



Серия «Математика»
2023. Т. 45. С. 54–72

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.97

MSC 49J35, 65K10

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54>

Метод триангуляции для приближенного решения вариационных задач нелинейной теории упругости

В. А. Клячин^{1,2✉}, В. В. Кузьмин^{1,2}, Е. В. Хижнякова^{1,2}

¹ Волгоградский государственный университет, Волгоград, Российская Федерация

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская

Федерация,

✉ klchnv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вариационная задача на минимум функционала запасенной энергии в рамках нелинейной теории упругости с учетом допустимых деформаций. Предлагается алгоритм решения этой задачи, основанный на использовании полигонального разбиения расчетной области методом триангуляции Делоне. Найдены условия сходимости метода к локальному минимуму в классе кусочно-аффинных отображений.

Ключевые слова: функционал запасенной энергии, вариационная задача, метод градиентного спуска, триангуляция, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282 от 05.04.2022.

Ссылка для цитирования: В. А. Клячин, В. В. Кузьмин, Е. В. Хижнякова Метод триангуляции для приближенного решения вариационных задач нелинейной теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 54–72.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54>

Research article

Triangulation Method for Approximate Solving of Variational Problems in Nonlinear Elasticity

Vladimir V. Klyachin^{1,2✉}, Vladislav V. Kuzmin^{1,2},
Ekaterina V. Khizhnyakova^{1,2}

¹ Volgograd State University, Volgograd, Russian Federation

² Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

✉ klchnv@mail.ru

Abstract. A variational problem for the minimum of the stored energy functional is considered in the framework of the nonlinear theory of elasticity, taking into account admissible deformations. An algorithm for solving this problem is proposed, based on the use of a polygonal partition of the computational domain by the Delaunay triangulation method. Conditions for the convergence of the method to a local minimum in the class of piecewise affine mappings are found.

Keywords: stored energy functional, variational problem, gradient descent method, Delaunay triangulation, finite element method

Acknowledgements: The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2022-282 from 05.04.2022 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Klyachin V. A., Kuzmin V. V., Khizhnyakova E. V. Triangulation Method for Approximate Solving of Variational Problems in Nonlinear Elasticity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 54–72. (in Russian) <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.54>

1. Введение

Рассмотрим в \mathbb{R}^n некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей. Пусть M_n обозначает множество квадратных матриц F порядка n и $W(x, F) : \Omega \times M_n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторая непрерывная, положительная функция. Для отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_p^1(\Omega)$, $p > 1$ определим функционал $\Phi(\varphi)$ запасенной энергии по формуле

$$\Phi(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) dx. \quad (1.1)$$

Также будем предполагать, что выполнено условие Липшица

$$|W(x', F) - W(x'', F)| \leq L|x' - x''| \quad (1.2)$$

с постоянной $L > 0$, не зависящей от $F \in M_n$. В нелинейной теории упругости [13], [12] часто рассматривают функции $W(x, F)$ вида

$$W(x, F) = W(x, |F|, \text{Adj}(F), \det F), \quad (1.3)$$

где $|F|^2 = \text{tr}(FF^T)$, $\text{Adj}(F) = F^{-T} \cdot \det F$. При этом зависимость от x обычно представляется отдельным слагаемым, характеризующим

внешнее поле сил, например поле силы тяжести. Согласно нелинейной теории упругости [13], [12], [15], форма равновесного состояния упругого тела задается отображением, минимизирующим указанный функционал. Минимум ищется в классе отображений $\varphi \in W_p^1(\Omega)$, для которых $\Phi(\varphi) < +\infty$, $\varphi|_\Gamma = \bar{\varphi}|_\Gamma$, где $\Gamma \subset \partial\Omega$ — часть границы, а отображение $\bar{\varphi}$ задает граничные условия. Остальная часть $\partial\Omega \setminus \Gamma$ задает свободную границу. Пусть также задана функция $M(x) \in L^s(\Omega)$, $s > n - 1$. Как и в [2], [10], [16], мы рассматриваем класс допустимых деформаций

$$A = \{\varphi \in W_n^1(\Omega) : \Phi(\varphi) < +\infty, \frac{|D\varphi|^n}{\det(D\varphi)} < M(x) \text{ п. в. в } \Omega\}. \quad (1.4)$$

Как и в указанных работах, мы предполагаем выполненным условие коэрцитивности: существуют постоянные $\alpha > 0$, $r > 1$ и функция $g \in L^1(\Omega)$, такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(|F|^n + (\det F)^r) + g(x) \quad (1.5)$$

для п. в. $x \in \Omega$ и всех $F \in M_n$, $\det(F) \geq 0$. Условия (1.4), (1.5) обеспечивают существование решения приведенной вариационной задачи (см. [2], [16]). В настоящей работе мы предлагаем схему расчета приближенного решения задачи на минимум указанного функционала, используя кусочно-аффинные аппроксимации отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ и расчетных областей. Отметим, что задачи определения формы упругого деформированного тела возникают в различных прикладных научных направлениях — механика, сопротивление материалов, расчет тонкостенных оболочек. Последние имеют широкое применение, например, в расчетных схемах элементов летательных аппаратов, таких как крылья, фюзеляжи, корпуса.

2. Триангуляция пространственных областей

Симплексом S с вершинами в точках $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ мы называем выпуклую оболочку точек $\{q_i, i = 0, \dots, n\}$. Симплекс называется невырожденным, если векторы $q_1 - q_0, \dots, q_n - q_0$ линейно независимы. Пусть $\{p_i\}, i = 1, \dots, N$ — некоторый набор P точек $p_i \in \mathbb{R}^n$, таких, что любой симплекс в вершинах из $\{p_i\}$ является невырожденным. Триангуляцией T заданного набора точек называется такой набор n -мерных симплексов S_1, \dots, S_m , что: 1) каждая точка p_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$; 2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек $p_i, i = 1, \dots, N$; 3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.

В работах [14], [4] Б. Н. Делоне был предложен метод триангуляции конечного множества точек на основе условия пустого шара. Это условие означает, что описанная сфера каждого симплекса триангуляции не

содержит внутри себя точек заданного конечного множества $\{p_i\}, i = 1, \dots, N$. Триангуляции, для которых выполняется это условие, получили название триангуляции Делоне. В работах [5]– [6] показана важная роль условия Делоне в задаче приближения первых производных при кусочно-линейной аппроксимации гладких функций.

3. Описание алгоритма

Решение задачи ищется для полигональных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в классе кусочно-аффинных преобразований $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Область Ω будем разбивать на n -мерные симплексы путем процедуры триангуляции Делоне. В настоящей работе мы применяем метод конечных элементов, который в случае линейных моделей для задачи линейных упругих деформаций описан в [3]. Следуя этому методу, мы будем считать, что область Ω разбита на симплексы S_1, S_2, \dots, S_m триангуляции Делоне, а точки p_1, p_2, \dots, p_N — вершины этой триангуляции. Для приближенного вычисления значения функционала (1.1) мы будем рассматривать класс кусочно-аффинных отображений $\varphi(x) = A_k(x) + b_k, x \in S_k$, представляющее собой аффинное отображение на каждом симплексе $S_k, k = 1, 2, \dots, m$. Здесь матрицы $A_k \in M_n$ и векторы $b_k \in \mathbb{R}^n$ подбираются так, что отображение φ является непрерывным. Построение такого отображения можно выполнить следующим образом. Зададим значения отображения φ в каждой точке триангуляции $u_i = \varphi(p_i)$. Тогда в силу невырожденности симплекса S_k найдется единственная матрица A_k и вектор b_k такие, что $A_k(p_i) + b_k = u_i$, для вершин $p_i \in S_k$. Пусть q_0, q_1, \dots, q_n — вершины симплекса S_k и $v_j = \varphi(q_j), j = 0, 1, \dots, n$. Выберем $0 \leq l \leq n$. Построим матрицу Q_k , размещая в ее столбцах разности $q_j - q_l, j \neq l$, и матрицу V_k , размещая в ее столбцах разности векторов $v_j - v_l, j \neq l$. Тогда, как несложно видеть, $A_k = V \cdot Q^{-1}$. Будем рассматривать такие кусочно-аффинные отображения, которые на каждом симплексе сохраняют его ориентацию. Это условие является естественным требованием и, в частности, необходимым, чтобы образ триангуляции кусочно-аффинного отображения также являлся триангуляцией — в образе симплексы не должны перекрывать друг друга. Этот факт отмечен в работах [11], [1], [7]. Ясно, что $D\varphi(x) = A_k, x \in S_k$. Тогда будем иметь

$$\Phi(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} W(x, D\varphi(x)) dx = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} W(x, A_k) dx. \quad (3.1)$$

Будем аппроксимировать значение интеграла в (3.1) значением

$$\int_{S_k} W(x, A_k) dx \approx W(x_{S_k}, A_k) |S_k|, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

здесь $|S_k|$ — n -мерная мера Лебега симплекса S_k , а x_{S_k} — его геометрический центр. Или для всего функционала в целом

$$\int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) dx \approx \sum_{k=1}^m W(x_{S_k}, A_k) |S_k|. \quad (3.3)$$

Условие (1.2) позволяет оценить абсолютную погрешность такой аппроксимации. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_k} W(x, A_k) dx - W(x_{S_k}, A_k) |S_k| \right| = \left| \int_{S_k} W(x, A_k) dx - \int_{S_k} W(x_{S_k}, A_k) dx \right| \leq \\ & \leq \int_{S_k} |W(x, A_k) - W(x_{S_k}, A_k)| dx \leq L \max_{x \in S_k} |x - x_{S_k}| |S_k| \leq L \cdot \text{diam}(S_k) |S_k|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем погрешность вычисления значения функционала

$$\begin{aligned} & \left| \Phi(\varphi) - \sum_{k=1}^m W(x_{S_k}, A_k) |S_k| \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^m \int_{S_k} W(x, A_k) dx - \sum_{k=1}^m W(x_{S_k}, A_k) |S_k| \right| \leq \\ & \leq L \sum_{k=1}^m \text{diam}(S_k) \cdot |S_k| \leq L \max_{k=1,2,\dots,m} \text{diam}(S_k) |\Omega|. \end{aligned}$$

Таким образом, если максимальный диаметр разбиения Ω не превосходит некоторого заданного положительного $\varepsilon > 0$, то абсолютная погрешность аппроксимации рассматриваемого функционала не превосходит $L \cdot |\Omega| \varepsilon$. Такого можно добиться, рассматривая дискретные ε -сети и их триангуляции Делоне (см., например [8], [9]). В этих работах показано, что радиус описанных сфер симплексов триангуляции Делоне дискретных ε -сети не превосходит ε . Этим и объясняется, что мы в качестве разбиения расчетной области используем триангуляцию Делоне.

Заметим, что приближенное значение функционала $\Phi(\varphi)$, заданное формулой (3.3), можно представить как функцию

$$\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{k=1}^m W(x_{S_k}, A_k) |S_k|, \quad (3.4)$$

где $u_j = \varphi(p_j) \in \mathbb{R}^n$ — значение отображения $\varphi(x)$ в вершине p_j триангуляции. Таким образом, мы сводим задачу минимизации функционала (1.1) к минимизации функции $\Psi(u)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $u_k \in \mathbb{R}^n$. Как было сказано выше, для всякого набора значений $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$ мы можем построить кусочно-аффинное отображение $\varphi_u(x)$, такое, что $\varphi(p_j) = u_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Такое отображение единственно в силу невырожденности симплексов S_1, S_2, \dots, S_m . Матрицы A_k вычисляем, как и выше. Действительно, пусть q_0, q_1, \dots, q_n — вершины симплекса S_k и v_0, v_1, \dots, v_n — значения отображения $\varphi_u(x)$ в этих точках, т. е. $\varphi_u(q_j) = v_j$. Тогда получим систему уравнений $A_k(q_j - q_0) = v_j - v_0$, $j = 1, \dots, n$. Обозначая матрицы, составленные из столбцов векторов $q_j - q_0$ и $v_j - v_0$ через Q_k и V_k соответственно, получим $A_k = V_k Q_k^{-1}$. В силу невырожденности симплекса S_k матрица Q_k обратима. Таким образом, из (3.4) получаем

$$\Psi(u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{k=1}^m W(x_{S_k}, V_k Q_k^{-1}) |S_k|. \quad (3.5)$$

Из этого равенства легко заметить, что найдется константа $C(p_1, \dots, p_N)$ такая, что

$$|D^2\Psi(u)| \leq C \cdot \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 W}{\partial F^2}(x_{S_k}, V_k Q_k^{-1}) \right|. \quad (3.6)$$

Для построения минимизирующей последовательности воспользуемся методом градиентного спуска. Вкратце опишем его. На первом шаге выберем нулевое приближение $u^0 = \varphi_0(x)$. Далее, выбирая некоторое $\eta > 0$, мы строим итерационный процесс последовательного приближения градиентным спуском по формуле

$$u^t = u^{t-1} - \eta \nabla \Psi(u^{t-1}), t = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Покажем, что найдется постоянная $\eta_0 > 0$ такая, что при всяком $\eta < \eta_0$ последовательность $\Psi(u^t)$ будет убывающей. Действительно, при $t = 0$ можно взять $\eta_0 > 0$ такое, что $\Psi(u^1) < \Psi(u^0)$. Такое η_0 найдется, это можно доказать, используя формулу Тейлора. Пусть $U_0 = \{u : \Psi(u) < \Psi(u^0)\}$. Выберем произвольный куб $\Pi \supset U_0$. Существование такого куба легко доказать из предположения коэрцитивности (1.5) и формулы (3.5). По построению $u^1 \in U_0 \subset \Pi$. Предположим, что $M = \sup_{u \in \Pi} |D^2\Psi|$.

Рассмотрим в кубе два шара $U_0 \subset B_r \subset B_R \subset \Pi$ радиусов $r < R$ и с центром $O \in \Pi$. Найдём условия, при выполнении которых для значений шага

$$\eta < \min \left\{ \frac{2}{M}, \frac{R - r}{\max_{u \in \Pi} |\nabla \Psi(u)|} \right\},$$

некоторая подпоследовательность последовательности u^t будет сходиться к точке локального минимума. Для начала покажем, что при всяком t точка $u^t \in \Pi$. Доказательство проведем по индукции. Мы будем доказывать, что на самом деле всегда $u^t \in B_r$. Действительно, для начала покажем, что $u^t \in B_R$

$$|u^t - O| \leq |u^{t-1} - O| + \eta |\nabla \Psi(u^{t-1})| < r + \frac{R - r}{\max_{u \in \Pi} |\nabla \Psi(u)|} |\nabla \Psi(u^{t-1})| < R.$$

Отсюда следует, что $u^t \in B_R$. Поскольку $\eta < 2/M$, то согласно формуле Тейлора найдется точка \tilde{u} на отрезке $[u^{t-1}, u^t] \subset B_R \subset \Pi$, такая, что

$$\begin{aligned} \Psi(u^t) &= \Psi(u^{t-1} - \eta \nabla \Psi(u^{t-1})) = \\ &= \Psi(u^{t-1}) - \eta |\nabla \Psi(u^{t-1})|^2 + \frac{\eta^2}{2} D_{\tilde{u}}^2(\nabla \Psi(u^{t-1}), \nabla \Psi(u^{t-1})) \leq \\ &\Psi(u^{t-1}) - |\nabla \Psi(u^{t-1})|^2 (\eta - \frac{\eta^2}{2} M) < \Psi(u^{t-1}). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\Psi(u^t)$ убывает и точка $u^t \in U_0 \subset B_r$.

Рассмотрим последовательность вложенных друг в друга замыканий множеств $U_t = \{u : \Psi(u) < \Psi(u^t)\}$. Эта последовательность компактов имеет непустое пересечение $K = \bigcap_{t=0}^{+\infty} \overline{U_t}$. Пусть u^* — предельная точка последовательности u^t . По построению имеем $\Psi(u^*) < \Psi(u^t)$ для всякого $t = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим произвольную точку $u \in \Pi \setminus K$. Поскольку при достаточно больших t выполнено $u \notin U_t$, то $\Psi(u) \geq \Psi(u^t)$. Переходя к пределу, получаем неравенство $\Psi(u) \geq \Psi(u^*)$. Пусть теперь $u \in K$ — произвольная предельная точка компакта K . Рассмотрим последовательность точек $u^s \rightarrow u, s \rightarrow \infty, u^s \notin K$. По доказанному имеет место неравенство $\Psi(u^s) \geq \Psi(u^*)$. Поэтому, переходя к пределу, получаем неравенство $\Psi(u) \geq \Psi(u^*)$. Таким образом нами доказана

Теорема 1. *Всякая предельная точка u^* последовательности u^t удовлетворяет неравенству*

$$\Psi(u^*) \leq \Psi(u) \quad \forall u \in \Pi \setminus K.$$

Следствие 1. *Если множество K нигде неплотно, то всякая предельная точка u^* построенной выше последовательности u^t является точкой локального минимума функции $\Psi(u)$.*

Заметим, что условие следствия 1 выполняются для всякой строго выпуклой функции $\Psi(u)$. Более того, поскольку, как несложно видеть,

$$\partial K \subset \{u : \nabla \Psi(u) = 0\},$$

то условие следствия 1 выполнены, если множество $\{u : \nabla\Psi(u) = 0\}$ имеет нулевую $(n - 1)$ -мерную меру Хаусдорфа.

Теперь для реализации алгоритма градиентного спуска осталось необходимым вычислить вектор градиента $\nabla\Psi(u)$.

4. Вычисление градиента

Поскольку большинство моделей гиперупругих материалов в нелинейной теории упругости используют выражение запасенной энергии в виде (1.3), то получим для начала следующие формулы:

$$\nabla|F|^2 = 2F, \quad (4.1)$$

$$\nabla\det F = \text{Adj}(F), \quad (4.2)$$

$$\nabla|\text{Adj}(F)|^2 = -2F^{-T}\text{Adj}(F)^T\text{Adj}(F) + 2|F^{-T}|^2\text{Adj}(F)(\det F). \quad (4.3)$$

Здесь градиент понимается как градиент для дифференцируемых матричных функций класса $C^1(M_n)$ относительно скалярного произведения

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T \cdot B).$$

Мы называем функцию $g : M_n \rightarrow M_n$ дифференцируемой в некоторой точке $F \in M_n$, если найдется такая матрица $G \in M_n$, что

$$g(F + \varepsilon H) = g(F) + \varepsilon\langle G, H \rangle + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. В таком случае мы пишем $G = \nabla g(F)$. Тогда равенство (4.1) легко доказывается из равенства

$$|F + \varepsilon H|^2 = |F|^2 + 2\varepsilon\langle F, H \rangle + \varepsilon^2|H|^2.$$

Докажем равенство (4.2). Ясно, что $\det(F + \varepsilon H)$ — многочлен степени n от переменной ε . Для произвольной матрицы $A \in M_n$ хорошо известна асимптотическая формула $\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon\text{tr}(A) + o(\varepsilon)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, где E — единичная матрица в M_n . Применяя эту формулу, получаем

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(F + \varepsilon H) = \det(F)\langle F^{-T}, H \rangle = \langle \text{Adj}(F), H \rangle.$$

Тем самым (4.2) доказана. Аналогично, используя асимптотическую формулу $(E + \varepsilon A)^{-1} = E - \varepsilon A + o(\varepsilon)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем (4.3).

Теорема 2. *Предположим, что каждый симплекс S_k данной триангуляции задан перечислением номеров (j_0, j_1, \dots, j_n) своих вершин, причем для вершины p_i мы через l обозначим номер точки p_i в этом наборе.*

Пусть для каждого симплекса S_k вектор w_k обозначает l -й столбец матрицы

$$\frac{\partial W(x_{S_k}, A_k)}{\partial F} \cdot Q_k^{-T},$$

где матрица Q_k составлена из столбцов, равных разностям векторов $p_{j_s} - p_{j_l}$, $s \neq l$. Тогда имеет место равенство

$$\nabla \tilde{\Psi}(u) = \left(\sum_{p_1 \in S_k} w^k |S_k|, \sum_{p_2 \in S_k} w^k |S_k|, \dots, \sum_{p_N \in S_k} w^k |S_k| \right). \quad (4.4)$$

Доказательство. Зафиксируем номер $i = 1, 2, \dots, N$ и рассмотрим некоторый вектор $h_i \in \mathbb{R}^n$. Положим $h = (0, 0, \dots, h_i, \dots, 0)$ и $\tilde{u} = u + \varepsilon h$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\Psi(\tilde{u}) - \Psi(u) = \sum_{p_i \in S_k} (W(x_{S_k}, \tilde{A}_k) - W(x_{S_k}, A_k)) |S_k|,$$

здесь суммирование ведется по симплексам, для которых точка p_i является вершиной. Введем обозначения q_0, q_1, \dots, q_n для вершин симплекса из этой суммы, причем пусть номер l соответствует точке p_i . Также введем обозначения $v_j = \varphi_u(q_j)$ и $\tilde{v}_j = \varphi_{\tilde{u}}(q_j)$. Напомним, что матрицы A_k, \tilde{A}_k являются матрицами аффинных отображений вида $A_k x + b_k, \tilde{A}_k x + \tilde{b}_k$, таких, что $A_k q_j + b_k = v_j, \tilde{A}_k q_j + \tilde{b}_k = \tilde{v}_j$. Теперь вычтем j -е уравнение первой системы из j -го уравнения второй системы. Будем иметь $(\tilde{A}_k - A_k)q_j + \tilde{b}_k - b_k = \tilde{v}_j - v_j$. Вычтем из каждого получившегося уравнения уравнение с номером $j = 0$, получим $(\tilde{A}_k - A_k)(q_j - q_0) = \tilde{v}_j - v_j - (\tilde{v}_0 - v_0)$. Пусть Q_k — матрица, составленная из векторов $q_j - q_0$ как столбцов. Эта матрица невырождена, поскольку симплекс, составленный из вершин q_0, q_1, \dots, q_n , является невырожденным. Построим также матрицу V_k из правых частей системы, взяв их в качестве столбцов. Тогда получим матричное уравнение $(\tilde{A}_k - A_k)Q_k = V_k$, откуда $(\tilde{A}_k - A_k) = V_k Q_k^{-1}$. Заметим, что по построению $\tilde{v}_j = v_j$ при $j \neq l$, и $\tilde{v}_l - v_l = \varepsilon h_i$. Поэтому в матрице V_k только один ненулевой столбец с номером l , значит $V_k = \varepsilon V_k^*$. Причем этот столбец состоит из координат вектора εh_i . Поскольку матрица Q_k не зависит от ε , получаем $(\tilde{A}_k - A_k) = \varepsilon V_k^* Q_k^{-1}$. Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{u}) - \Psi(u) &= \sum_{p_i \in S_k} (W(x_{S_k}, \tilde{A}_k) - W(x_{S_k}, A_k)) |S_k| = \\ &= \sum_{p_i \in S_k} (W(x_{S_k}, A_k + \varepsilon V_k^* Q_k^{-1}) - W(x_{S_k}, A_k)) |S_k| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p_i \in S_k} \left(\left\langle \frac{\partial W(x_{S_k}, A_k)}{\partial F}, \varepsilon V_k^* Q_k^{-1} \right\rangle + o(\varepsilon) \right) |S_k|.$$

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что

$$\left\langle \frac{\partial W(x_{S_k}, A_k)}{\partial F}, \varepsilon V_k^* Q_k^{-1} \right\rangle = \langle w^k, h_i \rangle,$$

где w^k — l -й столбец матрицы $\frac{\partial W(x_{S_k}, A_k)}{\partial F} \cdot Q_k^{-T}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \Psi(u)}{\partial h_i} = \sum_{p_i \in S_k} \langle w^k, h_i \rangle |S_k|.$$

Откуда непосредственно следует (4.4). Теорема доказана. \square

5. Моделирование ограничений

Для итерационного процесса минимизации функционала (1.1) нам требуется выполнить условия на части границы $\Gamma \subset \partial\Omega$ и условия принадлежности решения задачи классу допустимых деформаций. При расчете нового вектора значений (u^1, \dots, u^N) по формуле (3.7) для обеспечения граничных условий достаточно для вершин $p_i \in \Gamma$ задавать значение градиента $\nabla \Psi(u) = 0$. В таком случае, если для первоначального приближения u^0 для отображения $\varphi_{u_0}(x)$ граничные условия будут выполнены, то и для последующих итераций u^t это условие будет выполняться.

Для моделирования класса допустимых деформаций (1.4) будем считать, что соответствующая функция $M(x)$ задана в вершинах триангуляции $m_i = M(p_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Величину отношения $\frac{|D\varphi|^n}{\det(D\varphi)}$ будем приближать средним значением этих же отношений для кусочно-аффинной функции $\varphi_u(x)$, вычисленных по всем симплексам, имеющим точку p_i в качестве вершины. Учитывая, что в каждом симплексе S_k , таком, что $p_i \in S_k$, матрица Якоби $D\varphi_u(x)$ есть постоянная матрица $A_k \in M_n$, получаем

$$\frac{|D\varphi(p_i)|^n}{\det(D\varphi(p_i))} \approx \frac{1}{L_i} \sum_{p_i \in S_k} \frac{|A_k|^n}{\det(A_k)}.$$

Здесь L_i — число симплексов, инцидентных вершине p_i . Получим выражение правой части этого соотношения в терминах значений отображения $\varphi_u(x)$ в вершинах симплексов, участвующих в этой сумме. Рассмотрим отдельный симплекс S_k , такой, что $p_i \in S_k$. Пусть q_0, q_1, \dots, q_n — его вершины и $v_j = \varphi_u(q_j)$. Тогда имеют место равенства $A_k(q_j) + b_k =$

v_j , $j = 0, \dots, n$. Предположим $q_l = p_i$. Тогда, вычитая l -е равенство из всех остальных, получаем систему $A_k(q_j - q_l) = v_j - v_l$ $j \neq l$. Обозначая через Q_k, V_k матрицы, составленные из векторов $q_j - q_l$ и $v_j - v_l$ соответственно и взятых в качестве их столбцов, будем иметь матричное уравнение $A_k Q_k = V_k$. Откуда $A_k = V_k Q_k^{-1}$. Поскольку мы предполагаем, что симплексы триангуляции невырождены, то матрица Q_k обратима и, следовательно, последнее равенство корректно. Таким образом, получаем соотношение

$$\frac{|D\varphi(p_i)|^n}{\det(D\varphi(p_i))} \approx \frac{1}{L_i} \sum_{p_i \in S_k} \frac{|V_k Q_k^{-1}|^n}{\det(V_k Q_k^{-1})}.$$

Нетрудно видеть, что произведение $A_k Q_k^{-1}$ не зависит от нумерации вершин симплекса S_k и однозначно определено только множеством его вершин и значений отображения $\varphi_u(x)$. Таким образом, ограничения, заданные допустимыми деформациями в (1.4), мы можем для кусочно-аффинных отображений записать в виде

$$\frac{1}{L_i} \sum_{p_i \in S_k} \frac{|V_k Q_k^{-1}|^n \det(Q_k)}{\det(V_k)} < m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1)$$

Теперь рассмотрим вопрос выполнения этого неравенства при переходе к следующей итерации градиентного спуска согласно вычислительной схеме (3.7). Для каждого симплекса в этой сумме (5.1) введем следующую матрицу W_k . Она будет составлена из столбцов, которые являются разностью компоненты вектора (4.4), соответствующей точке q_j , и компонентны, соответствующей точке q_l . Тогда согласно (3.7) матрица V_k значений отображения $\varphi_u(x)$ будет меняться по формуле $\tilde{V}_k = V_k - \eta W_k$. Следовательно, неравенство (1.4) переписется в виде

$$\frac{1}{L_i} \sum_{p_i \in S_k} \frac{|V_k Q_k^{-1}|^n - \eta n |V_k Q_k^{-1}|^{n-2} \langle V_k Q_k^{-1}, W_k Q_k^{-1} \rangle + o(\eta)}{\det(V_k Q_k^{-1}) (1 - \eta \text{tr}(Q_k V_k^{-1} W_k Q_k^{-1} + o(\eta)))} < m_i,$$

$i = 1, 2, \dots, N$. При малых значениях параметра η это неравенство выполняется, если оно выполнено при $\eta = 0$. Другими словами, на следующей итерации вычислительного процесса (3.7) необходимое ограничение на допустимую деформацию мы сможем обеспечить, если оно выполнено на текущей итерации.

6. Метод координатного спуска

Рассмотрим еще одну процедуру построения приближенного решения вариационной задачи. Процесс построения начинается с выбора

некоторого нулевого приближения u^0 . Затем мы выбираем последовательно точки p_1, \dots, p_N , которые не принадлежат $\Gamma \subset \Omega$, и решаем локальную вариационную задачу на минимум величины

$$\sum_{k:S_k \ni p_i} W(x_{S_k}, A_k) |S_k|. \quad (6.1)$$

Здесь сумма берется только по тем симплексам, для которых точка p_i является вершиной. В этой задаче ищется значение отображения $\varphi_u(x)$ в точке p_i , при котором величина (6.1) достигает минимального значения. Решение этих задач дает новые элементы искомой последовательности u^1, u^2, \dots, u^N . Продолжая этот процесс по аналогии, мы получаем последовательность $u^t, t = 0, 1, 2, \dots$, для которой имеет место неравенство $\Psi(u^t) \leq \Psi(u^{t-1})$. Рассуждая как и выше, мы можем сделать вывод, что для этой последовательности справедлива теорема 1 и ее следствие 1. Покажем для некоторого частного случая разрешимость локальной вариационной задачи.

Теорема 3. *Предположим, что функция $W(F)$ имеет вид*

$$W(F) = a(|F|) + \Gamma(\det F), \quad (6.2)$$

где a, Γ — положительные, строго выпуклые функции на интервале $(0, +\infty)$, причем $a(+\infty) = +\infty, \Gamma(0+) = +\infty$. Тогда для каждой точки p_i задача на минимум функции (6.1) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим отдельный симплекс S_k в сумме (6.1). Обозначим через q_0, \dots, q_n его вершины, а v_0, \dots, v_n — значения отображения $\varphi_u(x)$ в этих точках $\varphi_u(q_j) = v_j$. Не ограничивая общности, будем считать, что $q_n = p_i$. Зададим вектор $h \in \mathbb{R}^n$ смещения значения отображения в точке p_i . Тогда $A_k q_j + b_k = v_j, j = 0, \dots, n-1, A_k q_n = v_n + h$. Вычитая из полученных уравнений уравнение при $j = 0$, получим $A_k(q_j - q_0) = v_j - v_0, A_k(q_n - q_0) = v_n - v_0 + h$. Как и выше, запишем эту систему уравнений в матричном виде

$$A_k Q_k = V_k + H, \quad (6.3)$$

где у матрицы H все столбцы нулевые, кроме последнего, который равен вектору h . Подставляя в (6.1) и учитывая (6.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k:S_k \ni p_i} W(x_{S_k}, A_k) |S_k| &= \sum_{k:S_k \ni p_i} (a(|A_k|) + \\ &+ \Gamma(\det(A_k))) |S_k| = \sum_{k:S_k \ni p_i} a(|A_k|) |S_k| + \sum_{k:S_k \ni p_i} \Gamma(\det(A_k)) |S_k|. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция, задаваемая равенством (6.4), есть строго выпуклая функция относительно вектора смещения h . Первое слагаемое представляет собой сумму

выпуклых функций с положительными коэффициентами, потому является выпуклой. Докажем выпуклость второго слагаемого. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $A \in M_n$ — невырожденная матрица с коэффициентами a_{ij} . Рассмотрим два вектора $u, v \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $u_i, v_i, i = 1, \dots, n$. Тогда имеет место равенство

$$\det(\|a_{ij} + u_i v_j\|) = \det(A) \cdot (1 + \langle A^{-1}u, v \rangle) = \det(A) + \langle u, \text{Adj}(A) \cdot v \rangle.$$

Доказательство. Для начала предположим, что A — это единичная матрица. Доказательство проведем по индукции. Представим первый столбец матрицы $\delta_{ij} + u_i v_j$ в виде суммы столбцов

$$(1, 0, \dots, 0)^T \text{ и } (u_1 v_1, u_2 v_1, \dots, u_n v_1)^T.$$

Тогда, используя предположение индукции для матриц меньшего порядка, получим

$$\det(\delta_{ij} + u_i v_j) = 1 + \sum_{i=2}^n u_i v_i + \det \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & 1 + u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i v_1 & u_i v_2 & \dots & u_i v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & 1 + u_n v_n \end{pmatrix}.$$

Теперь вынесем из первой строки величину u_1 , а из первого столбца v_1 , получим

$$\det(\delta_{ij} + u_i v_j) = 1 + \sum_{i=2}^n u_i v_i + u_1 v_1 \det \begin{pmatrix} 1 & v_2 & \dots & v_n \\ u_2 & 1 + u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i & u_i v_2 & \dots & u_i v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_n v_2 & \dots & 1 + u_n v_n \end{pmatrix}.$$

Вычитая из каждой строки первую строку, умноженную на u_i , легко убедиться, что последний определитель равен 1. Таким образом, $\det(\delta_{ij} + u_i v_j) = 1 + \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Общий случай сводится к доказанному заменой вектора u на вектор $A^{-1}u$. Лемма доказана. \square

Теперь домножим равенство (6.3) на V_k^{-1} справа, получим

$$A_k Q_k V_k^{-1} = E + H V_k^{-1}.$$

Замечая, что коэффициенты матрицы HV_k^{-1} представляют собой попарные произведения координат вектора смещения h и вектора g_k , составленного из элементов последней строки матрицы V_k^{-1} на основании леммы 1, получаем равенство

$$\det(A_k) = \frac{\det(V_k)}{\det(Q_k)} (1 + \langle h, g_k \rangle).$$

Таким образом, функция $\det(A_k)$ относительно вектора h является суммой линейной функции и константы. Поэтому $\Gamma(\det(A_k))$ — выпуклая функция относительно вектора смещения h . Тогда таковым является и второе слагаемое в (6.4). Теорема доказана. \square

Запишем теперь ограничения (1.4), (5.1) в терминах вектора смещения h . Из доказательства теоремы 3 имеем $|A_k| \leq |Q_k^{-1}|(|V_k| + |H|)$. Замечая, что $|H| = |h|$, будем иметь $|A_k| \leq |Q_k^{-1}|(|V_k| + |h|)$. Учитывая выражение для определителя A_k , получаем оценку

$$\frac{|A_k|^n}{\det(A_k)} \leq \frac{|Q_k^{-1}|(|V_k| + |h|)^n \det(Q_k)}{\det(V_k)(1 + \langle h, g_k \rangle)}.$$

Следовательно, в соответствии с (5.1) ограничения на вектор смещения запишем в виде

$$\frac{1}{L_i} \sum_{S_k \ni p_i} \frac{|Q_k^{-1}|(|V_k| + |h|)^n \det(Q_k)}{\det(V_k)(1 + \langle h, g_k \rangle)} < m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Отметим геометрический смысл вектора g_k . Этот вектор ортогонален грани симплекса $\varphi_u(S_k)$, лежащей напротив вершины $u_i = \varphi_u(p_i)$, направленный в сторону этой вершины и имеющий длину, равную обратной величине длины высоты симплекса $\varphi_u(S_k)$, опущенной из вершины u_i на противоположную грань. Тогда легко понять условие положительности определителя матрицы A_k , оно имеет вполне геометрическую интерпретацию. Положительность всех определителей $\det(A_k)$ соответствующих симплексов, инцидентных вершине p_i , означает, что значение отображения $\varphi_u(p_i)$ должно быть внутри объединения симплексов $\varphi_u(S_k)$, имеющих точку u_i в качестве вершины, т. е.

$$u_i + h \in \bigcup_{S_k \ni p_i} \varphi_u(S_k).$$

Это дискретная интерпретация условия инъективности отображения $\varphi_u(x)$.

7. Программная реализация

Для выполнения расчетов была написана программа с графическим пользовательским интерфейсом на базе платформенно независимой библиотеки Qt5 на языке программирования C++. Визуализация результатов расчетов реализована с возможностью 3D-обзора расчетной области в специальном окне программы. С этой целью использовалась открытая графическая библиотека трехмерной графики OpenGL. В качестве примеров расчетов в программу заложены следующие модели материалов [12]:

- материалы Огдена,

$$W(x, F) = \sum_{i=1} n_1 a_i \text{tr}(C)^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1} n_2 b_j \text{Adj}(C)^{\delta_j/2} + \Gamma(\det(F)),$$

здесь $C = F^T F$, $a_i, b_j > 0$, $\gamma_i, \delta_j \geq 1$ и $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, такая, что $\Gamma(\delta) \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0+$;

- неогукеры материалы, $W(F) = a|F|^2 + \Gamma(\det F)$;
- материалы Муни – Ривлина, $W(F) = a|F|^2 + b|\text{Adj}F|^2 + \Gamma(\det F)$; где $a > 0, b > 0, \Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \log \delta, c, d > 0$.
- материалы Сен-Венана – Кирхгофа, $W(F) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E)^2 + \frac{\mu}{2} \text{tr}(E^2)$, $I + 2E = F^T F$;
- материалы Адамара – Грина, $W(F) = \frac{\alpha}{2}|F|^2 + \frac{\beta}{4} \{|F|^4 - |FF^T|^2\} + \Gamma(\det F)$, где $\alpha, \beta > 0$.

На данный момент в программе релизован алгоритм, описанный в частях 2–4 настоящей статьи. На рис. 1 изображен пример представления промежуточного результата расчета в окне программы. Специальный вид этого окна программы позволяет осуществлять пространственный обзор трехмерной модели расчетной формы по разным ракурсам. Исходная форма, заданная расчетной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, закрашивается в светло-коричневый цвет. Сама форма тела представлена в виде тетраэдральной сетки. На правой панели окна программы пользователь может выбирать и настраивать параметры указанных выше моделей материалов.

Кроме этого, в программе предусмотрена возможность задавать потенциал внешних сил (например, поля сил тяжести) в виде дополнительного скалярного слагаемого $W(x, F) = W(F) + g(x), x \in \Omega$. Также программа позволяет сохранить результат расчета в виде файла стандартного формата OBJ для просмотра в любой программе 3D-графики.

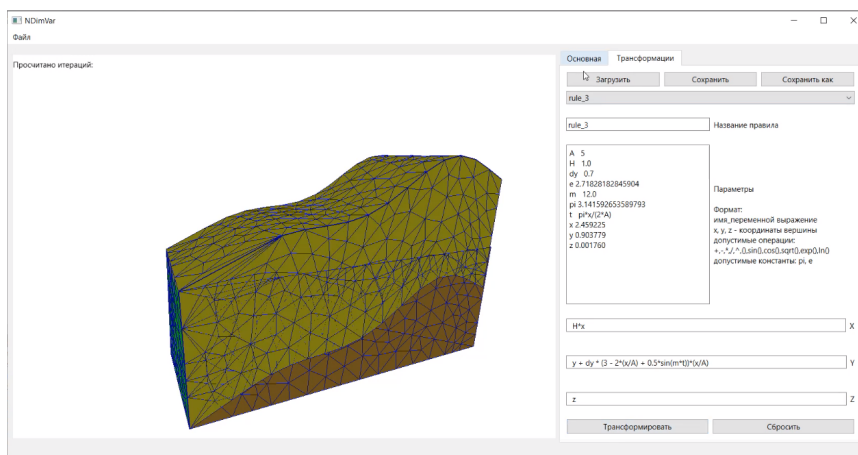


Рис. 1. Вид главного окна программы с возможностью 3D-обзора результатов расчетов

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору С.К. Водопьянову за полезные обсуждения по теме настоящей статьи.

8. Заключение

В статье описан метод расчета формы области при упругих деформациях на основе метода конечных элементов и триангуляции Делоне с учетом допустимых деформаций. Для обоснования использования предложенного метода доказан ряд утверждений о сходимости итерационного процесса к точке локального минимума. На основе результатов статьи разработано программное обеспечение для визуализации формы деформированного тела для различных моделей упругих материалов.

Список источников

1. Болучевская А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 1-2. С. 20–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-20-23>
2. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526. <https://doi.org/10.7868/S086956521535008X>
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М. : Мир, 1979. 576 с.
4. Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм // Успехи математических наук. 1937. Вып. 3. С. 16–62.

5. Клячин В. А., Широкий А. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // Известия вузов. Математика. 2012. № 1. С. 31–39. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045>
6. Клячин В. А., Пабат Е. А. C^1 -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 69–78.
7. Клячин В. А., Чебаненко Н. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. 2014. №3 (22). С. 56–60.
8. Клячин В. А. О многомерном аналоге примера Шварца // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 4. С. 41–48. <https://doi.org/10.4213/im6845>
9. Клячин В. А. Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента // Известия РАН. Серия математическая. 2016. Т. 80, № 3. С. 95–102. <https://doi.org/10.4213/im8350>
10. Молчанова А. О. Вариационно-аппроксимативный подход к динамическим задачам теории упругости на новом классе допустимых деформаций // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 5. С. 55–60. <https://doi.org/10.17377/PAM.2016.16.305>
11. Прохорова М. Ф. Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129. <https://doi.org/10.1134/S0081543808050155>
12. Сьярле Ф. Математическая теория упругости : пер. с англ. М. : Мир, 1992. 472 с.
13. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. N 63. P. 337–403.
14. Delaunay B. N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi // Известия АН СССР. 1934. № 6. С. 793–800.
15. Optimal control of soft materials using a Hausdorff distance functional / R. Ortigosa, J. Martinez-Frutos, C. Mora-Corral, P. Pedregal, F. Periago // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59, N 1. P. 393–416. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25255.50084>
16. Vodopyanov S. K., Molchanova A. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. Vol. 59. P. 1–25. <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1671-4>

References

1. Boluchevskaya A.V. On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 20–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-20-23> (in Russian)
2. Vodop'yanov S.K., Molchanova A.O. Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 739–742. <https://doi.org/10.7868/S086956521535008X> (in Russian)
3. Glowinski R., Lions J.-L., Tremolieres R. *Numerical analysis of variational inequalities*. Moscow, Mir Publ., 1979, 576 p. (in Russian)
4. Delone B.N. Geometry of positive quadratic forms. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1937, no. 3, pp. 16–62. (in Russian)

5. Klyachin V.A., Shirokii A.A. The Delaunay triangulation for multidimensional surfaces and its approximative properties. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, pp. 27–34. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045> (in Russian)
6. Klyachin V.A., Pabat E.A. The C^1 -approximation of the level surfaces of functions defined on irregular meshes. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 69–78. (in Russian)
7. Klyachin V.A., Chebanenko N.A. About linear preimages of continuous maps, that preserve orientation of triangles. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2014, no. 3, pp. 56–60. (in Russian)
8. Klyachin V.A. On a multidimensional analogue of the Schwarz example. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 681–687. <https://doi.org/10.4213/im6845> (in Russian)
9. Klyachin V.A. Modified Delaunay empty sphere condition in the problem of approximation of the gradient. *Izvestiya: Mathematics*, 2016. vol. 80, no. 3, pp. 549–556. <https://doi.org/10.4213/im8350> (in Russian)
10. Molchanova A. A variational approximation scheme for the elastodynamic problems in the new class of admissible mappings. *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 16, no. 3. pp. 55–60. <https://doi.org/10.17377/PAM.2016.16.305> (in Russian)
11. Prokhorova M.F. Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 261, no. 1, pp. 165–182. <https://doi.org/10.1134/S0081543808050155> (in Russian)
12. Ciarlet Ph. *Mathematical Elasticity*. Moscow, Mir Publ., 1992, 472 p.
13. Ball J.M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 1977, no. 63, pp. 337–403.
14. Delaunay B.N. Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi. *Izvestiya: Mathematics*, 1934, no. 6, pp. 793–800.
15. Ortigosa R., Martinez-Frutos J., Mora-Corral C., Pedregal P., Periago F. Optimal control of soft materials using a Hausdorff distance functional. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, no. 1, pp. 393–416. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25255.50084>
16. Vodopyanov S.K., Molchanova A. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity. *Calculus of Variations and PDE*, 2020, vol. 59, pp. 1–25. <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1671-4>

Об авторах

Клячин Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Волгоградский государственный университет, Волгоград, 400062, Российская Федерация, klchnv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>

About the authors

Vladimir A. Klyachin, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russian Federation, klchnv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>

Кузьмин Владислав Вячеславович, аспирант,
Волгоградский государственный
университет, 400062, Российская
Федерация, Волгоград,
vlad329@yandex.ru,
<https://orcid.org/0009-0004-2788-9396>

Хижнякова Екатерина Владимировна, ст. преп.,
Волгоградский государственный
университет, 400062, Российская
Федерация, Волгоград,
kate1995yakovleva@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-7914-9988>

Vladislav V. Kuzmin,
Postgraduate, Volgograd State
University, Volgograd, 400062, Russian
Federation, vlad329@yandex.ru,
<https://orcid.org/0009-0004-2788-9396>

Ekaterina V. Khizhnyakova, Senior
Lecturer, Volgograd State University,
Volgograd, 400062, Russian
Federation,
kate1995yakovleva@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-7914-9988>

Поступила в редакцию / Received 10.05.2023

Поступила после рецензирования / Revised 16.06.2023

Принята к публикации / Accepted 23.06.2023