Серия «Математика»
2022. Т. 41. С. 69—84

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.968
MSC 45D05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.69

Формулы обращения для трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода с предысторией

Е. Д. Антипина[1,2]✉

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
[2] Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Российская Федерация,
✉ kate19961231@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена решению одного класса уравнений Вольтерра I рода с переменными верхним и нижним пределами. Эти уравнения были введены в связи с задачей идентификации несимметричных ядер для построения интегральных моделей нелинейных динамических систем типа «вход – выход» в виде полиномов Вольтерра. Для решения задачи идентификации используются ранее введенные тестовые сигналы длительностью h (шаг дискретизации сетки) в виде линейной комбинации функций Хевисайда. В статье демонстрируется метод получения искомого решения, развивающий метод шагов для одномерного случая. Устанавливаются условия согласования, обеспечивающие желаемую гладкость решения.

Ключевые слова: полином Вольтерра I рода, метод шагов, переменные пределы интегрирования, условия разрешимости, формулы обращения

Благодарности: Работа поддержана грантом РНФ № 22-21-00409.

Ссылка для цитирования: Антипина Е. Д. Формулы обращения для трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода с предысторией // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 69–84. https://doi.org/10.26516/1997-7670. 2022.41.69

Research article

Inversion Formulas for the Three-Dimensional Volterra Integral Equation of the First Kind with Prehistory

Ekaterina D. Antipina[1,2]✉

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

[2] Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

✉ kate19961231@gmail.com

Abstract. The article is devoted to solving one class of Volterra equations of the first kind with variable upper and lower limits. These equations were introduced in connection with the problem of identifying asymmetric kernels for constructing integral models of nonlinear dynamical systems of "input-output" type in the form of Volterra polynomials. To solve the identification problem, previously introduced test signals with duration h (grid sampling step) are used in the form of a linear combination of Heaviside functions. The article demonstrates a method for obtaining the desired solution, which develops the step method for the one-dimensional case. Matching conditions are established that ensure the desired smoothness of the solution.

Keywords: Volterra polynomial of the first kind, method of steps, variable limits of integration, solvability conditions, inversion formulas

Acknowledgements: The study was financially supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00409).

For citation: Antipina E. D. Inversion Formulas for the Three-Dimensional Volterra Integral Equation of the First Kind with Prehistory. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 69–84. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.69

1. Введение

Математическое моделирование является актуальной областью исследования динамических систем, поскольку дает инструмент для описания их характеристик. Математические модели типа «вход — выход» обладают важным свойством универсальности: принципиально разные физические явления могут описываться одним и тем же аппаратом. В частности, для описания нелинейной динамики достаточно часто применяют конечный отрезок интегро-степенного ряда Вольтерра [9]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_n \le m} f_{i_1,\dots,i_n}(t),\ t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$f_{i_1,\dots,i_n}(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t K_{i_1,\dots,i_n}(s_1,\dots,s_n) \prod_{k=1}^{m} x_k(t-s_k)ds_k. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T$ является вектор-функцией времени, ядра Вольтерра $K_{i_1,\ldots,i_n}$ симметричны по переменным $s_1, \ldots, s_n$, которые соответствуют совпадающим индексам $i_1, \ldots, i_n$.

Чтобы построить модель вида (1.1), (1.2), необходимо решить задачу идентификации функции n переменных $K_{i_1,\ldots,i_n}$ в (1.2). Решение представленной задачи в этой статье будет осуществляться в рамках активного эксперимента, который в отличие от пассивного эксперимента [1] обеспечит редукцию исходной задачи к решению многомерных уравнений Вольтерра I рода с переменными верхним и нижним пределами интегрирования [2].

Как показано в [2; 7], уравнения вольтерровского типа играют важную роль во многих прикладных задачах: в некоторых краевых задачах [4], а также в задачах идентификации и управления сложными динамическими системами. В научной литературе [6] достаточно подробно рассмотрен случай со скалярным входным сигналом. Сложность перехода к векторному случаю обусловлена появлением в (1.1) слагаемых, отвечающих за одновременное изменение входных сигналов разной физической природы. В частности, при $N = 3$, $m = 3$ в (1.1), (1.2) появятся слагаемые, содержащие как частично-симметричные, так и полностью несимметричные ядра.

Статья посвящена исследованию случая полностью несимметричных ядер в предположении, что задача декомпозиции отклика $y(t)$ на составляющие решена, а правая часть $f_{123}(t) = f(t)$ в

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t \psi(s_1, s_2, s_3) x_1(t - s_1) x_2(t - s_2) x_3(t - s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = f(t) \quad (1.3)$$

известна. Для простоты в (1.3) функция $K_{123}(s_1, s_2, s_3)$ обозначена через $\psi(s_1, s_2, s_3)$. В отличие от алгоритмов, разработанных ранее в [2], будем использовать тестовые сигналы минимальной длительности h, где h – шаг дискретизации сетки.

2. Постановка задачи

Представим область определения функции ψ в виде $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{6} \Omega^{(i)}$, где

$$\Omega^{(1)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_2 \le s_3 \le s_1 \le T\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_1 \le s_3 \le s_2 \le T\},$$

$$\Omega^{(3)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_1 \le s_2 \le s_3 \le T\},$$

$$\Omega^{(4)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_2 \le s_1 \le s_3 \le T\},$$

$$\Omega^{(5)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_3 \le s_2 \le s_1 \le T\},$$

$$\Omega^{(6)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \le s_3 \le s_1 \le s_2 \le T\}.$$

Требуется решить задачу идентификации функции трех переменных, поэтому введем дополнительные параметры ν, μ: $0 \le \mu \le \nu < t \le T$, чтобы получить трехмерный континуум исходных данных $\overset{(i)}{z}(t,\nu,\mu)$, $i = \overline{1,6}$, в правой части (1.3).

Для идентификации функции ψ в подобласти $\Omega^{(1)}$ подставим в (1.3) сигналы вида

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathrm{e}(t) - \mathrm{e}(t-h), \\ x_{2_\nu}(t) = \mathrm{e}(t-\nu) - \mathrm{e}(t-\nu-h), \\ x_{3_\mu}(t) = \mathrm{e}(t-\mu) - \mathrm{e}(t-\mu-h). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь t имеет смысл времени, $\mathrm{e}(t)$ — функция Хевисайда, такая что

$$\mathrm{e}(t) = \begin{cases} 0, \ t \le 0, \\ 1, \ t > 0. \end{cases}$$

Отметим, что указанный вид сигналов применялся ранее для идентификации интегралов от ядер методом Product Integration в [8].

Тестовые сигналы для остальных подобластей будут определяться путем перестановки сигналов в (2.1). Таким образом, подставляя входные возмущения вида (2.1), получаем, что задача идентификации ψ может быть сведена к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\begin{aligned}
V_{3(1)}\psi &\equiv \int\limits_{t-h}^{t} ds_1 \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_2 \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} \psi(s_1,s_2,s_3)ds_3 = \overset{(1)}{z}(t,\nu,\mu), \\
V_{3(2)}\psi &\equiv \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int\limits_{t-h}^{t} ds_2 \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} \psi(s_1,s_2,s_3)ds_3 = \overset{(2)}{z}(t,\nu,\mu), \\
V_{3(3)}\psi &\equiv \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_2 \int\limits_{t-h}^{t} \psi(s_1,s_2,s_3)ds_3 = \overset{(3)}{z}(t,\nu,\mu), \qquad (2.2) \\
V_{3(4)}\psi &\equiv \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_1 \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_2 \int\limits_{t-h}^{t} \psi(s_1,s_2,s_3)ds_3 = \overset{(4)}{z}(t,\nu,\mu), \\
V_{3(5)}\psi &\equiv \int\limits_{t-h}^{t} ds_1 \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_2 \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} \psi(s_1,s_2,s_3)ds_3 = \overset{(5)}{z}(t,\nu,\mu),
\end{aligned}$$

$$V_{3(6)}\psi \equiv \int\limits_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_1 \int\limits_{t-h}^{t} ds_2 \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} \psi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(6)}{z}(t, \nu, \mu),$$

$h \le t \le T$, $\nu \le t - h$, $\mu \le t - h$, $\mu \le \nu$.

Заметим, что следует уточнить само понятие решения (2.2). В силу $t - h \ge 0$ в нижних пределах интегрирования, областью определения искомой функции $\bar\psi$ по каждой ее переменной s_1, s_2, s_3 является отрезок $[0, T]$, включающий $[0, h]$. Поэтому уравнение (2.2) имеет смысл только тогда, когда $\bar\psi$ известна при $s_1, s_2, s_3 \in [0, h)$, $s \in [0, T]$:

$$\begin{gathered}
\bar\psi(s_1, s_2, s) = \psi^{(0)}(s_1, s_2, s), \;\; \bar\psi(s_1, s, s_3) = \psi^{(0)}(s_1, s, s_3), \\
\bar\psi(s, s_2, s_3) = \psi^{(0)}(s, s_2, s_3), \;\; \bar\psi(s_1, s, s) = \psi^{(0)}(s_1, s, s), \\
\bar\psi(s, s_2, s) = \psi^{(0)}(s, s_2, s), \;\; \bar\psi(s, s, s_3) = \psi^{(0)}(s, s, s_3).
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Легко заметить, что при $\nu = \mu = 0$ правые части (2.2) равны:

$$\overset{(1)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(2)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(3)}{z}(t, \nu, \mu) =$$
$$= \overset{(4)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(5)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(6)}{z}(t, \nu, \mu) = z(t, 0, 0).$$

Введем сетку узлов с шагом h: $Nh = T$. Для правых частей (2.2) введем следующее разбиение:

$$\Delta_k = \{t, \nu, \mu : \; \nu + h \le t, \; \mu \le \nu, \; kh \le t < (k+1)h\}, \; k = \overline{1, N-1},$$

$$\Delta_N = \{t, \nu, \mu : \; \nu + h \le t, \; \mu + h \le t, \; \mu \le \nu, \; t = Nh\},$$

$$\Delta_0 = \{t, \nu, \mu : \; D_1 \cup D_2, \; \nu \ge \mu \ge 0\},$$

$$D_1 = \{t, \nu, \mu : 0 \le \mu \le \nu \le t, \; 0 \le t < h, \; h > 0\},$$

$$D_2 = \{t, \nu, \mu : t - h \le \mu \le \nu \le t, \; h \le t \le T, \; h > 0\}.$$

Здесь Δ_0 совпадает с предысторией, а также

$$\bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k = \{t, \nu, \mu : \; \nu + h \le t, \; \mu + h \le t, \; h \le t \le T, \; \nu \ge \mu \ge 0, \; h > 0\}.$$

Рассмотрим далее алгоритм получения искомого решения для (2.2), (2.3). Он развивает метод шагов для одномерного случая [2]. Метод шагов является классическим в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [5] и хорошо себя зарекомендовал при построении решения одномерного уравнения Вольтерра I рода с двумя переменными интегрирования [2].

3. Модификация метода шагов

Пусть $\mathbf{N}(t,\nu,\mu)$ — точка плоскости с соответствующими координатами (t,ν,μ). Конструктивная схема алгоритма построения решения состоит из $N+1$ шага. При этом предполагается, что $\mathbf{N}(t,\nu,\mu)\in\Delta_i$ при фиксированном значении $i=\overline{1,N+1}$. На каждом шаге сконцентрируемся на принципиально важных моментах, связанных с разрешимостью (2.2), (2.3) в классе непрерывных несимметричных на Ω функций:

A. Проверка условия разрешимости для правых частей $\overset{(i)}{z}(t,\nu,\mu)$, $i=\overline{1,6}$, которое в классическом случае имеет вид $y(0)=0$.
B. Получение формул, определяющих искомое решение, путем дифференцирования (2.2) по t, ν и μ.
C. Вывод условий согласования, обеспечивающих непрерывность решения.

Перейдем далее к подробному рассмотрению указанного алгоритма.

Шаг 1. A. Покажем, что условие разрешимости для (2.2) в начальной точке $\mathbf{N}(h,0,0)\in\Delta_1$ выполняется:

$$z(t,0,0)=\int\limits_{t-h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{t}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{t}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3=$$

$$=\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{h}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_2\int\limits_{h}^{t}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+$$

$$+\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_1\int\limits_{h}^{t}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{h}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+\int\limits_{t-h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{h}^{t}d\lambda_2\int\limits_{h}^{t}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+$$

$$+\int\limits_{h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{h}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+\int\limits_{h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{h}^{t}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{h}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+$$

$$+\int\limits_{h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_2\int\limits_{h}^{t}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+\int\limits_{h}^{t}d\lambda_1\int\limits_{h}^{t}d\lambda_2\int\limits_{h}^{t}\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3.$$

Далее, учитывая (2.3), получаем

$$z(t,0,0)=\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_1\int\limits_{t-h}^{h}d\lambda_2\int\limits_{t-h}^{h}\psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3+$$

$$+\int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 + \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 +$$

$$+\int\limits_{t-h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 + \int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 +$$

$$+\int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 + \int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 +$$

$$+\int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3.$$

Таким образом, имеет место

$$\int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 = z(t,0,0)-$$

$$-\int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 - \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 - \int\limits_{t-h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 - \int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{t} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv g_1(t,0,0).$$

В результате, в начальной точке $\mathbf{N}(h,0,0) \in \Delta_1$ условие разрешимости для (2.2) удовлетворяется, поскольку

$$g_1(h,0,0) = z(h,0,0) - \int\limits_{0}^{h} d\lambda_1 \int\limits_{0}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{0}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv 0. \qquad (3.1)$$

B. Полагая, что $\overset{(i)}{z}(t,\nu,\mu)$, $g_1(t,\nu,\mu)\in C^{(3)}_{\Delta_1}$, $i=\overline{1,6}$, решение (2.2) находится путем дифференцирования его по t, ν и μ. Уравнение (2.2) в области $\Omega^{(1)}_1(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$ имеет решение следующего вида:

$$\psi^{(1)}(\mathbf{M_1})=\mathcal{D}_3\overset{(1)}{z}+\psi^{(0)}(t-h,t-\nu,t-\mu)+$$
$$+\psi^{(0)}(t,t-\nu-h,t-\mu)-\psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu)+$$
$$+\psi^{(0)}(t,t-\nu,t-\mu-h)-\psi^{(0)}(t-h,t-\nu,t-\mu-h)-$$
$$-\psi^{(0)}(t,t-\nu-h,t-\mu-h)+\psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu-h), \qquad (3.2)$$
$$\mathcal{D}_3\overset{(1)}{z}=(\overset{(1)}{z})'''_{t\nu\mu}+(\overset{(1)}{z})'''_{\nu^2\mu}+(\overset{(1)}{z})'''_{\nu\mu^2},$$

где $\mathbf{M_1}\in\Omega^{(1)}_1(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$, $\psi^{(1)}$ – искомое решение $\bar{\psi}$ на $\Omega^{(1)}_1$.

C. Теперь рассмотрим непрерывность (3.2) на Δ_1. Для этого предположим следующее: $\mathbf{M_1}(p,q,r)\in\Omega^{(1)}_k(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$, $k=\overline{1,N}$ – точка с декартовыми координатами (p,q,r), так что $t-\nu\le q\le r\le p\le t$, $t-\mu\le q\le r\le p\le t$, $\mu\le\nu$; также существует шесть точек, симметричных ей относительно $p=q$, $q=r$, $p=r$, причем $\mathbf{M}_i\in\Omega^{(i)}_k(\mathbf{N})$, где $i=\overline{1,6}$. Перепишем (3.2) следующим образом:

$$\psi^{(k)}(\mathbf{M_1})=\mathcal{D}_3\overset{(1)}{z}+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu)+\psi^{(k-1)}(t,t-\nu-h,t-\mu)-$$
$$-\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu)+\psi^{(k-1)}(t,t-\nu,t-\mu-h)-$$
$$-\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu-h)-\psi^{(k-1)}(t,t-\nu-h,t-\mu-h)+$$
$$+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu-h), \qquad (3.3)$$

где $k=1$. Тем самым, из (3.3) вытекает условие непрерывности стыковки $\psi^{(0)}$ в точке $\mathbf{M_1}\in\Omega^{(1)}_1(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$ для $h\le t<2h$, $\nu=\mu=t-h$:

$$\mathcal{D}_3\overset{(1)}{z}|_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)}=\psi^{(k)}(t,t-\nu,t-\mu)-\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu)-$$
$$-\psi^{(k-1)}(t,t-\nu-h,t-\mu)+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu)-$$
$$-\psi^{(k-1)}(t,t-\nu,t-\mu-h)+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu-h)+$$
$$+\psi^{(k-1)}(t,t-\nu-h,t-\mu-h)-\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu-h)=$$
$$=\psi^{(k-1)}(t,t-\nu,t-\mu)-\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu)- \qquad (3.4)$$
$$-\psi^{(k-1)}(t,t-\nu-h,t-\mu)+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu-h,t-\mu)-$$
$$-\psi^{(k-1)}(t,t-\nu,t-\mu-h)+\psi^{(k-1)}(t-h,t-\nu,t-\mu-h)+$$

$$+\psi^{(k-1)}(t, t-\nu-h, t-\mu-h) - \psi^{(k-1)}(t-h, t-\nu-h, t-\mu-h).$$

Также здесь стоит отметить, что стыковка областей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1,6}$, осуществляется специальным образом (рис. 1).

На рис. 1 сплошной линией соединены области, которые пересекаются при $\nu = \mu = 0$, пунктирной точкой – при $\mu = 0$ и $\nu \neq 0$, длинным пунктиром – при $\nu = \mu \neq 0$.

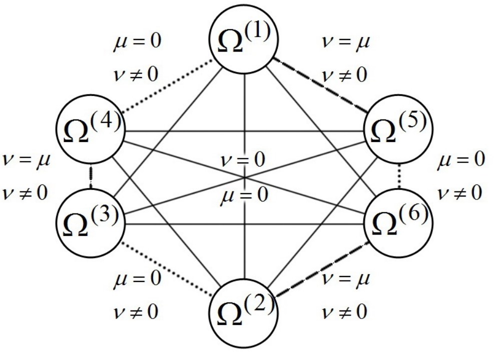

Рис. 1. Специфика соотношения областей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1,6}$

В результате соотношение (3.4) верно при $\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(5)}$, т. е. $h \leq t < 2h$, $0 \leq \mu = \nu \leq t-h$ и $\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(4)}$, т. е. $h \leq t < 2h$, $\nu = t-h$, $\mu = 0$.

Если $\psi^{(0)}(t, t-\nu, t-\mu)$ непрерывна на Ω_0 (Ω_0 – область, содержащая предысторию), то в силу (3.4) $\psi^{(1)}(t, t-\nu, t-\mu)$ непрерывна на $\Omega_1^{(1)}$. Подобная логика работает и с $\psi^{(1)}$ из областей $\Omega_1^{(i)}$, $i = \overline{2,6}$.

Шаг 2. Не нарушая общности, ограничимся на данном шаге подробным рассмотрением пунктов **A** и **C** алгоритма.

A. Теперь рассмотрим область Δ_2. Пусть $\mathbf{N}(t,0,0) \in \Delta_2$, тогда по аналогии с предыдущим случаем получим

$$\int\limits_{2h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{2h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{2h}^{t} \psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 = z(t,0,0) -$$

$$-\int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{2h} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 - \int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int\limits_{2h}^{t} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{2h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{2h} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 - \int\limits_{t-h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{2h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{2h}^{t} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{2h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{2h} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 - \int\limits_{2h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{2h}^{t} d\lambda_2 \int\limits_{t-h}^{2h} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) d\lambda_3 -$$

$$-\int\limits_{2h}^{t} d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int\limits_{2h}^{t} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv g_2(t,0,0).$$

Условие разрешимости $g_2(2h,0,0) = 0$ заведомо выполняется, так как

$$g_2(2h,0,0) = z(2h,0,0) - \int\limits_{h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{h}^{2h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{2h} \psi^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv 0. \quad (3.5)$$

C. Также стоит отметить, что из-за специфики стыковки областей (рис. 1) возникают дополнительные условия, которые выводятся по аналогии с (3.4). Так для точки $\mathbf{N}(2h,h,h)$ условие стыковки имеет вид

$$g_{2_1}(2h,h,h) = \overset{(j)}{z}(2h,h,h) - \int\limits_{h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{0}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{0}^{h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv 0, \ j = 1,5,$$

$$\overset{(1)}{z}(2h,h,h) = \overset{(5)}{z}(2h,h,h), \quad (3.6)$$

а в точке $\mathbf{N}(2h,h,0)$ условие стыковки представляется как

$$g_{2_2}(2h,h,0) = \overset{(j)}{z}(2h,h,0) - \int\limits_{h}^{2h} d\lambda_1 \int\limits_{0}^{h} d\lambda_2 \int\limits_{h}^{2h} \psi^{(0)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\lambda_3 \equiv 0, \ j = 1,4,$$

$$\overset{(1)}{z}(2h,h,0) = \overset{(4)}{z}(2h,h,0). \quad (3.7)$$

Таким образом, в предположении $\overset{(i)}{z}(t,\nu,\mu)$, $g_2(t,\nu,\mu)$, $g_{2_1}(t,\nu,\mu)$, $g_{2_2}(t,\nu,\mu) \in C^{(3)}_{\Delta_2}$, $i = \overline{1,6}$, решение (2.2) принимает вид (3.3) при $k = 2$. Убедимся, что условия (3.4) при $k = 2$ обеспечивают непрерывность, во-первых, функций $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(2)}$ при $2h \le t < 3h$, $t-h \le \nu < t$, $\mu = t-h$, во-вторых, функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ при $t = 2h$, $t-2h \le \mu \le \nu \le t-h$.

Действительно, в первом случае из (3.4) следует, что

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z}|_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)} = \psi^{(2)}(t,t-\nu,h) - \psi^{(1)}(t-h,t-\nu,h) - \psi^{(1)}(t,t-\nu-h,h) +$$
$$+\psi^{(1)}(t-h,t-\nu-h,h) - \psi^{(1)}(t,t-\nu,0) + \psi^{(1)}(t-h,t-\nu,0) + \psi^{(1)}(t,t-\nu-h,0) -$$
$$-\psi^{(1)}(t-h,t-\nu-h,0) = \psi^{(2)}(t,t-\nu,h) - \psi^{(0)}(t-h,t-\nu,h) - \psi^{(0)}(t,t-\nu-h,h) +$$
$$+\psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,h) - \psi^{(0)}(t,t-\nu,0) + \psi^{(0)}(t-h,t-\nu,0) +$$
$$+\psi^{(0)}(t,t-\nu-h,0) - \psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,0),$$

так что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi^{(0)}(t,t-\nu,h-\varepsilon) = \psi^{(2)}(t,t-\nu,h)$.

Во втором случае

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)} = \psi^{(2)}(2h, 2h-\nu, 2h-\mu) - \psi^{(1)}(h, 2h-\nu, 2h-\mu) -$$
$$-\psi^{(1)}(2h, h-\nu, 2h-\mu) + \psi^{(1)}(h, h-\nu, 2h-\mu) - \psi^{(1)}(2h, 2h-\nu, h-\mu) +$$
$$+\psi^{(1)}(h, 2h-\nu, h-\mu) + \psi^{(1)}(2h, h-\nu, h-\mu) - \psi^{(1)}(h, h-\nu, h-\mu) =$$
$$= \psi^{(1)}(2h, 2h-\nu, 2h-\mu) - \psi^{(1)}(h, 2h-\nu, 2h-\mu) - \psi^{(1)}(2h, h-\nu, 2h-\mu) +$$
$$+\psi^{(1)}(h, h-\nu, 2h-\mu) - \psi^{(1)}(2h, 2h-\nu, h-\mu) + \psi^{(1)}(h, 2h-\nu, h-\mu) +$$
$$+\psi^{(1)}(2h, h-\nu, h-\mu) - \psi^{(1)}(h, h-\nu, h-\mu),$$

так что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi^{(1)}(2h-\varepsilon, 2h-\nu, 2h-\mu) = \psi^{(2)}(2h, 2h-\nu, 2h-\mu)$.

Также отметим, что $\psi^{(2)}$ из области $\Omega_2^{(1)}$ пересекается на границе с $\psi^{(2)}$ из областей $\Omega_2^{(4)}$ и $\Omega_2^{(5)}$. Здесь непрерывность решения осуществляется за счет равенства правых частей (2.2): $\overset{(1)}{z}(2h, h, 0) = \overset{(4)}{z}(2h, h, 0)$, $\overset{(1)}{z}(2h, h, h) = \overset{(5)}{z}(2h, h, h)$ (см. рис. 1).

Шаг $N+1$**.** Продолжая этот процесс по k до значения $N+1$, находим решение (2.2), (2.3). Для краткости ограничимся пунктом **B** алгоритма и подобластью $\Omega^{(1)}$. Таким образом, решение уравнения $V_{3(1)}\psi = \overset{(1)}{z}$ из (2.2) определяется формулой обращения (по терминологии [2])

$$\bar{\psi}(t, t-\nu, t-\mu) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)\in\Delta_k} + \sum_{k=1}^{N+1} (\psi^{(k-1)}(t-h, t-\nu, t-\mu) +$$
$$+ \psi^{(k-1)}(t, t-\nu-h, t-\mu) - \psi^{(k-1)}(t-h, t-\nu-h, t-\mu) +$$
$$+ \psi^{(k-1)}(t, t-\nu, t-\mu-h) - \psi^{(k-1)}(t-h, t-\nu, t-\mu-h) -$$
$$- \psi^{(k-1)}(t, t-\nu-h, t-\mu-h) + \psi^{(k-1)}(t-h, t-\nu-h, t-\mu-h)). \tag{3.8}$$

Решение (2.2), (2.3) в остальных подобластях $\Omega^{(i)} \in \Omega$, $i = \overline{2,6}$ будет иметь аналогичный вид.

Замечание 1. Следует отметить, что причина проверки условий типа (3.1), (3.5), как и в классическом случае (см., например [3, с. 5-7]), связана с обеспечением взаимной обратимости операторов интегрирования $V_{3(i)}$, $i = \overline{1,6}$, и дифференцирования $\mathcal{D}_3$ при действии $\mathcal{D}_3$ справа.

Анализируя условие (3.5) при $k = \overline{1, N+1}$ можно выделить условия, которые обеспечивают непрерывность $\bar{\psi}$ внутри каждой из подобластей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1,6}$. Ограничившись для простоты подобластью $\Omega^{(1)}$, по аналогии с [7] сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $\bar{\psi} = \sum\limits_{i=1}^{N+1} \psi^{(i)}$ *решение (2.2) на* $\Omega^{(1)}$ *с предысторией* $\psi^{(0)}$ *(2.3), непрерывной на* $\Omega_0(\mathbf{N})$, $\mathbf{N} \in \Delta_0$, *и пусть функция* $\overset{(1)}{z}$ *удовлетворяет условиям*

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)} \in C_{\Omega^{(1)}},$$

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,t-h)} = \psi^{(0)}(t,t-\nu,h)-\psi^{(0)}(t-h,t-\nu,h)-\psi^{(0)}(t,t-\nu-h,h)+$$
$$+\psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,h)-\psi^{(0)}(t,t-\nu,0)+\psi^{(0)}(t-h,t-\nu,0)+$$
$$+\psi^{(0)}(t,t-\nu-h,0)-\psi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,0).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi^{(0)}(t,t-\nu,h-\varepsilon) = \psi^{(i)}(t,t-\nu,h),\ i=\overline{1,N+1},\ \mathbf{N}(t,\nu,t-h)\in\Delta_1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi^{(i-1)}(t,t-\nu-\varepsilon,t-\mu-\varepsilon)=\psi^{(i)}(t,t-\nu,t-\mu), i=\overline{2,N+1},\ \mathbf{N}(t,\nu,\mu)\in\Delta_i.$$

Доказательство следует из геометрических соображений.

4. Иллюстративный пример

Рассмотрим пример применения условий разрешимости и формулы решения (3.8) уравнения (2.2), (2.3). Пусть $h = 1$, так что из (2.2) имеем

$$\overset{(1)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3+\nu^2-\mu-\frac{1}{4}t\nu+\nu\mu+2,\ \overset{(3)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3+\nu^2-\frac{5}{4}\mu+2, \tag{4.1}$$

$$\overset{(2)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3-5\nu^2-\frac{1}{4}t\nu+\nu\mu+2,\ \overset{(4)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3-\nu^2-\nu\mu+2, \tag{4.2}$$

$$\overset{(5)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3+\mu-\frac{3}{4}t^2\nu+\nu\mu+2,\ \overset{(6)}{z}(t,\nu,\mu) = -t^3-\mu-\frac{7}{4}t^2\nu+2, \tag{4.3}$$

где $t \in [0,3]$, $\mu \le \nu \le t-1$ и

$$\psi^{(0)}(s_1,s_2,s_3) = \frac{1}{2}s_1 - s_2 + \frac{5}{2}s_3;\ \ \psi^{(0)}(s_2,s_1,s_3) = \frac{1}{2}s_2 - s_1 + \frac{5}{2}s_3;$$

$$\psi^{(0)}(s_2,s_3,s_1) = \frac{1}{2}s_2 - s_3 + \frac{5}{2}s_1;\ \ \psi^{(0)}(s_3,s_2,s_1) = \frac{1}{2}s_3 - s_2 + \frac{5}{2}s_1;$$

$$\psi^{(0)}(s_1,s_3,s_2) = \frac{1}{2}s_1 - s_3 + \frac{5}{2}s_2;\ \ \psi^{(0)}(s_3,s_1,s_2) = \frac{1}{2}s_3 - s_1 + \frac{5}{2}s_2,$$
$$s_1,s_3\in[0,3],\ s_2\in[0,1),\ s_2\le s_3\le s_1. \tag{4.4}$$

Теперь поверим выполнение условия разрешимости (3.1). Принимая во внимание, что Ω — куб, рассмотрим следующее равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} \psi(s_1, s_2, s_3) \prod_{i=1}^{3} ds_i = \iiint\limits_{\Omega} \psi(s_1, s_3, s_2) \prod_{i=1}^{3} ds_i =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \psi(s_2, s_1, s_3) \prod_{i=1}^{3} ds_i = \iiint\limits_{\Omega} \psi(s_2, s_3, s_1) \prod_{i=1}^{3} ds_i =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \psi(s_3, s_2, s_1) \prod_{i=1}^{3} ds_i = \iiint\limits_{\Omega} \psi(s_3, s_1, s_2) \prod_{i=1}^{3} ds_i =$$

$$= \frac{1}{6} \iiint\limits_{\Omega} (\psi(s_1, s_2, s_3) + \psi(s_1, s_3, s_2) + \psi(s_2, s_1, s_3) +$$

$$+ \psi(s_2, s_3, s_1) + \psi(s_3, s_2, s_1) + \psi(s_3, s_1, s_2)) \prod_{i=1}^{3} ds_i.$$

Учитывая (4.1)–(4.4) и полагая, что мы находимся в Δ_1, имеем

$$V_{3(j)}\psi = \frac{2}{3} \int\limits_{t-1}^{t} \int\limits_{t-1}^{t} \int\limits_{t-1}^{t} (s_1 + s_2 + s_3) \prod_{i=1}^{3} ds_i, \ j = \overline{1,6}.$$

Далее найдем $z(t,0,0) = \overset{(i)}{z}(t,0,0), \ i = \overline{1,6}$, из (4.1)–(4.3) при $\nu = \mu = 0$:

$$z(t,0,0) = -t^3 + 2.$$

Теперь мы можем проверить условие (3.1) при $t \in [1,2)$:

$$z(1,0,0) = 1 - \frac{2}{3} \int\limits_{0}^{1} ds_1 \int\limits_{0}^{1} ds_2 \int\limits_{0}^{1} (s_1 + s_2 + s_3) ds_3 = 1 - 1 \equiv 0.$$

Таким образом, согласно (3.2), для $\mathbf{N}(t,\nu,\mu)) \in \Delta_1 = \{t,\nu,\mu : \mu \leq \nu \leq t-1, \ \ 1 \leq t < 2\}$ получим

$$\psi^{(1)}(\mathbf{M}_1) = \frac{1}{2}s_1 - s_2 + \frac{5}{2}s_3, \ \psi^{(1)}(\mathbf{M}_2) = \frac{1}{2}s_2 - s_1 + \frac{5}{2}s_3,$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{M}_3) = \frac{1}{2}s_2 - s_3 + \frac{5}{2}s_1, \ \psi^{(1)}(\mathbf{M}_4) = \frac{1}{2}s_3 - s_2 + \frac{5}{2}s_1,$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{M}_5) = \frac{1}{2}s_1 - s_3 + \frac{5}{2}s_2, \ \psi^{(1)}(\mathbf{M}_6) = \frac{1}{2}s_3 - s_1 + \frac{5}{2}s_2,$$

где $\mathbf{M}_i(p,q,r) \in \Omega_1^{(i)}(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$, $i=\overline{1,6}$, $s_1=t$, $s_2=t-\nu$, $s_3=t-\mu$. Поскольку условие согласования (3.4) правой части выполняется, то $\psi^{(1)}$ непрерывно в $\Omega_1^{(i)}(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$, $i=\overline{1,6}$.

Далее предположим, что $\mathbf{N}(t,\nu,\mu)) \in \Delta_2 = \{t,\nu,\mu : \mu \le \nu \le t-1,\ 2 \le t < 3\}$, тогда

$$z(2,0,0) = -6 \neq \frac{2}{3}\int\limits_1^2 ds_1 \int\limits_1^2 ds_2 \int\limits_1^2 (s_1+s_2+s_3)ds_3 = 3.$$

Следовательно, задача (4.1)–(4.4) не разрешима в классе непрерывных функций, ограниченных областями $\Omega_2^{(i)}(\mathbf{N}(t,\nu,\mu))$, $i=\overline{1,6}$, ввиду того что условие (3.6) не выполняется.

5. Заключение

В работе рассмотрено решение трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода, возникающего в задаче идентификации несимметричных ядер Вольтерра. Метод получения искомого решения развивает метод шагов для одномерного случая. Указаны условия согласования, обеспечивающие непрерывность решения. Приведены явные формулы обращения для выделенного класса интегрального уравнения с двумя переменными пределами интегрирования. Специфика полученных формул показана на тестовом примере.

Список источников

1. Абас В. М. А., Арутюнян Р. В. Анализ и оптимизация нелинейных систем с памятью на основе интегро-функциональных рядов Вольтерра и методов Монте-Карло // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2021. № 3 (211). С. 30–34. https://doi.org/10.17213/1560-3644-2021-3-30-34
2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория чисел и численные методы. Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1999. 193 с.
3. Апарцин А. С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (скалярный случай) : препринт / ИСЭМ СО РАН. Иркутск : СЭИ СО РАН, 1995. 30 с.
4. Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н. Формулы обращения некоторых двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Известия вузов. Математика. 1998. № 9. С. 30–32.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1971. 296 с.
6. Cheng C. M., Peng Z. K., Zhang W. M., Meng G. Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. Vol. 87. P. 340–364. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.10.029

7. Markova E., Sidler I., Solodusha S. Integral models based on volterra equations with prehistory and their applications in energy // Mathematics. 2021. Vol. 9, N 10. P. 1127. https://doi.org/10.3390/math9101127
8. Solodusha S. V. Identification of Integral Models of Nonlinear Multi-input Dynamic Systems Using the Product Integration Method // Stability and Control Processes. SCP 2020. LNCIS - Proceedings. Springer, Cham, 2022. P. 137–147. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2_16
9. Volterra V. A theory of functionals, integral and integro-differential equations. New York : Dover Publ, 1959. 288 p.

References

1. Abas W.M.A., Harutyunyan R.V. Analysis and optimization of nonlinear systems with memory based on Volterra integro-functional series and Monte-Carlo methods. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy Region. Tekhnicheskie Nauki*, 2021, no. 3, pp. 30–34. https://doi.org/10.17213/1560-3644-2021-3-30-34 (in Russian)
2. Apartsyn A.S. *Nonclassical Volterra equations of the first kind: theory and numerical methods.* Boston, Utrecht, VSP, 2003, 168 p.
3. Apartsyn A.S. Existences and uniqueness' theorems of the solutions of the Volterra equations of the I kind, non-linear dynamic systems connected to identification (scalar case), Preprint no. 9. Irkutsk, Publ. of SEI SB RAS, 1995, 30 p. (in Russian)
4. Volkodavov V.F., Rodionova I.N. Inversion formulas for some two-dimensional Volterra integral equations of the first kind. *Russian Math.*, 1998, vol. 42, no. 9, pp. 28–30.
5. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Introduction into the theory of differential equations with a deviating argument.* Moscow, Nauka Publ., 1971, 296 p.(in Russian)
6. Cheng C. M., Peng Z. K., Zhang W. M., Meng G. Volterra-series-based nonlin-ear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, vol. 87, pp. 340–364. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.10.029
7. Markova E., Sidler I., Solodusha S. Integral models based on volterra equations with prehistory and their applications in energy. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 10, pp. 1127. https://doi.org/10.3390/math9101127
8. Solodusha S.V. Identification of Integral Models of Nonlinear Multi-Input Dynamic Systems Using the Product Integration Method. *Stability and Control Processes. SCP 2020. LNCIS - Proceedings*. Springer, Cham, 2022, pp. 137–147. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2_16
9. Volterra V. *A theory of functionals, integral and integro-differential equations.* New York, Dover Publ., 1959, 288 p.

Об авторах

Антипина Екатерина Дмитриевна, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск; Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, kate19961231@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9470-9824

About the authors

Ekaterina D. Antipina, Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation; Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, kate19961231@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9470-9824

Поступила в редакцию / Received 28.03.2022
Поступила после рецензирования / Revised 12.07.2022
Принята к публикации / Accepted 22.08.2022