Серия «Математика»
2023. Т. 45. С. 37—53

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 34G25, 93E10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.37

Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем

Б. И. Ананьев[1✉], П. А. Юровских[1]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация
✉ abi@imm.uran.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы гарантированного оценивания нелинейных многошаговых систем, для которых часть координат является ненаблюдаемой. Для возмущений заданы суммарные априорные ограничения с неотрицательными полунепрерывными функциями, что включает также и геометрические ограничения. Приведены как общие формулы для построения информационных множеств, так и их конкретизация в частных случаях. В качестве примеров рассмотрены двумерные логистические системы и уравнения Лотки – Вольтерры. Отдельно рассмотрен случай линейных уравнений, где используются опорные функции выпуклых множеств. При геометрических ограничениях на возмущения приведена огрубленная процедура оценивания с возможным использованием функций расстояния до множества.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, многошаговые системы, информационное множество, область достижимости

Ссылка для цитирования: Ананьев Б. И., Юровских П. А. Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 37–53.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.37

Research article

Guaranteed Estimation Problem for Multi-Step Systems

Boris I. Ananyev[1✉], **Polina A. Yurovskikh**[1]

[1] Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation

✉ abi@imm.uran.ru

Abstract. Questions of the guaranteed estimation of nonlinear multistep systems are considered, for which part of coordinates is not observable. For disturbances we set a priori restrictions with non-negative semi-continuous functions that includes geometrical restrictions as well. As the general formulas for creation of information sets and their specification in special cases are provided. Two-dimensional logistics systems and the equations of Lotka-Volterra are considered as examples. The case of the linear equations where basic functions of convex sets are used is separately considered. Under geometrical restrictions on disturbances the rough procedure of estimation with possible use of functions of distance to the set is given.

Keywords: guaranteed estimation, multistep systems, information set, set of attainability

For citation: Ananyev B. I., Yurovskikh P. A. Guaranteed Estimation Problem for Multi-Step Systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 37–53. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.37

1. Введение и постановка задачи

Теория гарантированного оценивания детерминированных динамических систем является важной частью современной теории управления [7]. Обзор методов можно найти, например, в [9]. Одной из основополагающих статей по задачам оценивания нелинейных многошаговых систем стала работа [4]. В ней решение задач сводится к описанию эволюции в фазовом пространстве некоторых информационных областей, содержащих все состояния системы, совместимые как с результатами измерений, так и с априорными ограничениями на неопределенные возмущения. Описание указанных областей в случае как выпуклых, так и невыпуклых множеств сводится к решению некоторых классов экстремальных задач с функциями уровня. В линейном случае иногда удобнее использовать опорные функции [3]. В работе [4] и во многих других работах по этой тематике задаются априорные геометрические ограничения на возмущения, а также выделяется отдельно уравнение измерения. В настоящей работе мы рассматриваем общую нелинейную систему, в которой часть координат наблюдается, а часть нет. Кроме того, задаются суммарные априорные ограничения на возмущения с полунепрерывными функциями. Данная постановка охватывает, по нашему мнению, все известные формулировки задач гарантированного оценивания фазового вектора. Отметим также, что за последние десятилетия существенно изменилась вычислительная база, что позволило разработать алгоритмы, которые ранее невозможно было реализовать.

Исследуемые многошаговые системы можно рассматривать двояко. С одной стороны, они служат аппроксимациями непрерывных, а с другой — они имеют и самостоятельное значение. Особенно это относится к ряду хаотических динамических систем. Изучаемые системы и их оценки находят широкое применение на практике, например, в химических реакциях [10] и робототехнике [8]. В последней работе метод решения основан на замене компактов ограничения конечными множествами и последующим построением выпуклых оболочек множеств достижимости. Данный подход не совсем сочетается с нашими задачами, поскольку весьма часто информационные множества оказываются несвязными. Их овыпукление приводит к значительному огрублению оценок. Мы предлагаем другой подход с использованием функций расстояния до замкнутых множеств. Эти функции хорошо известны и их свойства подробно описаны, например, в [2]. С помощью функций расстояния определяются пересечения и объединения невыпуклых множеств.

Будем рассматривать здесь многошаговую систему

$$\begin{gathered} y_k = g_k(y_{k-1}, z_{k-1}, v_k), \quad z_k = f_k(y_{k-1}, z_{k-1}, v_k), \\ y_k \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad z_k \in \mathbb{R}^m, \quad v_k \in \mathbb{R}^q, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$; y_k — наблюдаемые координаты, а z_k — ненаблюдаемые. Возможен случай $m = n$, когда все координаты системы ненаблюдаемы. Возмущения v_k и неизвестные начальные состояния z_0 ограничены

$$F_0(z_0) + \sum_{k \in 1:N} F_k(v_k) \leqslant 1, \tag{1.2}$$

где функции F_k неотрицательны и полунепрерывны снизу, причем все множества $\{v : F_k(v) \leqslant 1\}$ компактны, $k \in 0 : N$, и множества $\{v : F_k(v) = 0\} \neq \varnothing$. Функции f_k и g_k предполагаются непрерывными. Здесь и далее символом $m : n$ обозначается множество целых чисел от m до n включительно.

Предположим, что имеется набор векторов $v^*_{1:N}$ и начальное состояние z^*_0, удовлетворяющие ограничениям (1.2) и порождающие сигнал $y_{1:N}$. Задача состоит в следующем. Для каждого $k \in 1 : N$ требуется найти информационное множество (ИМ) $Z_k(y)$, состоящее из векторов z_k, совместимых с набором $y_{1:k}$, т. е. таких, что для них найдутся векторы $v_{1:k}$ и z_0, удовлетворяющие ограничениям (1.2), порождающие сигнал $y_{1:k}$ и траекторию $z_{1:k}$ ненаблюдаемых координат с конечной точкой z_k. По построению $Z_k(y) \neq \varnothing$, $\forall k \in 1 : N$, поскольку $z^*_k \in Z_k(y)$.

В данной работе условимся обозначать вертикальную конкатенацию матриц (векторов) A и B подходящих размеров через $[A; B]$, а горизонтальную — через $[A\ B]$.

2. Построение информационных множеств

Введем в рассмотрение множества

$$\begin{gathered} G_1(y) = \{[z_0; v_1] : y_1 = g_1(y_0, z_0, v_1), \quad F_0(z_0) + F_1(v_1) \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^{m+q}, \\ \mathcal{D}_1(y) = \{z_1 : z_1 = f_1(y_0, z_0, v_1), \quad [z_0; v_1] \in G_1(y)\} \subset \mathbb{R}^m, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathcal{D}_1(y)$ — область достижимости (ОД) для $k = 1$. Определим функцию

$$V_1(y, z_1) = \min_{[z_0; v_1] \in G_1(y), z_1 = f_1(y_0, z_0, v_1)} \{F_0(z_0) + F_1(v_1)\}, \tag{2.2}$$

где $z_1 \in \mathcal{D}_1(y)$ и минимум берется по $[z_0; v_1]$. Если $z_1 \notin \mathcal{D}_1(y)$, полагаем $V_1(y, z_1) = 2$. Нас интересует неравенство $V_1(y, z_1) \leqslant 1$, которое определяет соответствующее множество $Z_1(y) = \{z_1 : V_1(y, z_1) \leqslant 1\}$.

Предположим, что для индексов $i \in 1 : k-1$ множества $Z_i(y)$ и соответствующие функции $V_i(y, z_i)$ уже построены так, что $Z_i(y) = \{z_i : V_i(y, z_i) \leqslant 1\}$. Тогда по аналогии с (2.1) определяем

$$\begin{gathered} G_k(y) = \{[z_{k-1}; v_k] : y_k = g_k(y_{k-1}, z_{k-1}, v_k),\ V_{k-1}(y, z_{k-1}) + F_k(v_k) \leqslant 1\}, \\ \mathcal{D}_k(y) = \{z_k : z_k = f_k(y_{k-1}, z_{k-1}, v_k),\ [z_{k-1}; v_k] \in G_k(y)\}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $G_k(y) \subset \mathbb{R}^{m+q}$, а $\mathcal{D}_k(y) \subset \mathbb{R}^m$ — ОД на k-м шаге. Далее, как в (2.2), рекуррентно определяем функцию

$$V_k(y, z_k) = \min_{[z_{k-1}; v_k] \in G_k(y),\ z_k = f_k(y_{k-1}, z_{k-1}, v_k)} \{V_{k-1}(y, z_{k-1}) + F_k(v_k)\},$$

где $z_k \in \mathcal{D}_k(y)$ и минимум берется по $[z_{k-1}; v_k]$. Если $z_k \notin \mathcal{D}_k(y)$, полагаем $V_k(y, z_k) = 2$. Утверждается, что множества

$$Z_k(y) = \{z_k : V_k(y, z_k) \leqslant 1\} \tag{2.4}$$

являются искомыми ИМ и, более того, множества $\mathcal{D}_k(y)$ в (2.3) и $Z_k(y)$ в (2.4) совпадают. Отметим, что уравнения (2.3) включают (2.1), если положить $V_0(y, z_0) = F_0(z_0)$. В предлагаемых обозначениях множеств в (2.1)–(2.4) считается, что буква y заменяет набор векторов $y_{1:k}$.

Теорема 1. *Множества* (2.4) *являются непустыми и совпадают с ИМ для системы* (1.1) *с ограничениями* (1.2).

Доказательство. Пусть вектор z_k^* принадлежит ИМ в момент k. Тогда существует набор $v_{1:k}^*$ и начальное состояние z_0^*, совместимые с $y_{1:k}$, удовлетворяющие ограничению (1.2) и порождающие такую траекторию $z_{1:k}$, что $z_k = z_k^*$. Имеем $F_0(z_0^*) + F_1(v_1^*) \leqslant 1$, $z_1 \in \mathcal{D}_1(y)$ и $V_1(y, z_1) \leqslant F_0(z_0^*) + F_1(v_1^*) \leqslant 1$. Продолжая по индукции, находим, что $V_k(y, z_k^*) \leqslant V_{k-1}(y, z_{k-1}) + F_k(v_k^*) \leqslant 1$ и $z_k^* \in \mathcal{D}_k(y)$. Обратно, если $V_k(y, z_k^*) \leqslant 1$, то найдется набор $v_{1:k}^*$ и начальное состояние z_0^*, совместимые с $y_{1:k}$, удовлетворяющие ограничению (1.2) и порождающие такую траекторию $z_{1:k}$, что $z_k = z_k^* \in \mathcal{D}_k(y)$. □

Для иллюстрации теоремы 1 рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть система (1.1) имеет вид

$$z_k = z_{k-1} + y_{k-1} + 2v_k, \quad y_k = y_{k-1} + z_{k-1} + v_k, \quad z_k, y_k \in \mathbb{R}^n,$$

а ограничения заданы неравенством (1.2). Поскольку $v_k = z_k - y_k$ и $z_{k-1} = y_k - y_{k-1} - v_k = 2y_k - y_{k-1} - z_k$, то согласно формулам (2.1)–(2.4) получаем рекуррентное соотношение $V_k(y, z_k) = V_{k-1}(y, 2y_k - y_{k-1} - z_k) + F_k(z_k - y_k)$, которое позволяет найти ИМ $Z_k(y)$.

3. Некоторые частные случаи и примеры

Предположим, что уравнения (1.1) имеют вид

$$\begin{gathered} y_k = h_k(z_{k-1}) + cv_k, \quad z_k = f_k(z_{k-1}, v_k), \\ y_k \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad z_k \in \mathbb{R}^m, \quad v_k \in \mathbb{R}^q, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $c \in \mathbb{R}^{(n-m)\times q}$ имеет полный ранг, т. е. справедливо одно из равенств

$$\operatorname{rank} c = n - m, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{rank} c = q \tag{3.3}$$

либо они выполняются одновременно. По-прежнему предполагаются ограничения (1.2); функции h_k, f_k непрерывны. В случае (3.2) и $q > n - m$ введем матрицу $C = (cc')^{-1}$, где $'$ обозначает транспонирование. Пусть $C_1 = I_q - c'Cc$ — ортогональная проекция на нулевое подпространство $\ker c = \{v : cv = 0\}$. Тогда $v_k = c'Ccv_k + C_1 v_k$ и $cv_k = y_k - h_k(z_{k-1})$. Поэтому уравнения (3.1) и ограничения (1.2) примут вид

$$\begin{gathered} z_k = f_k(z_{k-1}, c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + C_1 v_k), \\ F_0(z_0) + \sum_{k\in 1:N} F_k(c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + C_1 v_k) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Замечание 1. В случае (3.2) можно понизить размерность неопределенных возмущений v_k в соотношениях (3.4). Так как $\ker c \oplus \operatorname{im} c' = \mathbb{R}^q$, $\operatorname{im} C_1 = \ker c$ и $\dim(\operatorname{im} c') = n - m$, то $\operatorname{rank} C_1 = q - n + m$. Представим C_1 как $C_1 = T\widetilde{C}_1 T'$, где T — ортогональная матрица, $TT' = T'T = I_q$ и $\widetilde{C}_1$ — диагональная матрица с нулями и единицами, поскольку C_1 — проекционная матрица, $C_1^2 = C_1$. Удаляя $n - m$ нулевых столбцов из $\widetilde{C}_1$ и обозначая результат через $\widetilde{D}_1$, получаем $\widetilde{C}_1 = \widetilde{D}_1 \widetilde{D}_1'$ и $C_1 = D_1 D_1'$, где $D_1 = T\widetilde{D}_1$. Далее, полагаем $u_k = D_1' v_k \in \mathbb{R}^{q-n+m}$, откуда имеем $C_1 v_k = D_1 u_k$, $\;D_1 \in \mathbb{R}^{q\times(q-n+m)}$, $\;\operatorname{rank} D_1 = q - n + m$.

В соотношениях (3.4) и везде далее будем использовать векторы $D_1 u_k$ вместо $C_1 v_k$. Отметим, что $D_1' D_1 = I_{q-n+m}$. Если $q = n - m$, то $C_1 = 0$ и вектор $v_k = c^{-1}(y_k - h_k(z_{k-1}))$ становится известным. Если имеет место случай (3.3) и $q < n - m$, то вектор $v_k = c^{+}(y_k - h_k(z_{k-1}))$ также определяется однозначно. Здесь A^+ обозначает псевдообратную к A матрицу [1]. В случае (3.3) вместо (3.4) будем иметь соотношения

$$
\begin{gathered}
z_k = f_k\left(z_{k-1}, c^+(y_k - h_k(z_{k-1}))\right), \\
F_0(z_0) + \sum_{k=1}^{N} F_k\left(c^+(y_k - h_k(z_{k-1}))\right) \leqslant 1.
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$
\begin{gathered}
f_k(z_{k-1}, c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + D_1 u_k) = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k), \\
F_k(c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + D_1 u_k) = \widetilde{F}_k(z_{k-1}, u_k), \\
f_k\left(z_{k-1}, c^+(y_k - h_k(z_{k-1}))\right) = \widetilde{f}_k(z_{k-1}), \\
F_k\left(c^+(y_k - h_k(z_{k-1}))\right) = \widetilde{F}_k(z_{k-1}).
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

В рассматриваемых случаях множества (2.3) запишутся в виде

$$
\begin{gathered}
G_k(y) = \left\{[z_{k-1}; u_k] : V_{k-1}(y, z_{k-1}) + \widetilde{F}_k(z_{k-1}, u_k) \leqslant 1\right\} \subset \mathbb{R}^{2m+q-n}, \\
\mathcal{D}_k(y) = \left\{z_k : z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k), \;\; [z_{k-1}; u_k] \in G_k(y)\right\} \subset \mathbb{R}^m,
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

где $\mathcal{D}_k(y)$ — ОД. На k-м шаге определяется функция

$$
V_k(y, z_k) = \min_{[z_{k-1}; u_k] \in G_k(y),\; z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k)} \left\{V_{k-1}(y, z_{k-1}) + \widetilde{F}_k(z_{k-1}, u_k)\right\},
$$

где $z_k \in \mathcal{D}_k(y)$ и минимум берется по $[z_{k-1}; u_k]$. В случае (3.3) вектор u_k в (3.7) и в определении $V_k(y, z_k)$ следует опустить.

Сделаем дополнительное предположение о том, что уравнение $z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k)$ допускает обращение, т. е.

$$
z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k) \Leftrightarrow z_{k-1} = \widetilde{g}_k(z_k, u_k) \tag{3.8}
$$

для всех допустимых параметров, где $\widetilde{g}_k$ — непрерывная функция, $k \in 1:N$. При условии (3.8) имеем

$$\begin{gathered} G_k(y) = \Big\{[z_k; u_k] : V_{k-1}(y, \widetilde{g}_k(z_k, u_k)) + \widetilde{F}_k(\widetilde{g}_k(z_k, u_k), u_k) \leqslant 1\Big\} \subset \\ \subset \mathbb{R}^{2m+q-n}, \\ V_k(y, z_k) = \min_{u_k, [z_k; u_k] \in G_k(y)} \Big\{V_{k-1}(y, \widetilde{g}_k(z_k, u_k)) + \widetilde{F}_k(\widetilde{g}_k(z_k, u_k), u_k)\Big\}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

В случае (3.3) условие (3.8) означает следующее:

$$z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}) \Leftrightarrow z_{k-1} = \widetilde{g}_k(z_k),$$

при этом соотношения (3.9) запишутся без минимизации

$$\begin{gathered} G_k(y) = \Big\{z_k : V_{k-1}(y, \widetilde{g}_k(z_k)) + \widetilde{F}_k(\widetilde{g}_k(z_k)) \leqslant 1\Big\} = Z_k(y) \subset \mathbb{R}^m, \\ V_k(y, z_k) = V_{k-1}(y, \widetilde{g}_k(z_k)) + \widetilde{F}_k(\widetilde{g}_k(z_k)). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Теорема 2. *Пусть уравнения* (1.1) *имеют вид* (3.1) *и матрица c имеет полный ранг. Тогда с учетом замечания* 1 *справедливы соотношения* (3.4), (3.5), (3.6) *и* (3.7). *При дополнительном предположении* (3.8) *имеют место формулы* (3.9). *В случае* (3.3), (3.8) *в формулах* (3.9) *вектор u_k и минимизация отсутствуют, выполняются формулы* (3.10).

Пример 2. Рассмотрим двумерную систему $z_k^1 = \log\left(z_{k-1}^2 + 1\right)$, $z_k^2 = 1/\left(z_{k-1}^1 + 1\right)$, где неизвестные начальные состояния ограничены: $0 \leqslant z_0^1 \leqslant 1$, $0 \leqslant z_0^2 \leqslant 1$. Уравнения измерения имеют вид $y_k^1 = z_{k-1}^1 + v_k$, $y_k^2 = z_{k-1}^2 + v_k$, где модули возмущений v_k суммарно ограничены: $\sum_{k \in 1:N} |v_k| \leqslant 1$. Можно считать, что функция F_0 в (1.2) является индикаторной для начального множества. Система обратима: $z_{k-1}^2 = e^{z_k^1} - 1$, $z_{k-1}^1 = 1/z_k^2 - 1$. Поскольку $[1;1]^+ = [1\ 1]/2$, находим функции

$$\widetilde{F}_k(\widetilde{g}_k(z_k)) = \left|\left(y_k^1 + y_k^2 - 1/z_k^2 - e^{z_k^1}\right)/2 + 1\right|.$$

Пусть $\delta(x)$ — индикаторная функция отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$V_1(y, z_1) = \delta\left(1/z_1^2 - 1\right) + \delta\left(e^{z_1^1} - 1\right) + \widetilde{F}_1(\widetilde{g}_1(z_1)), \quad z_1 = [z_1^1; z_1^2].$$

Функции $V_k(y, z_k)$ определяются рекуррентно по формулам (3.10).

3.1. Уравнения для неизвестных координат не содержат возмущений

В этом случае уравнения (3.4) примут вид $z_k = f_k(z_{k-1})$, $F_0(z_0) + \sum_{k\in 1:N} F_k(c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + C_1 v_k) \leqslant 1$, а (3.5) запишутся как

$$z_k = f_k(z_{k-1}), \quad F_0(z_0) + \sum_{k\in 1:N} F_k\left(c^+(y_k - h_k(z_{k-1}))\right) \leqslant 1. \qquad (3.11)$$

Уравнения (3.11) так же, как и (3.10), не предполагают минимизации.

В качестве приложения рассмотрим логистические двумерные системы, которые могут быть записаны в виде

$$z_k^1 = z_{k-1}^2, \ \ z_k^2 = f(z_{k-1}^1), \qquad (3.12)$$

где функция f представляет собой полином, содержащий положительные параметры. Такие системы часто демонстрируют хаотическое поведение. Уравнения измерения предполагаются такими же, как в (3.1), причем $q \leq n - m$. Пусть начальное множество $\mathcal{Z}_0$ совпадает с квадратом $J_1 \times J_1$, где J_1 — единичный отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$. Опишем множества $\mathcal{Z}_k$, содержащие все возможные состояния z_k системы. Их назовем ОД из начального множества. В отличие от ИМ $Z_k(y)$ и совпадающих с ними ОД $\mathcal{D}_k(y)$ на k-м шаге множества $\mathcal{Z}_k$ не зависят от измерений. Итерации функции $f(z)$ обозначаются как $f^k(z)$, т. е. $f^2(z) = f(f(z))$ и т. д.

Лемма 1. *ОД из начального множества для логистических систем* (3.12) *имеют вид* $\mathcal{Z}_{2k-1} = f^{k-1}(J_1) \times f^k(J_1)$ *и* $\mathcal{Z}_{2k} = f^k(J_1) \times f^k(J_1)$.

Лемма доказывается по индукции.

Приведем пример систем (3.12) с полиномом второй степени.

Пример 3. Пусть $f(x) = mx(1-x)$, где параметр удовлетворяет неравенству $0 \leqslant m \leqslant 4$. Из леммы 1 получаем

Следствие 1. *Для системы* (3.12) *с указанным полиномом второй степени справедливы следующие утверждения:*

1. Если $2 \leq m \leq 4$*, то, начиная с* $k = 2$*, ОД* $\mathcal{Z}_k$ *из начального множества постоянны и равны* $J_{m/4} \times J_{m/4}$*, где* $J_{m/4}$ *— отрезок* $0 \leqslant x \leqslant m/4$.

2. Если $1 \leq m < 2$*, то, начиная с* $k = 2$*, ОД* $\mathcal{Z}_k$ *имеют вид* $\mathcal{Z}_{2k-1} = J_{f^{k-1}(1/2)} \times J_{f^k(1/2)}$ *и* $\mathcal{Z}_{2k} = J_{f^k(1/2)} \times J_{f^k(1/2)}$*. При этом последовательность* $f^k(1/2)$*, убывая, стремится к* $1 - 1/m$.

3. Если $0 \leq m < 1$*, то ОД* $\mathcal{Z}_k$ *монотонно стягиваются к началу координат.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения построим обратную функцию к $f(x)$. Эта разрывная функция записывается как

$$\begin{cases} x = 1/2 - \sqrt{1/4 - y/m}, \text{ если } 0 \le y < f(m/4); \\ x = 1/2 + \sqrt{1/4 - y/m}, \text{ если } f(m/4) \le y \le m/4. \end{cases}$$

Таким образом, на любом шаге для всякой точки $0 \leqslant x \leqslant m/4$ можно найти начальную точку x_0, из которой точка x получается путем итераций. Чтобы получить два других утверждения, достаточно проверить, что функции $f^k(x)$ строго вогнуты при $m < 2$ и их графики симметричны относительно прямой $x = 1/2$. Далее, из теории одномерного уравнения Ферхюльста $x_k = f(x_{k-1})$ известно, что число $1 - 1/m$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия при $1 \le m < 2$ и последовательность $f^k(1/2)$, убывая, стремится к этому значению. При $0 \le m < 1$ асимптотически устойчивой точкой равновесия одномерного уравнения является нуль. □

Найдем ИМ $Z_k(y)$ для этого примера при $m = 3.4$, если уравнения измерения и ограничения в (3.11) имеют вид $y_k = x_{k-1} + [1;1]v_k$, $\sum_{k\in 1:N} |v_k| \leqslant 1$. Предположим, что сигнал порождается начальным состоянием $[0.0055; 0.0450]$ и возмущением $v_k = (-1)^k/2^k$. Тогда на шаге $k = 8$ получаем рис. 1, где ИМ содержится в квадрате ОД $J_{0.85} \times J_{0.85}$. На последующих шагах ИМ существенно уменьшается в размерах и в пределе совпадает с одним из значений 4-цикла, к которому стремится траектория.

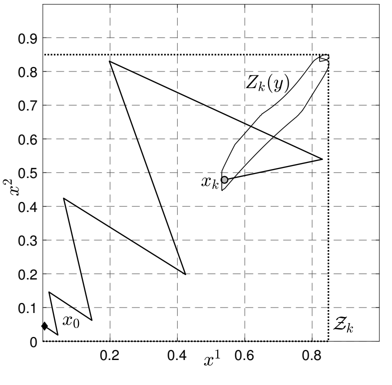

Рис. 1. ИМ на шаге $k = 8$

Рисунок построен сеточным методом. Он работает и в случае, когда система становится хаотической, например, $m = 3.7$. При таком m и $k = 8$ ИМ получается несвязным.

3.2. Дискретная модель Лотки – Вольтерры

Дифференциальная модель описывается уравнениями

$$\dot{x}^1 = x^1(a - \alpha x^2), \quad \dot{x}^2 = -x^2(c - \gamma x^1), \tag{3.13}$$

где x^1 и x^2 — плотности популяции жертв и хищников соответственно. Параметр a — это коэффициент роста жертв в отсутствии хищников, а параметр c — это коэффициент смертности хищников в отсутствии жертв. Все параметры положительны. Начальные условия $[x_0^1; x_0^2]$ также положительны. Известно, что точка $[c/\gamma; a/\alpha]$ является равновесной и устойчивой для системы (3.13). Точные решения системы периодичны и изображаются замкнутыми траекториями вокруг точки равновесия.

Приведем систему к каноническому виду. Для этого сделаем замену переменных $\tau = ct$, $u(\tau) = \gamma x^1(t)/c$, $v(\tau) = \alpha x^2(t)/c$. В результате система (3.13) превратится в следующую:

$$du/d\tau = u(a/c - v), \quad dv/d\tau = -v(1 - u), \quad u_0 = \gamma x_0^1(t)/c, \quad v_0 = \alpha x_0^2(t)/c.$$

Таким образом, будем считать, что в системе (3.13) только один параметр $a > 0$, а остальные $\alpha = \gamma = c = 1$. Система не является гамильтоновой, но после замены $w = \ln x^1, \quad v = \ln x^2$:

$$\dot{w} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial w}, \quad \widetilde{H} = av - e^v + w - e^w. \tag{3.14}$$

Гамильтониан $\widetilde{H}$ является первым интегралом, и по теореме Лиувилля гамильтонова система сохраняет объём. Если подставить обратное преобразование в функцию $\widetilde{H}$, получим $H(x) = a\ln x^2 - x^2 + \ln x^1 - x^1$. Пусть определитель $\left|\frac{\partial(w,v)}{\partial(x^1,x^2)}\right| = \sigma(x)$. Непосредственно проверяется, что систему (3.13) можно переписать как

$$\dot{x}^1 = \frac{\partial H}{\partial x^2}/\sigma(x), \quad \dot{x}^2 = -\frac{\partial H}{\partial x^1}/\sigma(x). \tag{3.15}$$

Действительно,

$$H_{x^2} = a/x^2 - 1, H_{x^1} = 1/x^1 - 1 \text{ и } si(x) = \left|\begin{bmatrix} 1/x^1 & 0 \\ 0 & 1/x^2 \end{bmatrix}\right| = 1/(x^1x^2).$$

Решения системы Лотки – Вольтерры и гамильтоновой системы связаны явными формулами. Введем обозначения. Пусть

$$\psi_t(y) = [w_t(y); v_t(y)] \; -$$

поток гамильтоновой системы (3.14) с начальной точкой y, а $\phi_t(u)$ — поток системы (3.15) с начальной точкой u. Тогда

$$\phi_t^1(u) = e^{\psi_t^1(\ln u^1, \ln u^2)}, \quad \phi_t^2(u) = e^{\psi_t^2(\ln u^1, \ln u^2)},$$
$$\psi_t^1(y) = \ln \phi_t^1(e^{y^1}, e^{y^2}), \quad \psi_t^2(y) = \ln \phi_t^2(e^{y^1}, e^{y^2}).$$

Поток гамильтоновой системы является композицией трех взаимно однозначных дифференцируемых преобразований, действующих в положительном ортанте. Применяя цепное правило вычисления якобианов, получаем

$$\psi_{ty} = \begin{bmatrix} 1/\phi_t^1(e^{y^1}, e^{y^2}) & 0 \\ 0 & 1/\phi_t^2(e^{y^1}, e^{y^2}) \end{bmatrix} \phi_{ty}(e^{y^1}, e^{y^2}) \begin{bmatrix} e^{y^1} & 0 \\ 0 & e^{y^2} \end{bmatrix}.$$

Переходя к определителям, получим соотношение

$$|\phi_{ty}(u)| = \frac{\phi_t^1(u)\phi_t^2(u)}{u^1 u^2}, \tag{3.16}$$

где u^1, u^2 — любые положительные величины. Здесь воспользовались тем, что для любых гамильтоновых систем определитель $|\psi_{ty}| = 1$ [5]. Свойство (3.16) используется при специальном численном интегрировании системы (3.13). Обычные численные методы приводят к траекторным спиралям, а не к замкнутым траекториям, как в непрерывной модели. В работах [5; 6] предложены численные методы, удовлетворяющие соотношению (3.16) и дающие траектории, тоже спиралевидные, но более близкие к непрерывным замкнутым решениям.

Пусть отображение $X = \vartheta(x)$ дает преобразование точки $[x^1_{k-1}; x^2_{k-1}] = x$ в точку $[x^1_k; x^2_k] = X$, причем от шага к шагу преобразование не меняется. В работе [6] отображение $\vartheta(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{X^1 - x^1}{h} = \frac{X^1 + x^1}{2} - \frac{X^1 x^2 + X^2 x^1}{2}, \\ \frac{X^2 - x^2}{h} = -\frac{X^2 + x^2}{2} + \frac{X^1 x^2 + X^2 x^1}{2}, \end{gathered}$$

где h — шаг интегрирования и $a = 1$. Пусть измерения имеют вид $y_k = x^1_{k-1} + v_k$, $\sum_{k\in 1:N} |v_k| \leqslant 1$. Предположим, что начальное множество $\mathcal{Z}_0$ — это произведение двух одинаковых отрезков $0.8 \leqslant x \leqslant 1.2$, а сигнал порождается начальным состоянием $[1.1333; 1.0667]$ и возмущением $v_k = \frac{(-1)^k}{2^k}$. Тогда на шаге $k = 10$ получаем рис. 2. Траектория системы вращается вокруг точки $[1; 1]$ и совершает полный оборот примерно за 127 шагов. После 10-го шага ИМ быстро стягивается в точку.

4. Линейно-квадратичный случай

В этом случае система (1.1) принимает вид (4.1) с ограничением (4.2):

$$\begin{gathered} y_k = C^y_k y_{k-1} + A^y_k z_{k-1} + B^y_k v_k, \\ z_k = A^z_k z_{k-1} + C^z_k y_{k-1} + B^z_k v_k, \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$|z_0|^2 + \sum_{k\in 1:N} |v_k|^2 \leqslant 1, \tag{4.2}$$

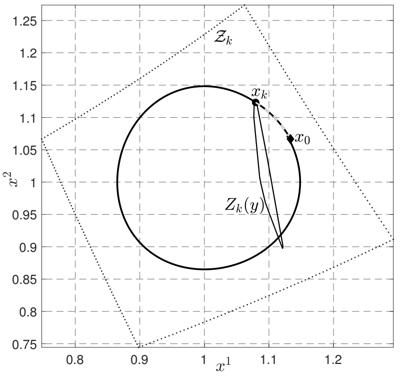

Рис. 2. ИМ на фоне области достижимости $\mathcal{Z}_k$, $k = 10$

где $|\cdot|$ — евклидова норма. На первом шаге вычисляем опорную функцию множества $\mathcal{D}_1(y)$. Для этого находим все решения первого равенства в (4.1) при $k = 1$. Всякое решение этого равенства имеет вид $[z_0; v_1] = Y_1 + \ker[A_1^y\ B_1^y]$, $Y_1 = [A_1^y\ B_1^y]^+(y_1 - C_1^y y_0)$, Пусть P_1 — это проектор пространства $\mathbb{R}^{m+q}$ на $\ker[A_1^y\ B_1^y]$. Данную матрицу можно записать как $P_1 = I_{m+q} - [A_1^y\ B_1^y]^+[A_1^y\ B_1^y]$. Поскольку имеет место равенство $A^+ = A'(AA')^+$, то в силу ортогональности векторов ограничение (4.2) примет вид $[z_0; v_1] = Y_1 + P_1[a; b]$, где $[a; b] \in \mathbb{R}^{m+q}$, и справедливо $|[a; b]|^2_{P_1} \leqslant 1 - |Y_1|^2$, где символом $|x|^2_P = x'Px$ обозначена квадратичная форма с симметричной и неотрицательно определенной матрицей P. Таким образом, находим опорную функцию

$$\begin{gathered}\rho(l|\mathcal{D}_1(y)) = l'\hat{z}_1 + \sqrt{(1 - |Y_1|^2)\, l'\hat{P}_1 l}, \quad l \in \mathbb{R}^m,\\ \hat{z}_1 = C_1^z y_0 + [A_1^z\ B_1^z]Y_1, \quad \hat{P}_1 = [A_1^z\ B_1^z]P_1[A_1^z\ B_1^z]'.\end{gathered} \tag{4.3}$$

ИМ $Z_1(y) = \mathcal{D}_1(y)$ с опорной функцией (4.3) — эллипсоид, возможно вырожденный. Из (4.3) следует, что

$$z_1 \in \mathcal{D}_1(y) \Leftrightarrow z_1 = \hat{z}_1 + \widetilde{z}_1, |\widetilde{z}_1|^2_{\hat{P}_1^+} \leqslant 1 - |Y_1|^2, \widetilde{z}_1 = \hat{P}_1\bar{z}_1.$$

Отсюда $|\bar{z}_1|^2_{\hat{P}_1} \leqslant 1 - |Y_1|^2$. Подставляя $[z_0; v_1]$ во второе равенство в (4.1), получаем условие $\hat{P}_1\bar{z}_1 = [A_1^z\ B_1^z]P_1[a; b]$. Пара $[a; b] = P_1[A_1^z\ B_1^z]'\bar{z}_1$ удовлетворяет этому равенству, причем $|[a; b]|^2_{P_1} \leqslant 1 - |Y_1|^2$. Данная пара имеет минимальную норму из всех пар, удовлетворяющих равенству.

На втором шаге получаем уравнения $y_2 - C_2^y y_1 - A_2^y\hat{z}_1 = A_2^y\hat{P}_1\bar{z}_1 + B_2^y v_2$, $z_2 = C_2^z y_1 + A_2^z\hat{z}_1 + A_2^z\hat{P}_1\bar{z}_1 + B_2^z v_2$, с ограничениями $|\bar{z}_1|^2_{\hat{P}_1} + |Y_1|^2 + |v_2|^2 \leqslant 1$. Это эквивалентно следующему:

$$\begin{gathered} y_2 - C_2^y y_1 - A_2^y \hat{z}_1 = A_2^y \hat{P}_1^{1/2} r_1 + B_2^y v_2, \\ z_2 = C_2^z y_1 + A_2^z \hat{z}_1 + A_2^z \hat{P}_1^{1/2} r_1 + B_2^z v_2, \\ |r_1|^2 + |Y_1|^2 + |v_2|^2 \leqslant 1. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Вычисляем опорную функцию множества $\mathcal{D}_2(y)$. Для этого находим все решения первого равенства в (4.4). Всякое решение равенства имеет вид $[r_1; v_2] = Y_2 + \ker [A_2^y \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^y]$, $Y_2 = [A_2^y \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^y]^+ (y_2 - C_2^y y_1 - A_2^y \hat{z}_1)$. Пусть P_2 — это проектор пространства $\mathbb{R}^{m+q}$ на $\ker [A_2^y \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^y]$. Ограничение в (4.4) примет вид

$$[r_1; v_2] = Y_2 + P_2[a; b], [a; b] \in \mathbb{R}^{m+q}, |[a; b]|_{P_2}^2 \leqslant 1 - |Y_1|^2 - |Y_2|^2.$$

Находим опорную функцию

$$\begin{gathered} \rho(l|\mathcal{D}_2(y)) = l'\hat{z}_2 + \sqrt{(1 - |Y_1|^2 - |Y_2|^2)\, l'\hat{P}_2 l}, l \in \mathbb{R}^m, \\ \hat{z}_2 = C_2^z y_1 + A_2^z \hat{z}_1 + [A_2^z \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^z] Y_2, \hat{P}_2 = [A_2^z \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^z] P_2 [A_2^z \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^z]'. \end{gathered} \tag{4.5}$$

ИМ $Z_2(y) = \mathcal{D}_2(y)$ с опорной функцией (4.5) — это эллипсоид, возможно вырожденный. Из (4.5) следует, что $z_2 \in \mathcal{D}_2(y) \Leftrightarrow z_2 = \hat{z}_2 + \widetilde{z}_2$, $|\widetilde{z}_2|_{\hat{P}_2^+}^2 \leqslant 1 - |Y_1|^2 - |Y_2|^2$, $\widetilde{z}_2 = \hat{P}_2 \bar{z}_2$. Отсюда $|\bar{z}_2|_{\hat{P}_2}^2 \leqslant 1 - |Y_1|^2 - |Y_2|^2$. Подставляя $[r_1; v_2]$ во второе равенство в (4.4), получаем условие $\hat{P}_2 \bar{z}_2 = [A_2^z \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^z] P_2 [a; b]$. Пара $[a; b] = P_2 [A_2^z \hat{P}_1^{1/2} \ B_2^z]' \bar{z}_2$ удовлетворяет этому равенству, причем $|[a; b]|_{P_2}^2 \leqslant 1 - |Y_1|^2 - |Y_2|^2$. Кроме того, данная пара имеет минимальную норму из всех пар, удовлетворяющих равенству.

Продолжая по индукции, на k-м шаге получаем уравнения

$$\begin{gathered} y_k - C_k^y y_{k-1} - A_k^y \hat{z}_{k-1} = A_k^y \hat{P}_{k-1}^{1/2} r_{k-1} + B_k^y v_k, \\ z_k = C_k^z y_{k-1} + A_k^z \hat{z}_{k-1} + A_k^z \hat{P}_{k-1}^{1/2} r_{k-1} + B_k^z v_k, \\ |r_{k-1}|^2 + |Y_{k-1}|^2 + |v_k|^2 \leqslant 1. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Пусть P_k — это проектор пространства $\mathbb{R}^{m+q}$ на $\ker [A_k^y \hat{P}_{k-1}^{1/2} \ B_k^y]$. Ограничение в (4.6) примет вид $[r_{k-1}; v_k] = Y_k + P_k[a; b]$, $[a; b] \in \mathbb{R}^{m+q}$, $|[a; b]|_{P_k}^2 \leqslant 1 - \sum_{i \in 1:k} |Y_i|^2$. Находим опорную функцию

$$\begin{gathered} \rho(l|\mathcal{D}_k(y)) = l'\hat{z}_k + \sqrt{\left(1 - \sum_{i=1}^{k} |Y_i|^2\right) l'\hat{P}_k l}, \quad l \in \mathbb{R}^m, \\ \hat{z}_k = C_k^z y_{k-1} + A_k^z \hat{z}_{k-1} + [A_k^z \hat{P}_{k-1}^{1/2} \ B_k^z] Y_k, \\ \hat{P}_k = [A_k^z \hat{P}_{k-1}^{1/2} \ B_k^z] P_k [A_k^z \hat{P}_{k-1}^{1/2} \ B_k^z]', \\ Y_k = [A_k^y \hat{P}_{k-1}^{1/2} \ B_k^y]^+ \left(y_k - C_k^y y_{k-1} - A_k^y \hat{z}_{k-1}\right). \end{gathered} \tag{4.7}$$

(4.7) выполняются для всех $k \in 1:N$, если положить $\hat{P}_0 = I_m$, $\hat{z}_0 = 0$.

5. Огрубленная процедура для нелинейной задачи

В общем случае (1.1), (1.2) получить точное решение, подобно предыдущему разделу, удается в редких случаях. Наряду с общими формулами раздела 2 рассмотрим огрубленные процедуры оценивания с возможным использованием функций расстояния.

Пусть задано компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $C \subset \Omega$ — замкнутое множество. Функция расстояния d_C до этого множества определяется по формуле $d_C(x) = \min_{z \in C} |x - z|, \ \ \forall x \in \Omega$. Известно, что эта функция липшицева. Между функциями расстояния и множествами имеются следующие очевидные отношения: $C = \{x : d_C(x) = 0\}$, $A \subset B \Leftrightarrow d_A \geqslant d_B$. По определению полагаем $d_A = d_{\mathrm{clA}}$, где $\mathrm{cl}A$ — замыкание множества A, и $d_\varnothing = +\infty$. Таким образом, $d_A(x) + d_{\bar{A}}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{fr}A$, где $\mathrm{fr}A$ — граница множества A и $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение. В задачах оценивания встречаются операции пересечения и объединения множеств. Предположим, что для всех рассматриваемых множеств $C \subset \Omega$ известны как функции $d_C(x)$, так и функции $d_{\bar{C}}(x)$. Тогда для замкнутых множеств A и B верны соотношения $d_{A \cup B} = d_A \wedge d_B, \quad d_{\overline{A \cap B}} = d_{\bar{A}}(x) \wedge d_{\bar{B}}$, где $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Будем рассматривать только уравнения (3.1) с геометрическими ограничениями. Для этого предположим, что все функции F_k в ограничениях (1.2) имеют вид $F_k(v) = \delta_{\mathbf{V}_k}(v)$, $k \in 0:N$, где $\mathbf{V}_k$ — компакты соответствующих размерностей. Учитывая замечание после формулы (3.4) и используя обозначения (3.6), эту формулу запишем как

$$\begin{gathered} z_k = f_k(z_{k-1}, c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + D_1 u_k) = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k), \\ z_0 \in \mathbf{V}_0, \ \ c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + D_1 u_k \in \mathbf{V}_k, \ \ k \in 1:N. \end{gathered}$$

Множества (2.1) имеют вид

$$\begin{gathered} G_1(y) = \left\{[z_0; u_1] : z_0 \in \mathbf{V}_0, \ D_1 u_1 \in \mathbf{V}_1 - c'C(y_1 - h_1(z_0))\right\} \subset \mathbb{R}^{2m+q-n}, \\ \mathcal{D}_1(y) = \Big\{z_1 : z_1 = \widetilde{f}_1(z_0, u_1), \ [z_0; u_1] \in G_1(y)\Big\} \subset \mathbb{R}^m. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Предположим, что для $i \in 1:k-1$ множества $G_i(y)$ и $\mathcal{D}_i(y)$ уже построены. Тогда по аналогии с (5.1) рекуррентно определяем множества

$$\begin{gathered} G_k(y) = \left\{[z_{k-1}; u_k] : z_{k-1} \in \mathcal{D}_{k-1}(y), \ D_1 u_k \in \mathbf{V}_k - c'C(y_k - h_k(z_{k-1}))\right\}, \\ \mathcal{D}_k(y) = \Big\{z_k : z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}, u_k), \ \ [z_{k-1}; u_k] \in G_k(y)\Big\}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где $G_k(y) \subset \mathbb{R}^{2m+q-n}$, а ОД $\mathcal{D}_k(y) \subset \mathbb{R}^m$ на k-м шаге совпадает с ИМ $Z_k(y)$, (2.4). В случае (3.3) возмущение u_k отсутствует и вместо (5.2)

$$\begin{gathered} G_k(y) = \left\{z_{k-1} : z_{k-1} \in \mathcal{D}_{k-1}(y),\ c^+(y_k - h_k(z_{k-1})) \in \mathbf{V}_k\right\}, \\ \mathcal{D}_k(y) = \left\{z_k : z_k = \widetilde{f}_k(z_{k-1}),\ z_{k-1} \in G_k(y)\right\}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

И в (5.2) и в (5.3) множества $G_k(y)$ образуются путем пересечения. Обозначим одним символом $\mathcal{G}_k(y)$ множества

$$\begin{gathered} \left\{[z_{k-1}; u_k] : D_1 u_k \in \mathbf{V}_k - c'C(y_k - h_k(z_{k-1}))\right\} \quad \text{или} \\ \left\{z_{k-1} : c^+(y_k - h_k(z_{k-1})) \in \mathbf{V}_k\right\}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

В силу свойств матрицы D_1 первое множество в (5.4) запишем $\mathcal{G}_k(y) = \left\{[z_{k-1}; u_k] : D_1^+(c'C(y_k - h_k(z_{k-1})) + u_k \in D_1^+\mathbf{V}_k\right\}$. Полагая $\mathcal{D}_0(y) = \mathbf{V}_0$, получаем следующий алгоритм вычисления ИМ $Z_k(y) = \mathcal{D}_k(y)$.

Алгоритм 1.

• На первом шаге берем пересечение $G_1(y) = (\mathcal{D}_0(y) \times \mathbb{R}^{q+m-n}) \cap \mathcal{G}_1(y)$ или $G_1(y) = \mathcal{D}_0(y) \cap \mathcal{G}_1(y)$ в случае (3.3).

• Делаем прогноз $\mathcal{D}_1(y) = \widetilde{f}_1(G_1(y))$.

• На k-м шаге берем пересечение $G_k(y) = (\mathcal{D}_{k-1}(y) \times \mathbb{R}^{q+m-n}) \cap \mathcal{G}_k(y)$ или $G_k(y) = \mathcal{D}_{k-1}(y) \cap \mathcal{G}_k(y)$ в случае (3.3).

• Вычисляем $\mathcal{D}_k(y) = \widetilde{f}_k(G_k(y))$.

В данном алгоритме пространство $\mathbb{R}^{q+m-n}$ можно заменить компактом U, содержащим все возможные векторы u_k.

Огрубленная процедура оценивания состоит из следующих действий.

Алгоритм 2.

• Заменяем все множества $\mathbf{V}_k$ конечными множествами $\widetilde{\mathbf{V}}_k$.

• Заменяем сигнал y_k наилучшим приближением $\widetilde{y}_k$ с помощью уравнений (3.1) и множеств $\widetilde{\mathbf{V}}_k$. Без этого приближения последующие построения могут приводить к пустым множествам.

• Множество $\widetilde{U}$ всех возможных векторов $\widetilde{u}_k$ также становится конечным. На первом шаге берем пересечение $\widetilde{G}_1(y) = \left(\widetilde{\mathcal{D}}_0(y) \times \widetilde{U}\right) \cap \widetilde{\mathcal{G}}_1(y)$ или $\widetilde{G}_1(y) = \widetilde{\mathcal{D}}_0(y) \cap \widetilde{\mathcal{G}}_1(y)$ в случае (3.3).

• Делаем прогноз $\widetilde{\mathcal{D}}_1(y) = \widetilde{f}_1(\widetilde{G}_1(y))$.

• На k-м шаге берем пересечение $\widetilde{G}_k(y) = \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{k-1}(y) \times \widetilde{U}\right) \cap \mathcal{G}_k(y)$ или $\widetilde{G}_k(y) = \widetilde{\mathcal{D}}_{k-1}(y) \cap \widetilde{\mathcal{G}}_k(y)$ в случае (3.3).

• Вычисляем $\widetilde{\mathcal{D}}_k(y) = \widetilde{f}_k(\widetilde{G}_k(y))$.

В данных алгоритмах все множества могут быть заменены соответствующими функциями расстояния. Исследование сходимости огрубленного алгоритма представляет собой отдельную задачу, которая будет рассмотрена в последующих работах.

6. Заключение

• Рассмотрены вопросы гарантированного оценивания нелинейных многошаговых систем, для которых часть координат ненаблюдаема.

• Для возмущений заданы суммарные априорные ограничения с неотрицательными полунепрерывными функциями, что включает и геометрические ограничения. Постановка задачи охватывает все известные нам формулировки задач гарантированного оценивания фазового вектора для многошаговых систем.

• Приведены общие формулы для построения информационных множеств и их конкретизация в частных случаях. Рассмотрены примеры: двумерные логистические системы и уравнения Лотки – Вольтерры.

• Отдельно рассмотрен случай линейных уравнений, где для построения информационных множеств используются опорные функции.

• При геометрических ограничениях на возмущения приведена огрубленная процедура оценивания с возможным использованием функций расстояния до множества. В дальнейшем предполагается рассмотреть сходимость предлагаемой процедуры, а также изучить вопросы выбора точек в ограничивающих множествах.

Список источников

1. Григорьев Ф. Н., Кузнецов Н. А., Серебровский А. П. Управление наблюдениями в автоматических системах М. : Наука, 1986, 218 с.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.
3. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 306 с.
4. Куржанский А. Б., Кощеев А. С. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 72–93.
5. Gander M. J., Meyer-Spasche R. An introduction to numerical integrators preserving physical properties // Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes / ed. R. E. Mickens. World Scientific, 2000. P. 181–243.
6. Kahan W. Unconventional numerical methods for trajectory calculations. Lecture Notes. CS Division, Department of EECS, University of California at Berkeley, 1993.
7. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA, Birkhäuser, 2014. 445 p.
8. Lew T., Pavone M. Sampling-based Reachability Analysis: A Random Set Theory Approach with Adversarial Sampling // Conference on Robot Learning. 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.10180
9. A comprehensive review of battery modeling and state estimation approaches for advanced battery management systems / Y. Wang, J. Tian, Z. Sun, L. Wang, R. Xu, M. Li, Z. Chen // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2020. Vol. 131. Art. no. 110015. https://doi.org/10.1016/j.rser.2020.110015
10. Zhang J., Liu J. Distributed moving horizon state estimation for nonlinear systems with bounded uncertainties // Journal of Process Control. 2013. Vol. 23, N 9. P. 1281–1295. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2013.08.005

References

1. Grigor'ev F.N., Kuznecov N.A., Serebrovskij A.P. *Upravlenie nablyudeniyami v avtomaticheskih sistemah.* Moscow, Nauka Publ., 1986, 218 p. (in Russian)
2. Klark F. *Optimizaciya i negladkij analiz.* Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p. (in Russian)
3. Kurzhanskij A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyah neopredelennosti.* Moscow, Nauka Publ., 1977, 306 p. (in Russian)
4. Kurzhanskij A.B., Koshcheev A.S. Adaptivnoe ocenivanie evolyucii mnogoshagovyh sistem v usloviyah neopredelennosti. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1983, no. 2, pp. 72–93. (in Russian)
5. Gander M.J., Meyer-Spasche R. An introduction to numerical integrators preserving physical properties. *Mickens R.E. (ed.) Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes.* World Scientific, 2000, pp. 181–243.
6. Kahan W. *Unconventional numerical methods for trajectory calculations. Lecture Notes.* CS Division, Department of EECS, University of California at Berkeley, 1993.
7. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation.* SCFA, Birkhäuser, 2014. 445 p.
8. Lew T., Pavone M. Sampling-based Reachability Analysis: A Random Set Theory Approach with Adversarial Sampling. *Conference on Robot Learning*, 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.10180
9. Wang Y., Tian J., Sun Z., Wang L., Xu, R., Li M., Chen Z. A comprehensive review of battery modeling and state estimation approaches for advanced battery management systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2020, vol. 131, art. no. 110015. https://doi.org/10.1016/j.rser.2020.110015
10. Zhang J., Liu J. Distributed moving horizon state estimation for nonlinear systems with bounded uncertainties. *Journal of Process Control*, 2013, vol. 23, no. 9, pp. 1281–1295. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2013.08.005

Об авторах

Ананьев Борис Иванович, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 620108, Российская Федерация, abi@imm.uran.ru, https://orcid.org/0000-0002-1378-0240

Юровских Полина Александровна, математик, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 620108, Российская Федерация, polina2104@list.ru, https://orcid.org/0000-0001-8051-3428

About the authors

Boris I. Ananyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, 620108, Russian Federation, abi@imm.uran.ru, https://orcid.org/0000-0002-1378-0240

Polina A. Yurovskikh, Mathematician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, 620108, Russian Federation, polina2104@list.ru, https://orcid.org/0000-0001-8051-3428

Поступила в редакцию / Received 30.04.2023
Поступила после рецензирования / Revised 19.06.2023
Принята к публикации / Accepted 26.06.2023