Серия «Математика»
2022. Т. 40. С. 49—62

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Research article

УДК 512.5
MSC 20G15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.49

О порождении групп $\mathbf{SL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ и $\mathbf{PSL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны

Р. И. Гвоздев[1], **Я. Н. Нужин**[1✉], **Т. Б. Шаипова**[2]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
[2] Красноярский научный центр СО РАН, Красноярск, Российская Федерация
✉ nuzhin2008@rambler.ru

Аннотация. М. К. Тамбурини и П. Цукка [10] доказали, что специальная линейная группа размерности больше 13 над кольцом целых гауссовых чисел порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Аналогичный результат для проективных специальных линейных групп размерности больше 6 установили Д. В. Левчук и Я. Н. Нужин [9; 2]. В статье рассмотрены оставшиеся малые размерности. В частности, доказано, что проективная специальная линейная группа размерности, отличной от 5 и 6, над кольцом целых гауссовых чисел тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда ее размерность больше 6. Для размерностей 5 и 6 удалось найти только порождающие тройки инволюций без условия перестановочности двух из них.

Ключевые слова: специальная и проективная специальная линейные группы, кольцо целых гауссовых чисел, порождающие тройки инволюций

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2021-1388) и РФФИ (проект 19–01–00566).

Ссылка для цитирования: Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н., Шаипова Т. Б. О порождении групп $\mathbf{SL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ и $\mathbf{PSL_n}(\mathbb{Z}+\mathbf{i}\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 40. С. 49–62.
https://doi.org/10.26516/1997-7670. 2022.40.49

Research article

On Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute

Rodion I. Gvozdev[1], **Yakov N. Nuzhin**[1✉], **Tatyana B. Shaipova**[2]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
[2] Krasnoyarsk Scientific Center of the Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ nuzhin2008@rambler.ru

Abstract. M. C. Tamburini and P. Zucca proved that the special linear group of dimension greater than 13 over the ring of Gaussian integers is generated by three involutions, two of which commute (J. of Algebra, 1997). A similar result for projective special linear groups of dimension greater than 6 was established by D. V. Levchuk and Ya. N. Nuzhin (J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2008, Bulletin of Novosibirsk State Univ., 2009). We consider the remaining small dimensions. It is proved that the projective special linear group of dimension other than 5 and 6 over the ring of Gaussian integers if and only if is generated by three involutions, two of which commute when its dimension is greater than 6. For dimension 5 and 6, it was possible to find only generators triples of involutions without the condition that two of which commute.

Keywords: special and projective special linear groups, the ring of Gaussian integers, generating triples of involutions

Acknowledgements: The work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, funded by the Ministry of Education and Science of Russian Federation as part of the activities for the creation and development of regional scientific and educational mathematical centers (agreement 075-02-2021-1388) and RFBR (project 19–01–00566)

For citation: Gvozdev R. I., Nuzhin Ya. N., Shaipov T.B. On Generation of the Groups $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by Three Involutions, Two of Which Commute. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 40, pp. 49–62. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.49

1. Введение

Группы, порожденные тремя инволюциями, две их которых перестановочны, будем называть $(2\times 2,2)$-*порожденными.* Очевидно, из $(2\times 2,2)$-порождаемости какой-то группы следует $(2\times 2,2)$-порождаемость любого ее неединичного гомоморфного образа, при этом мы не исключаем того, что две или все три инволюции совпадают. В работе [10] доказана $(2\times 2,2)$-порождаемость некоторых классических групп над определенными d-порожденными областями целостности достаточно большой размерности n, зависящей от параметра d, в частности, доказана $(2\times 2,2)$-порождаемость специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ при $n\geq 14$. В работах [9] и [2] установлена $(2\times 2,2)$-порождаемость проективной специальной линейной группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ при $n\geq 8$ и соответственно при $n=7$. Доказательство в [2; 9] состояло в том, что порождающие тройки указывались в явном виде, более того, при $n\neq 4k+2$ они выбирались из специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Поэтому для таких размерностей справедлив более сильный результат. При $n\geq 7$ и $n\neq 4k+2$ группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является $(2\times 2,2)$-порожденной. Мы рассматриваем оставшиеся малые размерности $n\leq 6$. Доказана

Теорема 1. *а) Группа $SL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не порождается никаким множеством инволюций.*

б) Группы $PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, но не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

в) Группы $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями.

Поскольку мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ циклическая порядка 4, то $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в случае нечетного n. Поэтому в теореме 1 при $n=3,5$ мы указываем только $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Группа $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, но неизвестно, будет ли она $(2\times 2,2)$-порожденной. Группа $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной [6], но неизвестно, порождается ли она тремя инволюциями. Тем не менее, объединяя теорему 1 с указанными выше утверждениями из [2; 9], получаем для групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ следующий почти законченный результат.

Теорема 2. *При $n\neq 5,6$ группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n\geq 7$.*

В завершение отметим, что при выборе порождающих троек инволюций мы используем методы статьи [5], где доказан следующий результат. Группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда является $(2\times 2,2)$-порожденной, когда $n\geq 5$.

2. Определения и предварительные результаты

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей 1. Зафиксируем некоторые специальные элементы из общей линейной группы $GL_n(R)$ и ее подгруппы матриц $SL_n(R)$ с определителем 1 над кольцом R. Для элементов из проективной группы $PSL_n(R)$ будем также использовать матричную запись, считая при этом два элемента равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу из $SL_n(R)$. Элементарные трансвекции

$$t_{ij}(k) = E_n + ke_{ij},\ i,j = 1,2,\dots,n,\ i \neq j,\ k \in R,$$

будем называть просто трансвекциями, где E_n — единичная матрица степени n, а e_{ij} — $(n \times n)$-матрица с 1 на позиции (i,j) и нулями в остальных местах. Положим также

$$t_{ij}(R) = \langle t_{ij}(k) \mid k \in R \rangle,\ i,j = 1,2,\dots,n,\ i \neq j.$$

Здесь и далее для любого непустого подмножества M некоторой группы через $\langle M \rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множеством M. Следующая лемма хорошо известна (см., например, [7, с. 107]).

Лемма 1. *Группа $SL_n(R)$ над евлидовым кольцом R порождается подгруппами $t_{ij}(R)$, $i,j = 1,\dots,n$.*

Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, где $i^2 = -1$, евклидовы (см., например, [1, с. 439]), а поскольку $t_{rs}(\mathbb{Z}) = \langle t_{rs}(1) \rangle$ и $t_{rs}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) = \langle t_{rs}(1), t_{rs}(i) \rangle$, то следствием леммы 1 является

Лемма 2. *а) Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями*

$$t_{ij}(1), i,j = 1,\dots,n.$$

б) Группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{rs}(1)$, $t_{rs}(i)$, $r,s = 1,\dots,n$.

В доказательствах о порождении групп $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ определенным набором инволюций будет использоваться матрица

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа, порожденная матрицей μ, действует сопряжениями транзитивно на множестве трансвекций

$$T = \{t_{1n}((-1)^{n+1}),\ t_{i+1i}(1),\ i = 1,2,\dots,n-1\}$$

и на транспонированном множестве

$$T' = \{t_{n1}((-1)^{n+1}),\ t_{ii+1}(1),\ i = 1,2,\dots,n-1\}.$$

Коммутируя между собой элементы из множества T или из T', мы получим все трансвекции $t_{ij}(1)$, $i,j = 1,\dots,n$. Поэтому в силу леммы 2а) каждое из множеств T и T' порождает группу $SL_n(\mathbb{Z})$. Более того, справедлива

Лемма 3. *а) Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается матрицей μ и одной трансвекцией из множества T или из множества T'.*

б) Группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается матрицей μ в совокупности с одной трансвекцией из множества T или из T' и любой трансвекцией $t_{rs}(i)$.

в) Группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается каждым из множеств T и T' в совокупности с любой трансвекцией $t_{rs}(i)$.

Как уже отмечалось во введении, утверждение следующей леммы очевидно, но мы фиксируем его еще раз в виде леммы для удобства ссылок в доказательствах.

Лемма 4. *Из $(2\times 2,2)$-порождаемости группы следует $(2\times 2,2)$-порождаемость любого ее неединичного гомоморфного образа.*

Пусть I — идеал кольца R. Тогда естественный кольцевой гомоморфизм $\rho_I:\ R\to R/I$ определяет сюръективный гомоморфизм

$$\psi_I:\ M_n(R)\to M_n(R/I)$$

кольца $n\times n$-матриц $M_n(R)$ с обычными операциями сложения и умножения, где для любой матрицы $(a_{ij})\in M_n(R)$ по определению

$$\psi_I:\ (a_{ij})\to(\rho_I(a_{ij})).$$

С другой стороны, гомоморфизм ρ_I индуцирует гомоморфизм групп

$$\varphi_I:\ GL_n(R)\to GL_n(R/I),$$

$$\varphi_I:\ SL_n(R)\to SL_n(R/I),$$

где также определению

$$\varphi_I:\ (a_{ij})\to(\rho_I(a_{ij})).$$

Д. А. Супруненко называет φ_I *гомоморфизмом Минковского* [8, стр. 95]. Однако, гомоморфизм φ_I уже не обязан быть сюръективным как гомоморфизм ψ_I.

Пример 1. Пусть $R=\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, а I — идеал, порожденный элементом 3. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ имеет порядок 4 и порождается элементом i. Поэтому

$$GL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)=\langle d(i)\rangle SL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i),$$

где

$$d(i)=diag(i,1,\dots,1).$$

Поскольку SL_n над евклидовым кольцом и над полем порождается трансвекциями, то редукция по модулю 3 дает гомоморфизм φ_I группы $GL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на собственную подгруппу $\langle d(i)\rangle SL_n(9)$ индекса 2 группы $GL_n(9)$ (см. доказательство леммы 6 ниже). На этот пример указал второму автору статьи М. А. Всемирнов еще в 2017 г.

Далее, как и в примере 1, линейную группу типа X_n над конечным полем из q элементов будем обозначать через $X_n(q)$.

Лемма 5. *Группа $PSL_n(2)$ является гомоморфным образом групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Поскольку фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ по идеалу I, порожденному элементом $1+i$, изоморфно полю из двух элементов и группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(2)=PSL_n(2)$ порождаются трансвекциями в силу леммы 1, то гомоморфизм $\varphi_I : SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \to SL_n(2)$ сюръективен. Все диагональные и, в частности, скалярные матрицы лежат в ядре гомоморфизма φ_I. Поэтому существует гомоморфизм группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на группу $PSL_n(2)$. □

Лемма 6. *Группа $PSL_n(9)$ является гомоморфным образом групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

Доказательство. В евклидовом кольце свойство элемента p быть простым эквивалентно условию максимальности порожденного им идеала, а простое число $p \in \mathbb{Z}$ остается простым элементом в кольце $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $p=4k-1$ (см., например, [1, с. 440, 441]). Поэтому фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ по идеалу I, порожденному элементом 3, изоморфно полю из девяти элементов. Группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(9)$ порождаются трансвекциями в силу леммы 1, следовательно, гомоморфизм $\varphi_I : SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \to SL_n(9)$ сюръективен. С другой стороны, имеется гомоморфизм π группы $SL_n(9)$ на группу $PSL_n(9)$. Поэтому композиция $\pi\circ\varphi$ задает гомоморфизм $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на $PSL_n(9)$, а поскольку все скалярные матрицы лежат в ядре гомоморфизма $\pi\circ\varphi$, то существует гомоморфизм $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на $PSL_n(9)$. □

Ниже используются следующие сокращения: $a^b = bab^{-1}$, $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$.

3. Доказательство теоремы 1

Случай $\mathbf{SL_2}$. В группе $SL_2(R)$ над любым коммутативным кольцом с единицей характеристики, отличной от 2, есть только одна инволюция $diag(-1,-1)$, поэтому она не порождается никаким множеством инволюций.

Случай $\mathbf{PSL_2}$. Группа $PSL_2(9)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [4]. Поэтому в силу лемм 4 и 6 группа $PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ также не является $(2\times 2,2)$-порожденной, но она порождается тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1+i & i \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

никакие две из которых не перестановочны. Действительно, пусть $M = \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. По лемме 2а) две матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\beta$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma\alpha\beta\gamma$$

порождают группу $PSL_2(\mathbb{Z})$ и, в частности, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta$$

лежит в подгруппе M. Следовательно, в M лежит и матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \eta\gamma\beta.$$

Четыре последних матрицы порождают всю группу $PSL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ в силу леммы 2б).

Случаи $\mathbf{SL_3}$, $\mathbf{SL_4}$ и $\mathbf{PSL_4}$. Группы $PSL_3(2)$ и $PSL_4(2)$ не являются $(2\times 2, 2)$-порожденными [3], поэтому в силу лемм 4 и 5 группы $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ также не является $(2\times 2, 2)$-порожденными.

Группа $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ $(= PSL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $M = \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Наша задача — установить равенство $M = SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Вычисления показывают, что

$$(\alpha\beta)^2 = t_{31}(i),$$
$$\gamma(\alpha\beta)^2\gamma = t_{13}(i),$$
$$\Big(\alpha\big(\gamma(\alpha\beta)^2\gamma\big)\Big)^2 = t_{23}(-i),$$
$$[t_{23}(-i), t_{31}(i)] = t_{21}(1),$$
$$\gamma t_{21}(1)\gamma = t_{23}(-1),$$
$$t_{21}(-1)\alpha = diag(1,-1,-1),$$

$$\gamma\big(diag(1,-1,-1)\big)\gamma = diag(-1,-1,1),$$
$$diag(-1,-1,1)\,\beta = t_{32}(i),$$
$$\gamma t_{32}(i)\gamma = t_{12}(-i),$$
$$[t_{12}(i), t_{23}(i)] = t_{13}(-1),$$
$$[t_{13}(i), t_{32}(i)] = t_{12}(-1),$$
$$[t_{21}(1), t_{13}(1)] = t_{23}(1).$$

Итак, мы получили все трансвекции $t_{ij}(1), t_{ij}(i)$, где $i,j = 1,2,3, i \neq j$. Поэтому $M = SL_3(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ в силу леммы 2б). Что и требовалось показать.

Группа $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. Следовательно, и группа $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ обладает такими порождающими. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, вычисления показывают, что

$$\alpha^\gamma = t_{31}(1)diag(1,-1,-1,1),$$
$$\alpha\alpha^\gamma = t_{31}(-1)t_{21}(1),$$
$$(\alpha\alpha^\gamma)^\beta = t_{42}(-1)t_{12}(1),$$
$$\alpha^\gamma(\alpha\alpha^\gamma)^\beta\alpha^\gamma = t_{42}(1)t_{12}(-1)t_{32}(-1),$$
$$(\alpha^\gamma(\alpha\alpha^\gamma)^\beta)^2 = t_{32}(-1).$$

Далее сопрягая полученную трансвекцию $t_{32}(-1)$ мономиальными матрицами β и γ и коммутируя результаты сопряжения, получим все трансвекции $t_{ij}(1)$, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. Действительно,

$$t_{32}(-1)^\gamma = t_{23}(-1),$$
$$t_{32}(-1)^\beta = t_{41}(-1),$$
$$t_{23}(1)^\beta = t_{14}(1),$$
$$t_{32}(1)(\alpha\alpha^\gamma)^{-1}t_{32}(-1) = t_{21}(-1),$$
$$(\alpha\alpha^\gamma)t_{21}(-1) = t_{31}(-1),$$
$$[t_{31}(1), t_{14}(1)] = t_{34}(1),$$
$$(t_{21}(1))^\beta = t_{12}(1),$$

$$[t_{41}(1), t_{12}(1)] = t_{42}(1),$$
$$[t_{21}(1), t_{14}(1)] = t_{24}(1),$$
$$(t_{34}(1))^{\beta} = t_{43}(1),$$
$$[t_{14}(1), t_{43}(1)] = t_{13}(1).$$

В силу леммы 2а) группа $SL_4(\mathbb{Z})$ лежит в подгруппе $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Так как матрица γ есть произведение трансвекции $t_{41}(i)$ на мономиальную матрицу из $SL_4(\mathbb{Z})$, то $t_{41}(i) \in M$. Сопрягая $t_{41}(i)$ мономиальными матрицами из $SL_4(\mathbb{Z})$, получим, что все трансвекции $t_{ij}(i)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$, лежат в M. В силу леммы 2б) $M = SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Что и требовалось показать.

Случай $\mathbf{SL_5}$. Группа $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что группа $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ совпадает с $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Пусть $\beta\gamma = \mu$. Будем записывать матрицы из M в виде произведения трансвекций и диагональных инволюций. Так,

$$\alpha = t_{21}(i) diag(1, -1, -1, 1, 1),$$
$$\alpha^{\mu} = t_{32}(i) diag(1, 1, -1, -1, 1),$$
$$(\alpha\alpha^{\mu})^2 = t_{31}(1),$$
$$((\alpha\alpha^{\mu})^2)^{\mu^2} = t_{53}(1),$$
$$[t_{53}(1), t_{31}(1)] = t_{51}(1).$$

По лемме 3а) трансвекция $t_{51}(1)$ и мономиальная матрица μ порождают группу $SL_5(\mathbb{Z})$, в частности, в M лежит диагональная матрица $diag(1, -1, -1, 1, 1)$. Следовательно, в M лежит и трансвекция

$$t_{21}(i) = \alpha diag(1, -1, -1, 1, 1).$$

Таким образом, трансвекции $t_{51}(1), t_{21}(i)$ и мономиальная матрица μ лежат в M. По лемме 3б) $M = SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Случай $\mathbf{PSL_6}$. Группа $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = diag(1,-1,-1,1,1,1)t_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \alpha^{t_{32}(i)\mu'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mu' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу построения матрицы α, β, γ лежат в группе $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, а их квадраты являются скалярными матрицами. Поэтому образы матриц α, β, γ в группе $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ являются инволюциями.

Покажем, что группа $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ совпадает с $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Пусть

$$\theta = \gamma\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= diag(1,-1,1,1,-1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} t_{45}(-i)t_{16}(-i).$$

Тогда последовательно получаем следующие равенства

$$\beta^{\theta} = diag(1,1,1,-1,-1,1)t_{42}(i)t_{43}(-1),$$

$$\beta^{\theta^4} = diag(1,1,1,-1,-1,1)t_{42}(i)t_{52}(1),$$

$$\beta^{\theta}\beta^{\theta^4} = t_{43}(1)t_{52}(1),$$

$$(\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta} = t_{14}(1)t_{64}(-i)t_{65}(-1),$$

$$[\beta,(\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta}] = t_{24}(1),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^2} = t_{63}(i),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^3} = t_{25}(i)t_{35}(-1),$$

$$[t_{25}(i)t_{35}(-1), t_{63}(i)] = t_{65}(i),$$

$$t_{65}(i)^{\alpha} = t_{12}(i),$$

$$[t_{12}(i), t_{24}(1)] = t_{14}(i),$$

$$(t_{14}(i)\beta^{\theta^4})^2 = t_{12}(1),$$

$$[t_{12}(1), t_{24}(1)] = t_{14}(1),$$

$$t_{12}(1)^{\alpha} = t_{65}(1),$$

$$(\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta}t_{14}(-1)t_{65}(1) = t_{64}(-i),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^4} = t_{41}(i)t_{51}(1),$$

$$[t_{24}(1), t_{41}(i)t_{51}(1)] = t_{21}(i),$$

$$[t_{41}(i)t_{51}(1), t_{12}(1)] = t_{42}(i)t_{52}(1),$$

$$\beta^{\theta^4}t_{42}(-i)t_{52}(-1) = diag(1,1,1,-1,-1,1),$$

$$diag(1,1,1,-1,-1,1)^{\alpha}\beta = t_{21}(-1),$$

$$[\beta^{\theta}\beta^{\theta^4}, t_{21}(1)] = t_{51}(1).$$

$$[t_{51}(1), t_{12}(1)] = t_{52}(1),$$

$$t_{42}(i)t_{52}(1)t_{52}(-1) = t_{42}(i),$$

$$t_{42}(i)^{\alpha} = t_{35}(-i),$$

$$t_{64}(i)^{\alpha} = t_{13}(i),$$

$$[t_{13}(i), t_{35}(-i)] = t_{15}(1),$$

$$[t_{65}(1), t_{51}(1)] = t_{61}(1),$$

$$t_{61}(1)^{\alpha} = t_{16}(-1),$$

$$[[t_{64}(-i), t_{42}(i)], t_{24}(1)]^{\alpha} = t_{13}(1).$$

Таким образом, все трансвекции вида $t_{1j}(1)$ лежат в подгруппе M. Далее,

$$t_{15}(1)^{\theta} = t_{31}(1),$$

$$t_{31}(1)^{\alpha} = t_{46}(1),$$

$$[t_{21}(1), t_{1j}(1)] = t_{2j}(1), \quad j > 2,$$

$$[[t_{64}(-i), t_{42}(i)], t_{2j}(1)] = t_{6j}(1), \quad j \neq 2, 6,$$

$$[t_{51}(1), t_{1j}(1)] = t_{5j}(1), \quad j \neq 1, 5,$$

$$[t_{31}(1), t_{1j}(1)] = t_{3j}(1), \quad j \neq 1, 3,$$

$$[t_{46}(1), t_{6j}(1)] = t_{4j}(1), \quad j \neq 4, 6.$$

Таким образом, в группе M лежат хотя бы одна трансвекция вида $t_{rs}(i)$ и множество трансвекций

$$T = \{t_{16}(1),\ t_{i+1i}(1),\ i = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Поэтому $M = PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ в силу леммы 3в).

Теорема 1 доказана.

4. Заключение

Объединяя теорему 1 настоящей работы вместе с указанными выше результатами статей [2; 6; 9; 10], заключаем, что для $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ остаются нерешенными только следующие задачи о порождении данных групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны, или просто тремя инволюциями.

Задача 1. Порождаются ли группы $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Задача 2. Порождается ли группа $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями?

Задача 3. Порождается ли группа $SL_{10}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны, или даже просто тремя инволюциями?

Авторы глубоко признателены рецензенту за указанные опечатки и полезные замечания, которые несомненно способствовали улучшению текста статьи.

Список источников

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М. : Наука, 1977.

2. Левчук Д. В. О порождаемости группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ. 2009. Т. 9, № 1. С. 35-38.
3. Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 192–206. https://doi.org/10.1007/2FBF02001358
4. Нужин Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 4. С. 422–440.
5. Нужин Я. Н. О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказский математический журнал. 2008. Т. 10, № 1. С. 68–74.
6. Нужин Я. Н. Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 3. С. 133–141. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-133-141
7. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М. : Мир, 1975.
8. Супруненко Д. А. Группы матриц. М. : Наука, 1972.
9. Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. 2008. Т. 1, № 2. С. 133–139.
10. Tamburini M. C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra. 1997. Vol. 195, N 2. P. 650–661.

References

1. Kostrikin A.I. *Introduction to algebra*. Moscow, Nauka Publ., 1977.
2. Levchuk D.V. On generation of the group $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute. *Bulletin of Novosibirsk State Univ.*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 35–38.
3. Nuzhin Ya.N. Generating triples of involutions of Chevalley groups over a finite field of characteristic 2. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, no. 2, pp. 192–206. https://doi.org/10.1007/2FBF02001358
4. Nuzhin Ya.N. Generating triples of involutions for Lie type groups over a finite field of odd characteristic. II. *Algebra and Logic*, 1997, vol. 36, no. 4, pp. 422–440.
5. Nuzhin Ya.N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute. *Vladikavkaz. Math. J.*, 2008. vol. 10, no. 1, pp. 68–74.
6. Nuzhin Ya.N. Tensor representations and generating sets of involutions of some matrix groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 133–141. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-3-133-141
7. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups*. Moscow, Mir Publ., 1975.
8. Suprunenko D.A. *Matrix groups*. Moscow, Nauka Publ., 1972.
9. Levchuk D.V., Nuzhin Ya.N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2008, vol. 1, no 2, pp. 133–139.
10. Tamburini M.C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute. *J. of Algebra*, 1997, vol. 195, no. 2, pp. 650–661.

Об авторах

Гвоздев Родион Игоревич, студент, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, gvozdev.rodion@bk.ru

Нужин Яков Нифантьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, nuzhin2008@rambler.ru

Шаипова Татьяна Борисовна, аспирант, Красноярский научный центр СО РАН, Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, 663431@mail.ru

About the authors

Rodion I. Gvozdev, Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, gvozdev.rodion@bk.ru

Yakov N. Nuzhin, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, nuzhin2008@rambler.ru

Tatyana B. Shaipova, Postgraduate, Krasnoyarsk Scientific Center SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation, 663431@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 27.12.2021
Поступила после рецензирования / Revised 24.03.2022
Принята к публикации / Accepted 07.04.2022