(t) = u^k_{\varepsilon_k}(t)$, и итерационный процесс продолжается. Критерием остановки служит одна из следующих ситуаций, полученных на $k$-й итерации метода:

а) выполнение с заданной точностью необходимого условия оптимальности для функции $u^k(t)$. Например, близость к нулю функции $\omega_k(t)$ в каждой точке $t \in T$ можно гарантировать в том случае, если значение $\max\limits_{t\in T} |\omega_k(t)|$ близко к 0 с заданной степенью точности;

б) неулучшение значения функционала по сравнению со значением, полученным на предыдущей $(k-1)$-й итерации.

Последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной:

$$J(u^{k+1}) < J(u^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и сходится к выполнению необходимого условия оптимальности в слабом смысле [3]:

$$\mu(u^k) = \int\limits_T \delta_k(t)\omega_k(t)\,dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отметим, что в силу специфики предлагаемой вариации метод не генерирует новые значения управляющих функций, а лишь «перемешивает» имеющиеся. Поэтому в качестве начальных приближений можно рекомендовать выбирать функции, охватывающие всю область допустимых значений управления. Результаты численных экспериментов показали, что эффективно начинать итерационный процесс с приближений в виде тригонометрических функций типа синуса, косинуса или их комбинаций с маленьким периодом.

## 6. Иллюстративный пример

Проиллюстрируем схему применения метода на простейшем тестовом примере. В квадрате $[0; 3] \times [0; 3]$ рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\frac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} = x_1 - x_2,$$

$$\frac{\partial x_2(s,t)}{\partial t} - 2\frac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} = x_2 + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = u \cdot y(t - 0.25), \;\; y(t) = t + 0.1, \;\; t \in [-0.25; 0];$$

$$x_1(0,t) = 0, \;\; x_1(s,0) = s, \;\; x_2(3,t) = 0, \;\; x_2(s,0) = 0, \;\; u(t) \in [0; 3].$$

Поставим задачу минимизации квадратичного функционала:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int\limits_S [(x_1(s,3) - \overline{x}_1(s))^2 + (x_2(s,3) - \overline{x}_2(s))^2]\, ds \to \min,$$

где функции $\overline{x}_1(s)$, $\overline{x}_2(s)$ подсчитаны на управлении $\overline{u}(t) = 2 + \sin 5t$.

Вспомогательные функции и сопряженная задача имеют следующий вид:

$$H(\psi, x, y, s, t) = \psi_1(x_1 - x_2) + \psi_2(x_2 + y),$$

$$\frac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial s} = -\psi_1, \ \ \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial t} - 2\frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial s} = \psi_1 - \psi_2,$$

$$\psi_i(s,3) = \overline{x}_i(s) - x_i(s,3), \quad i = 1, 2;$$

$$\psi_1(3,t) = 0, \quad \psi_2(0,t) = 0;$$

$$h(p, y, z, u, t) = p \cdot u \cdot z,$$

где $z(t) = y(t - 0,25)$, $p(3) = 0$;

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} -p(t+0,25) \cdot u(t+0,25) - \int\limits_S \psi_2\, ds, & t \in [0; 2,75), \\ -\int\limits_S \psi_2\, ds, & t \in [2,75; 3]. \end{cases}$$

Вычисления проводились в системе MATLAB. Начально-краевая задача для линейной системы гиперболических уравнений решалась численным методом характеристик.

Получены следующие результаты расчетов для начального приближения $u^0(t) = 1 + \cos 2t + \sin(t/4)$: значение целевого функционала на выходе процедуры $J(u^k) = 0.0003427$, невязка условия оптимальности $\max\limits_{t \in T} |\omega_k(t)| = 0,04351$, общее число итераций — 29, причина остановки метода — достижение заданной точности по значению функционала.

## 7. Заключение

Основным результатом статьи является распространение методики [3] исследования задач оптимального управления в классе гладких управляющих функций на случай гибридных систем с постоянным запаздыванием по состоянию. В качестве возможных направлений развития результата можно указать системы с другими типами дифференциальных уравнений и изучение более сложных вариантов запаздывания. Отметим, что именно в случае линейных или полулинейных гиперболических уравнений удается эффективно использовать метод характеристик для доказательства неравенств типа (3.6)–(3.7), необходимых для оценки остаточного члена в формуле приращения целевого функционала. Интересные прикладные задачи для задач с квазилинейными гиперболическими или параболическими уравнениями [2; 14] требуют другого математического аппарата.

## Список источников


1. Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г. Физическое и математическое моделирование экосистем. Санкт-Петербург : Гидрометеоиздат, 1992. 368 с.
2. Апонин Ю. М., Апонина Е. А., Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование пространственно-временной динамики возрастной структуры популяции растений // Математическая биология и биоинформатика. 2006. Т. 1, № 1. С. 1—16.
3. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами. М. : Физматлит, 2007. 186 с.
4. Аргучинцев А. В., Поплевко В. П. Оптимальное управление процессом ректификации в колонне // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2011. Т. 3. С. 32–41.
5. Демиденко Н. Д., Кулагина Л. В. Оптимальное управление технологическим процессом в ректификационных установках // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2017. Т. 10, № 1. С. 95–105. https://doi.org/10.17516/1999-494X-2017-10-1-95-105
6. Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск : Наука, 2006. 551 с.
7. Забелло Л. Е. К теории необходимых условий оптимальности в системах с запаздыванием и производной от управления // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 3. С. 371–379.
8. Забелло Л. Е. Об условиях оптимальности в нелинейных инерционных управляемых системах с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 8. С. 1309–1315.
9. Морозов С. Ф., Сумин В. И. Об одной задаче оптимального управления нестационарными процессами переноса // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2235–2243.
10. Морозов С. Ф., Сумин В. И. О задачах быстродействия в теории оптимального управления процессами переноса // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 4. С. 726–740.
11. Потапов М. М. Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы первого порядка // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 10. С. 1826–1828.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978. 592 с.
13. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER / B. Faugeras, J. Blum, H. Heumann, C. Boulbe // Computer Physics Communications. 2017. Vol. 217. P. 43–57. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.04.003
14. Ruan Weihua. A coupled system of ODEs and quasilinear hyperbolic PDEs arising in a multiscale blood flow model // J. of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 343, Iss. 2. P. 778–796. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.064

15. Vazquez J. L., Zuazua E. Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction // Comm. Partial Differential Equations. 2003. Vol. 28, N 9-10. P. 1705–1738. https://doi.org/10.1081/PDE-120024530

## References

1. Alekseev V.V., Kryshev I.I., Sazykina T.G. *Physical and Mathematical Modeling of Ecosystems.* Saint Petersburg, Hydrometeoizdat Publ., 1992, 368 p. (in Russian)
2. Aponin Yu.M., Aponina E.A., Kuznetsov Yu.A. Mathematical modeling of space-time dynamics of the age structure of the plant population. *Mat. biologiya i bioinformatika*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 1–16. (in Russian)
3. Arguchintsev A.V. *Optimal Control of Hyperbolic Systems.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 186 p. (in Russian)
4. Arguchintsev A.V., Poplevko V.P. Optimal control of process of fractionization in a tower. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2011, vol. 3, pp. 32–41. (in Russian)
5. Demidenko N.D, Kulagina L.V. An optimal process control in the rectification facilities. *Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 95–105. (in Russian) https://doi.org/10.17516/1999-494X-2017-10-1-95-105
6. Demidenko N.D., Potapov V.I., Shokin Y.I. *Modeling and Optimization of Systems with Distributed Parameters.* Novosibirsk, Nauka Publ., 2006, 551 p. (in Russian)
7. Zabello L.E. On the theory of necessary conditions for optimality with delay and a derivative of the control. *Differ. Equations*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 247–254.
8. Zabello L.E. Optimality conditions in nonlinear inertial control systems with delay. *Differ. Equations*, 1990. vol. 26, no. 8, pp. 953–958.
9. Morozov S.F., Sumin V.I. A certain problem of optimal control of nonstationary transport processes. *Differ. Equations*, 1972, vol. 8, no. 12, pp. 2235—2243.
10. Morozov S.F., Sumin V.I. Time-optimality problems in the theory of the optimal control of transfer processes. *Differ. Equations*, 1975, vol. 11, no. 4, pp. 727–740.
11. Potapov M.M.. A generalized solution of a mixed problem for a first-order semilinear hyperbolic system. *Differ. Equations*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 1826–1828.
12. Rozhdestvenskiyi B.L.; Yanenko N.N. *Systems of Quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics.* Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (in Russian)
13. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*, 2017, vol. 217, pp. 43–57. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.04.003
14. Ruan Weihua. A coupled system of ODEs and quasilinear hyperbolic PDEs arising in a multiscale blood flow model. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 343, iss. 2, pp. 778–796. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.064
15. Vazquez J.L., Zuazua E. Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations*, 2003, vol. 28, no. 9-10, pp. 1705—1738. https://doi.org/10.1081/PDE-120024530

## Об авторах

**Аргучинцев Александр Валерьевич**, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

**Поплевко Василиса Павловна**, канд. физ.-мат. наук, доц., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, vasilisa@math.isu.ru

## About the authors

**Alexander V. Arguchintsev**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

**Vasilisa P. Poplevko**, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, vasilisa@math.isu.ru



*Поступила в редакцию / Received* 27.08.2023
*Поступила после рецензирования / Revised* 05.10.2023
*Принята к публикации / Accepted* 12.10.2023