



Серия «Математика»
2023. Т. 43. С. 78–90

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.968.4

MSC 45G10

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.78>

О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами

Н. А. Сидоров¹, Л. Р. Д. Дрегля Сидоров¹✉

¹ Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ lev.ryan.lev@gmail.com

Аннотация. Рассматривается интегральное уравнение Гаммерштейна с нагрузками на искомое решение. Уравнение содержит параметр, при любом значении которого уравнение имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты уравнения и те значения параметра (точки бифуркации), в окрестности которых уравнение имеет нетривиальные вещественные решения. Построены главные члены асимптотики таких ветвей решений. Приведены примеры, иллюстрирующие доказанные теоремы существования.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна, ветвление решений, точки бифуркации, асимптотика, нагрузки

Ссылка для цитирования: Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л.Р.Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 43. С. 78–90.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.78>

Research article

On the Solution of Hammerstein Integral Equations with Loads and Bifurcation Parameters

Nikolai A. Sidorov¹, Lev Ryan D. Dreglea Sidorov¹✉

¹ Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ lev.ryan.lev@gmail.com

Abstract. The Hammerstein integral equation with loads on the desired solution is considered. The equation contains a parameter for any value of which the equation has a trivial solution. Necessary and sufficient conditions are obtained for the coefficients of the equation and those values of the parameter (bifurcation points) in its neighborhood the equation has a nontrivial real solutions. The leading terms of the asymptotics of such branches of solutions are constructed. Examples are given illustrating the proven existence theorems.

Keywords: Hammerstein equation, branching, bifurcation points, asymptotics, loads

For citation: Sidorov N.A., Dreglea Sidorov L.R.D. On the Solution of Hammerstein Integral Equations with Loads and Bifurcation Parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 43, pp. 78–90. (in Russian)

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.78>

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) \sum_{i+k \geq 2}^{\infty} f_{ik}(s, \lambda) x(s)^i x_{\alpha}^k ds + f(t, \lambda) x_{\alpha}. \quad (1.1)$$

Здесь $t \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_{\alpha} = \int_a^b \alpha(t) x(t) dt$, где $\alpha(t)$ – кусочно-непрерывная функция, или $x_{\alpha} = x(\alpha)$, где $\alpha \in [a, b]$.

В приложениях линейный функционал x_{α} называют нагрузкой. Нагрузка может быть как интегральной, так и локальной. Все функциональные коэффициенты f_{ik} , ядро $G(t, s)$, функция $f(t, \lambda)$ в уравнении (1.1) – непрерывные функции, достаточно гладкие по параметру λ . В обширной литературе по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [2; 3; 5; 12–14] и по нагруженным уравнениям [4; 7; 9] такие классы задач с нагрузками и возможностью ветвления непрерывного решения оставались неизученными. Цель данной работы – указать подход к исследованию такой задачи на основе использования аналитических методов теории ветвления [2] и их модификаций [1; 13; 14].

2. Построение уравнения относительно нагрузки и необходимые условия бифуркации

Используя метод неопределенных коэффициентов, построим в классе $C_{[a,b]}$ решение уравнения (1.1) при $|x_{\alpha}| \leq \rho$ в виде ряда по степеням нагрузки x_{α} :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, \lambda) x_{\alpha}^n, \quad \text{при малом } |x_{\alpha}|. \quad (2.1)$$

Функциональные коэффициенты $a_n(t, \lambda)$ вычислим последовательно рекуррентным образом:

$$a_1(t, \lambda) = f(t, \lambda),$$

$$a_2(t, \lambda) = \int_a^b G(t, s) [f_{02}(s, \lambda) + f_{20}(s, \lambda) a_1^2(s, \lambda) + f_{11} a_1(s, \lambda)] ds,$$

...

На основании теоремы о неявном отображении (см. [11]) ряд (2.1) сходится равномерно по t в достаточно малой окрестности $|x_{\alpha}| \leq \rho$. Для удобства в обозначении нагрузки x_{α} в вычислениях будем использовать общепринятый символ линейного функционала $\langle x, \alpha \rangle$.

Применяя этот линейный функционал к обеим частям формулы (2.1), получим искомое уравнение для нагрузки:

$$L(x_{\alpha}, \lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda) x_{\alpha}^n = 0, \quad (2.2)$$

где

$$A_1(\lambda) = \langle f(t, \lambda), \alpha \rangle - 1, \\ A_n(\lambda) = \langle a_n(t, \lambda), \alpha \rangle, \quad n = 2, 3, \dots$$

Нелинейное уравнение (2.2) в окрестности некоторых точек λ_0 может иметь несколько решений $x_{\alpha} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Поэтому и уравнение (1.1) в классе $C_{[a,b]}$ может иметь несколько малых решений $x(t, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Следуя [9], уравнение (2.2) назовем *уравнением разветвления*.

Определение 1. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации уравнения* (1.1), если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ в окрестностях $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, $0 < \max_{a \leq t \leq b} |x(t, \lambda)| \leq \varepsilon$, найдутся λ и функция $x(t, \lambda)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) (рис. 1).

Лемма 1. Для того чтобы λ_0 могла быть точкой бифуркации, необходимо выполнение равенства $A_1(\lambda_0) = 0$.

Доказательство. Уравнение (2.2) при каждом λ имеет тривиальное решение $x_{\alpha} = 0$. Если $A_1(\lambda_0) \neq 0$, то при $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ в окрестности $|x_{\alpha}| \leq \varepsilon$ на основании теоремы о неявной функции [11] решение уравнения (2.2) единственное, а λ_0 , согласно определению 1, не будет точкой бифуркации уравнения (2.2). Формула (2.1) устанавливает биекцию между

Рис. 1. λ_0 — точка бифуркации.

искомыми решениями уравнений (1.1) и (2.2). Следовательно, точка λ_0 в случае $A_1(\lambda_0) \neq 0$ не может быть точкой бифуркации уравнения (1.1). \square

3. Достаточное условие бифуркации и построение асимптотики

Введем условие.

Условие 1. Точка λ_0 является нулем кратности p_i , соответственно у коэффициентов $A_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, а $A_N(\lambda_0) \neq 0$.

Построим диаграмму Ньютона (см. [11] и рисунок ниже) множества точек:

$$(1, p_1), (2, p_2), \dots, (N - 1, p_{N-1}), (N, 0). \quad (3.1)$$

Возьмем грань (a, b) диаграммы с концами в точках $(i_1, p_{i_1}), (i_2, p_{i_2})$. Введем число $\frac{r}{s} = \frac{p_{i_1} - p_{i_2}}{i_2 - i_1} = \operatorname{tg} \psi$ и число θ , обозначающее ординату точки пересечения прямой, проходящей через грань (a, b) , с осью ординат.

Лемма 2. Точки $(i_1, p_{i_1}), (i_2, p_{i_2})$, отвечающие концам грани (a, b) , удовлетворяют равенству $i_s^r + p = \theta$. При этом $i_s^r + p > \theta$, если точка (i, p) не лежит на грани (a, b) .

Положим в уравнении (2.2) $\lambda = \lambda_0 + \mu$ и будем искать его решение в виде

$$x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}, \quad \text{где } c(0) \neq 0. \quad (3.2)$$

Тогда функция $c(\mu)$ должна удовлетворять уравнению

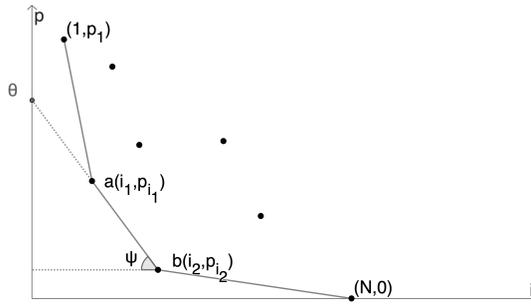


Рис. 2. Диаграмма Ньютона.

$$|\mu|^\theta \sum_{\substack{r \\ i^- + p_i = \theta}} (\operatorname{sgn} \mu)^{p_i} \frac{A_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c(\mu)^i + r(c(\mu), \mu) = 0. \quad (3.3)$$

Отметим, что ввиду Леммы 2 при любом $c(\mu)$ получим в пределе

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} |\mu|^{-\theta} r(c(\mu), \mu) = 0.$$

В силу этого предела $c(0)$ должно удовлетворять равенству

$$P_{\pm}(c) := \sum_{\substack{r \\ i^- + p_i = \theta}} \operatorname{sgn}(\mu)^{p_i} \frac{A_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c^i = 0. \quad (3.4)$$

Если хотя бы одно из чисел p_i нечетное, то для определения $c(0)$ получим два разных полинома $P_{\pm}(c)$. Полиномы $P_{\pm}(c)$ отвечают соответственно положительным и отрицательным μ , т. е. разным полукрестностям точки бифуркации λ_0 . Таким образом, равенство (3.4) в общем случае может порождать два разных уравнения.

Пусть существует простой вещественный корень $c_* \neq 0$ хотя бы у одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда на основании теоремы о неявной функции уравнение разветвления (2.2) имеет вещественное решение с асимптотикой $x_\alpha \sim c_* |\mu|^{r/s}$, определенное в соответствующей полукрестности точки λ_0 .

В этом случае λ_0 – точка бифуркации уравнения (1.1) и справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1 и c_* – ненулевой простой вещественный корень хотя бы одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда λ_0

будет точкой бифуркации уравнения (1.1). Более того, хотя бы в одной полукрестности этой точки существует вещественное решение уравнения (1.1) с асимптотикой:

$$x(t) \sim f(t, \lambda_0) c_* |\lambda - \lambda_0|^{r/s}. \quad (3.5)$$

Более подробный анализ на основе диаграммы Ньютона массива точек (3.1) позволяет сформулировать следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть выполнено условие 1, причем на грани (a, b) диаграммы Ньютона лежат только две точки $(i_1, p_{i_1}), (i_2, p_{i_2})$ массива (3.1). Если при этом $s = i_2 - i_1$ – нечетное число или при четном s , $r = p_1 - p_2$ – нечетное, то λ_0 будет точкой бифуркации уравнения (1.1). При этом в решении (3.5) уравнения (1.1) имеем

$$r/s = \frac{p_{i_1} - p_{i_2}}{i_2 - i_1},$$

а вещественные значения c_* определяются из уравнения

$$\operatorname{sgn}(\mu^{p_{i_2}}) \frac{1}{p_{i_2}!} A_{i_2}^{(p_{i_2})}(\lambda_0) c_*^{i_2 - i_1} + \operatorname{sgn}(\mu^{p_{i_1}}) \frac{1}{p_{i_1}!} A_{i_1}^{(p_{i_1})}(\lambda_0) = 0.$$

4. Пример

Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_0^1 t s x^3(s) ds + (t^2 + \lambda)x(\alpha), \quad t \in [0, 1].$$

Здесь $f(t, \lambda) = t^2 + \lambda$ и ряд (2.1) имеет вид

$$x(t) = (t^2 + \lambda)x_\alpha + \int_0^1 t s (s^2 + \lambda)^3 ds x_\alpha^3 + \dots = 0. \quad (4.1)$$

Поэтому уравнение разветвления (2.2) имеет вид

$$(\alpha^2 + \lambda - 1)x_\alpha + \int_0^1 \alpha s (s^2 + \lambda)^3 ds x_\alpha^3 + \dots = 0.$$

Таким образом,

$$A_1(\lambda) = \alpha^2 + \lambda - 1, \quad A_2(\lambda) = 0, \quad A_3(\lambda) = \int_0^1 \alpha s (s^2 + \lambda)^3 ds.$$

Найдем возможную точку бифуркации λ_0 с помощью Леммы 1:

$$\lambda_0 = 1 - \alpha^2.$$

Для конкретности положим $\alpha = 1$. Тогда $\lambda_0 = 0$, $A_3(\lambda_0) = \int_0^1 s^7 ds = 1/8 \neq 0$ и множество (3.1) состоит из двух точек $\{(1, 1), (3, 0)\}$. Таким образом, диаграмма Ньютона состоит из одного отрезка (рис. 3).

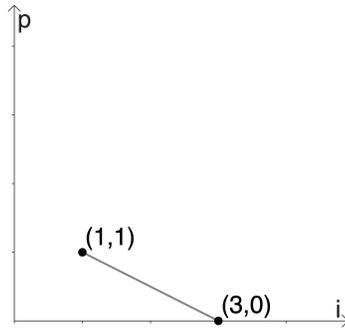


Рис. 3.

Поэтому $r/s = 1/2$, а асимптотика (3.5) имеет вид

$$x(t) \sim t^2 c_* |\lambda|^{1/2}.$$

Постоянная c_* определяется из уравнения

$$\frac{1}{8} c_*^2 + \operatorname{sgn} \lambda = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, в данном примере в отрицательной полуокрестности точки $\lambda_0 = 0$ существует ровно два вещественных решения:

$$x_{\pm} \sim \pm 2\sqrt{2|\lambda|} t^2.$$

Построенную асимптотику можно уточнять, строя непосредственно решения уравнения

$$x(t) = \int_0^1 t s x^3(s) ds + (t^2 + \lambda)x(1)$$

в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) |\lambda|^{i/2}.$$

Для определения функциональных коэффициентов $a_i(t)$ этого ряда легко строятся линейные уравнения:

$$a_i(t) = t^2 a_i(1) + f_i(t, a_1, a_2, \dots, a_{i-2}), \quad (4.3)$$

где $f_1 \equiv f_2 \equiv 0, f_3 = \operatorname{sgn} \lambda a_1(1) + \int_0^1 t s a_1(s)^3 ds, \dots$ найдены методом неопределенных коэффициентов.

Для разрешимости уравнений (4.3) необходимо, чтобы

$$f_i(1, a_1, a_2, \dots, a_{i-2}) = 0, \quad i = 3, 4, \dots \quad (4.4)$$

Коэффициенты a_i имеют вид

$$a_i(t) = t^2 c_i + \hat{a}_i(t), \quad (4.5)$$

где $\hat{a}_i(t)$ — определенные функции.

Постоянные c_i , как и в теории ветвления [2], определяются из условий разрешимости. Ранее мы уже показали, что c_1 определяется двузначно из нелинейного уравнения (4.2). Последующие постоянные c_2, c_3, \dots вычисляются однозначно из линейных алгебраических уравнений, отвечающих условиям разрешимости (4.4).

5. Параметрические семейства решений уравнения (1.1) в точке бифуркации

Введем условие.

Условие 2. Пусть λ_0 является нулем всех коэффициентов $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots$ уравнения разветвления (2.2).

Для выполнения условия 2 очевидно необходимо и достаточно, чтобы $\langle f(t, \lambda_0), \alpha \rangle = 1, \langle a_i(t, \lambda_0), \alpha \rangle = 0, i = 2, 3, \dots$

Лемма 3. Пусть ядро $G(t, s)$ уравнения (1.1) при любом $s \in [a, b]$ удовлетворяет равенству $\langle G, \alpha \rangle = 0$. Тогда $\langle a_n(t, \lambda_0), \alpha \rangle = 0, n = 2, 3, \dots$ Если при этом $\langle f(t, \lambda_0), \alpha \rangle = 1$, то условие 2 выполнится полностью.

Доказательство. Напомним, что на основании метода неопределенных коэффициентов ряд (2.1) удовлетворяет уравнению (1.1) тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$a_1(t, \lambda) = f(t, \lambda),$$

$$a_2(t, \lambda) = \int_a^b G(t, s) [f_{02}(s, \lambda) + f_{20}(s, \lambda) a_1^2(s, \lambda) + f_{11} a_1(s, \lambda)] ds,$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & a_n(t, \lambda) = \\ & = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \int_a^b G(t, s) \sum_{i+k \geq 2}^{\infty} f_{ik}(s, \lambda) (a_1(s, \lambda)x_\alpha + a_2(s, \lambda)x_\alpha^2 + \dots)x_\alpha^k ds \right\} \Big|_{x_\alpha=0}. \end{aligned}$$

Правые части этих равенств после отбрасывания членов, не влияющих на результат, принимают вид

$$\int_a^b G(t, s) \left[\frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \sum_{i+k=2}^n f_{ik}(s, \lambda) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j(s, \lambda) x_\alpha^j \right) \right] \Big|_{x_\alpha=0} ds.$$

Таким образом, коэффициенты $a_2(t, \lambda), a_3(t, \lambda), \dots$ ряда (2.1) вычисляются рекуррентно по формуле

$$a_n(t, \lambda) = \frac{1}{n!} \int_a^b G(t, s) \left[\frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \sum_{i+k=2}^n f_{ik}(s, \lambda) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j(s, \lambda) x_\alpha^j \right)^i x_\alpha^k \right] \Big|_{x_\alpha=0} ds.$$

Применяя к этой формуле линейный функционал $\langle \cdot, \alpha \rangle$, получим равенства

$$\begin{aligned} & \langle a_n(t, \lambda), \alpha \rangle = \\ & = \frac{1}{n!} \int_a^b \langle G(t, s), \alpha \rangle \left[\frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \sum_{i+k=2}^n f_{ik}(s, \lambda) \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j(s, \lambda) x_\alpha^j \right)^i x_\alpha^k \right] \Big|_{x_\alpha=0} ds, \end{aligned}$$

$$n = 2, 3, \dots$$

Если $\langle G(t, s), \alpha \rangle = 0$ для любого $s \in [a, b]$, то $\langle a_n(t, \lambda), \alpha \rangle = 0$, $n = 2, 3, \dots$, для любого λ . \square

Лемма 4. Пусть выполнено условие 2. Тогда уравнение (1.1) при $\lambda = \lambda_0$ имеет непрерывное по t и голоморфное по c решение:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, \lambda_0) c^n$$

при достаточно малом $|c|$.

Доказательство очевидно, так как ряд (2.1) по построению в силу теоремы о неявной функции сходится и удовлетворяет уравнению (1.1). Таким образом нагрузка x_α на основании условия (2) остается произвольной достаточно малой константой.

Итак, на основании лемм 3, 4 справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть в уравнении (1.1) функция $f(t, \lambda)$ и ядро $G(t, s)$ удовлетворяют равенствам

$$\langle f(t, \lambda_0), \alpha \rangle = 1, \quad \langle G(t, s), \alpha \rangle = 0 \quad \text{при любом } s \in [a, b].$$

Тогда λ_0 будет точкой бифуркации уравнения (1.1). Более того, уравнение (1.1) при $\lambda = \lambda_0$ в классе $C_{[a,b]}$ имеет c -параметрическое голоморфное по c решение:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, \lambda_0) c^n, \quad \text{при } |c| < \rho. \quad (5.1)$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_0^1 tx^2(s) ds + \lambda x(0).$$

Так как в этом уравнении $x_\alpha = x(0)$, то выполнены все условия леммы 4. Поэтому все $A_i(\lambda_0)$ в уравнении разветвления (2.2) равны нулю, следовательно нагрузка $x(0)$ может быть произвольной постоянной, а значит верна теорема 2. Таким образом, при $\lambda = 1$ уравнение имеет голоморфное решение вида (5.1).

Это решение ответвляется от тривиального решения. Легко проверить, что уравнение $x(t) = \int_0^1 tx^2(s) ds + x(0)$ имеет ровно два нетривиальных решения. Решения строятся в замкнутом виде по формулам $x_\pm(t) = c + tu_\pm(c)$, где для краткости использовали обозначение $c = x(0)$. Функции $u_+(c)$ и $u_-(c)$ вычисляются явно:

$$u_\pm(c) = \frac{1}{2} \left[-3c + 3 \pm \sqrt{9(c-1)^2 - 12c^2} \right].$$

Решения вещественные при $c \in [-2\sqrt{3} - 3, 2\sqrt{3} - 3]$. Очевидно, что $\lim_{c \rightarrow 0} u_+(c) = 3$ и $\lim_{c \rightarrow 0} u_-(c) = 0$, причем $u_-(c)$ — голоморфная функция в области $(-3 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 3)$ и раскладывается в ряд по степеням c при $|c| < 2\sqrt{3} - 3$. Поэтому решение $x_-(t)$ соответствует решению вида (5.1), существование которого устанавливает теорема 2.

Точка $\lambda_0 = 1$ удовлетворяет введенному выше определению точки бифуркации. Теорема 2 обосновывает возможность построения малого вещественного нетривиального решения уравнения при $\lambda = 1$ в виде ряда по степеням нагрузки $x(0)$ при $|x(0)| < 2\sqrt{3} - 3$, используя элементарный метод неопределенных коэффициентов.

6. Заключение

Ряд нелинейных краевых задач с помощью функции Грина сводится к уравнению Гаммерштейна, поэтому их исследование может быть проведено изложенным выше методом. В более сложной ситуации моделей с несколькими нагрузками и несколькими бифуркационными параметрами наряду с аналитическими методами [2] следует использовать теоретико-групповые методы [14], методы степенной геометрии [1] и другие подходы, показавшие свою эффективность в исследованиях [6; 8; 9; 12; 14].

Результаты статьи обсуждались на конференциях: The 7th International School-Seminar “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2022) [10], 4-я Международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC-2022) [7].

Список источников

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М. : Наука, 1998.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969. 527 с.
3. Волков В. Т., Ягола А. Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление : курс лекций : учеб. пособие. М. : Ун-т Кн. дом, 2008. 140 с.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М. : Едиториал УРСС, 2003. 194 с.
5. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
6. Романова О. А., Сидоров Н. А. О построении траектории одной динамической системы с начальными данными на гиперплоскостях // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 12. С. 93–105.
7. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. О точках бифуркации решения интегрального уравнения Гаммерштейна с нагрузками // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск, 19–22 сент. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 41–44.
8. Сидоров Н. А., Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 226–237.
9. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. Нелинейные уравнения Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами: теоремы существования и построение решений // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 48, № 2. С. 1654–1664. <https://doi.org/10.31857/S0374064121120086>
10. Сидоров Н. А., Сидоров Л. Д. О роли спектра одного класса интегрально-функциональных операторов в решении нелинейных уравнений Вольтерра с нагрузками // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022). Irkutsk, 2022. С. 115–116.
11. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Физматлит, 2007.

12. Sidorov N. A. Special Issue Editorial Solvability of Nonlinear Equations with Parameters: Branching, Regularization, Group Symmetry and Solutions Blow-Up // *Symmetry*. 2022. Vol. 14, Iss. 2. 226. 4 p. <https://doi.org/10.3390/sym14020226>
13. Sidorov N. A., Sidorov D. N., Sinitsyn A. V. *Toward general theory of differential-operator and kinetic models* / ed. L. Chua. S'pore : World Scientific, 2020. 496 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A ; vol. 97). <https://doi.org/10.1142/11651>
14. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*. Dordrecht : Kluwer Publ., 2002. (Mathematics and its Application Ser. ; vol. 550). <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6>

References

1. Bruno A.D. *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations*. Amsterdam, Elsevier, 2000.
2. Vainberg M.M., Trenogin V.A. *Theory of branching of solutions of nonlinear equations*. Groningen, Wolters-Noordhoff B.V., 1964, 510 p.
3. Volkov V.T., Yagola A.G. *Integral equations. Calculus of Variations: Course of lectures: textbook*. Moscow, KDU, 2008. (in Russian)
4. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Integral equations: tasks and examples with solutions*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. (in Russian)
5. Nahushev A.M. *Loaded equations and their applications*. Moscow, Nauka Publ., 2012. (in Russian)
6. Romanova O.A., Sidorov N.A. On the construction of the trajectory of a dynamical system with initial data on the hyperplanes, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2015, vol. 12, pp. 93–105
7. Sidorov N.A., Dreglea Sidorov L.R.D. On Bifurcation Points of the Solution of the Hammerstein Integral Equation with Loads. *Dynamical Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC 2022): Proceedings of the 4th International Conference. Irkutsk, September 19–22, 2022*, pp. 41–44. (in Russian)
8. Sidorov N.A., Leont'ev R.Ju. On solutions of the maximum order of smallness of nonlinear equations with a vector parameter in sectorial neighborhoods. *Tr. IMM UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp.226–237. (in Russian)
9. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, pp. 1640–1651. <https://doi.org/10.1134/S0012266121120107>
10. Sidorov N.A., Sidorov L.D. On the role of the spectrum of one class of integral-functional operators in solving nonlinear Volterra equations with loads. *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022)*, Irkutsk, 2022, pp. 115–116.
11. Trénoquaine V.A. *Analyse fonctionnelle* [traduit du russe par V. Kotliar] Éd. Mir, 1985.
12. Sidorov N.A. Special Issue Editorial Solvability of Nonlinear Equations with Parameters: Branching, Regularization, Group Symmetry and Solutions Blow-Up. *Symmetry*, 2022, vol. 14, iss. 2, 226. <https://doi.org/10.3390/sym14020226>
13. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Sinitsyn A.V. *Toward general theory of differential-operator and kinetic models*. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, vol. 97. Ed. L. Chua. S'pore, World Scientific, 2020, 496 p. <https://doi.org/10.1142/11651>

14. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*. Mathematics and its Application Ser., vol. 550. Kluwer Pub., Dordrecht, 2002. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6>

Об авторах

Сидоров Николай

Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, sidorov@math.isu.runnet.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9331-1921>

Дрегля Сидоров Лев Раян

Денисович, студент, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, lev.ryan.lev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6283-8760>

About the authors

Nikolai A. Sidorov, Dr. Sci.

(Phys.–Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, sidorov@math.isu.runnet.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9331-1921>

Lev Ryan D. Dreglea Sidorov,

student, Irkutsk State University, Irkutsk, 664033, Russian Federation, lev.ryan.lev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6283-8760>

Поступила в редакцию / Received 10.11.2022

Поступила после рецензирования / Revised 06.12.2022

Принята к публикации / Accepted 20.12.2022