АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

ALGEBRAIC AND LOGICAL METHODS IN COMPUTER SCIENCE AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Серия «Математика»
2022. Т. 40. С. 34—48

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 512.542
MSC 20D10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.34

Булевы решетки n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга

О. В. Камозина

Брянский государственный инженерно-технологический университет, Брянск, Российская Федерация
✉ *ovkamozina@yandex.ru*

Аннотация. Пусть N — множество всех натуральных чисел. Все определения и результаты рассматривать с учетом разбиения области определения спутников и направлений. Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно веерным классом Фиттинга; при n, равном или большим 1, класс Фиттинга называется n-кратно веерным, если он имеет хотя бы один спутник f, все непустые значения которого являются (n-1)-кратно веерными классами Фиттинга. Основным результатом работы является описание n-кратно веерных классов Фиттинга, у которых решетка всех n-кратно веерных подклассов Фиттинга является булевой. Показано, что такие классы представимы в виде прямого разложения атомов решетки. В статье подробно изучены прямые разложения n-кратно веерных классов Фиттинга. Направление этих классов является главным, причем берется из отрезка между направлениями полного и локального классов Фиттинга. Частные результаты для n-кратно полных и n-кратно локальных классов Фиттинга получены в виде следствий из соответствующих теорем. При доказательстве утверждений использовались методы встречных включений и математической индукции. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем изучении булевых решеток n-кратно веерных классов Фиттинга с направлениями из других промежутков, а также стоуновых решеток n-кратно веерных классов Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, кратно веерный, прямое разложение, булева решетка

Ссылка для цитирования: Камозина О. В. Булевы решетки n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 40. С. 34–48.
https://doi.org/10.26516/1997-7670. 2022.40.34

Research article

Boolean Lattices of n-multiply $\omega\sigma$-fibered Fitting Classes

Olesia V. Kamozina

Bryansk State University of Engineering and Technology, Bryansk, Russian Federation
✉ *ovkamozina@yandex.ru*

Abstract. Let N be the set of all natural numbers. Consider all definitions and results taking into account the partitioning of the area for determining satellites and directions. An arbitrary Fitting class is considered a 0-multiply fibered Fitting class; for n equal to or greater than 1, a Fitting class is said to be n-multiply fibered if it has at least one satellite f, all non-empty values which are (n-1)-multiply fibered Fitting classes. The main result of this work is a description of n-multiply fibered Fitting classes, for which the lattice of all n-multiply fibered Fitting subclasses is Boolean. It is shown that such classes are representable in the form of a direct decomposition of lattice atoms. In this article, direct decompositions of n-multiply fibered Fitting classes are studied in detail. The direction of these classes is the main one, and is taken from the segment between the directions of the complete and local Fitting classes. Particular results for n-multiply complete and n-multiply local Fitting classes are obtained as corollaries of the corresponding theorems. When proving the statements, the methods of counter inclusions and mathematical induction were used. The results obtained can be used in the further study of Boolean lattices of n–multiply fibered Fitting classes with directions from other intervals, as well as Stone lattices of n-multiply fibered Fitting classes.

Keywords: finite group, Fitting class, multiply fibered, direct decomposition, Boolean lattice

For citation: Kamozina O. V. Boolean Lattices of n-multiply $\omega\sigma$-fibered Fitting Classes. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 40, pp. 34–48. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.34

1. Введение

Исследование таких классов групп, как формации и классы Фиттинга, часто сводится к изучению решеток их подклассов. Рассмотрение свойств решетки помогает описать исследуемый класс групп. Например, использование свойства дополняемости в булевой решетке позволило изучить строение простейших подклассов (атомов решетки) и получить представление класса групп с помощью этих подклассов. Основной вклад в изучение булевых решеток классов групп внес А. Н. Скиба ([11], раздел 4.3). Им была введена конструкция прямого разложения класса групп, помогающая в данных исследованиях.

Ортогональной системой классов [5] называется такая совокупность $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_j$, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{F}_k = (1)$ для любых $j \neq k$, $j, k \in J$. Через $\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ обозначается совокупность всех групп вида $A_1 \times ... \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, ..., $A_t \in \mathfrak{F}_{j_t}$, $j_1, \ldots, j_t \in J$.

Булевы решетки различных видов формаций были изучены А. Н. Скибой, Л. А. Шеметковым, Ю. А. Скачковой, Е. Н. Деминой (см. [7; 10; 12; 13]). В теории классов Фиттинга этот вопрос исследован Н. Н. Воробьевым, А. Н. Скибой ([5]).

σ-разбиение области определения спутников локальных формаций введено А. Н. Скибой ([16]). Chi Z., В. Г. Сафоновым, А. Н. Скибой были определены n-кратно σ-локальные формации и установлены свойства алгебраичности и модулярности решетки таких формаций ([14]). В работе [15] впервые определен σ-локальный класс Фиттинга и описаны его локальные задания. На основе идеи σ-разбиения автором введены и изучены $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга ([9]). В работе [8] исследованы спутники и произведения этих классов. Цель данной работы — дать определение n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ и изучить их булевы решетки.

Рассматриваются только конечные группы.

$\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$, $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G; $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех конечных групп, $\mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω- и ω'-групп соответственно, ω-группа — группа G, где $\pi(G) \subseteq \omega$; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\sigma_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$ ([16]), $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(G) = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\omega\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$.

Функция $f : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называется $\omega\sigma R$-функцией; функция $\varphi : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ называется $\omega\sigma FR$-функцией. $\omega\sigma FR$–функции φ_0 и φ_1 определяются следующим образом: $\varphi_0(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_0(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$; $\varphi_1(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_1(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$, где f — $\omega\sigma R$-функция, φ — $\omega\sigma FR$-функция, называется $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ. $\omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ называется внутренним, если $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ называется $\omega\sigma$-полным классом

Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \omega\sigma AR(f)$, если $\varphi = \varphi_0$; $\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \omega\sigma LR(f)$, если $\varphi = \varphi_1$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\omega\sigma R$-функции ($\omega\sigma FR$-функции). Полагаем, что $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\omega') \subseteq \mu_2(\omega')$ и $\mu_1(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mu_2(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. ([9])

$\omega\sigma$-направление φ $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга называется главным, если $\varphi(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. ([8])

2. Основная часть

Лемма 1. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга, причем $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$, где f_j — внутренний $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}_j$, $j \in J$, и φ — главное $\omega\sigma$–направление, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Если $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где*

$$\begin{gathered} f(\omega') = \mathfrak{F}, \\ f(\omega \cap \sigma_i) = f_j(\omega \cap \sigma_i), \text{ если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j), \\ f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \big(\cup_{j\in J}\omega\sigma(\mathfrak{F}_j)\big). \end{gathered}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении леммы.

1. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$.

Так как $G \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $O^{\omega}(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $O^{\omega}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$ и $G/M \cong G/O^{\omega}(G)/M/O^{\omega}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega}$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M) \subseteq \omega\sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$, т. е. $f(\omega \cap \sigma_i) \neq \varnothing$. Тогда существует такое $j \in J$, что $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j)$, $f(\omega\cap\sigma_i) = f_j(\omega\cap\sigma_i)$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f_j(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$.

Так как $\varphi \leq \varphi_1$, то $\varphi(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi_1(\omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. По лемме 1 пункт 1) [4] получаем $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq M$. По лемме 1 пункт 7) [4] имеем $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} = G^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} = \big(G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}\big)^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}}$. Если $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \neq G$, то $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \subseteq M$ и $G/M \cong G/G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}/M/G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. Противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} = G$. Значит, $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} = G^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}} = O^{\omega\cap\sigma_i}(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^{\omega\cap\sigma_i}(G)/M/O^{\omega\cap\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$.

В силу леммы 3 пункт 2) [9] можем считать, что $f_j(\omega') = \mathfrak{F}_j$. Учитывая рассуждения, проведенные выше, получаем, что

$$O^{\omega\cap\sigma_i}(G) = G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f_j(\omega \cap \sigma_i).$$

Так как $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega}$, то по лемме 1 пункт 1) [4] $O^{\omega}(G) \subseteq O^{\omega\cap\sigma_i}(G) \in f_j(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}_j = f_j(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_k \in \omega\sigma(G) \setminus \{\omega \cap \sigma_i\}$. Так как $O^{\omega\cap\sigma_i}(G) = G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$, то

$$G/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong G/O^{\omega\cap\sigma_i}(G)/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/O^{\omega\cap\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_k)'}$$

и $\omega\cap\sigma_k \in \omega\sigma(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})$. Так как φ является главным $\omega\sigma$-направлением, то $\varphi(\omega\cap\sigma_k)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_k)'} = \varphi(\omega\cap\sigma_k)$ и по лемме 1 пункт 9) [4] получаем $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} = (G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)}$. Из $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j,\varphi)$ следует, что $(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} \in f_j(\omega\cap\sigma_k)$. Поэтому получаем, что $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} \in f_j(\omega\cap\sigma_k)$ и по определению $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{H}}$. Из $G \in \mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ следует, что существует такое $j \in J$, что $G \in \mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j,\varphi)$. Тогда для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{F}_j)$ имеем $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f_j(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}$, $O^{\omega}(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Таким образом, $G \in \omega\sigma R(f,\varphi) = \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Из 1) и 2) получаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана. □

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Следуя [6; 14] произвольный класс Фиттинга будем считать 0-*кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ*. При $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно $\omega\sigma$-веерным с $\omega\sigma$-направлением φ*, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega\sigma$-спутник f, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерными классами Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Коротко, f будем называть *$(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутником.*

Лемма 2. *Каждый n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ является $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по кратности n.

Пусть $n = 1$ и $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по определению 1 [9] $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и по определению кратности $\mathfrak{F}$ — 0-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Следовательно, утверждение леммы выполнено.

Пусть $n > 1$ и утверждение леммы выполняется для всех натуральных чисел, меньших n.

Если $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, то по определению кратности $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega\sigma$-спутник f, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерными классами Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. По предположению индукции все непустые значения f являются $(n-2)$-кратно $\omega\sigma$-веерными классами

Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по определению кратности $\mathfrak{F}$ — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}_j$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутником f_j, $j \in J$, и $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутником $f = \cap_{j\in J} f_j$ и $\omega\sigma$-направлением φ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по кратности n.

Пусть $n = 1$. Тогда утверждение леммы выполнено ввиду леммы 1 [8].

Пусть $n > 1$ и утверждение леммы выполняется для всех натуральных чисел, меньших n.

Если $\mathfrak{F}_j$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутником f_j, и $\omega\sigma$-направлением φ, то $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$, $j \in J$. По лемме 1 [8] $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f, \varphi)$ и $f = \cap_{j\in J} f_j$. По предположению индукции все непустые значения значения $\omega\sigma$-спутника f являются $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерными классами Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по определению кратности $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутником $f = \cap_{j\in J} f_j$ и $\omega\sigma$-направлением φ.

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга и $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Если $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с главным $\omega\sigma$-направлением φ, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, $j \in J$, то $\mathfrak{F}$ также является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с тем же $\omega\sigma$-направлением φ.*

Доказательство. Проведем индукцию по кратности n.

Случай $n = 0$ доказан в теореме 3.2.14 [3].

Пусть $n = 1$. Тогда $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$. По лемме 3 пункт 1) [9] $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(g_j, \varphi)$, где $g_j(\omega') = f_j(\omega') \cap \mathfrak{F}_j$ и $g_j(\omega \cap \sigma_i) = f_j(\omega \cap \sigma_i) \cap \mathfrak{F}_j$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, т.е. $\mathfrak{F}_j$ обладает внутренним $\omega\sigma$-спутником g_j, $j \in J$. Тогда по лемме 1 получаем, что $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ — $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Пусть $n > 1$ и утверждение теоремы выполняется для всех натуральных чисел, меньших n.

Если $\mathfrak{F}_j$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, то $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$, где f_j — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}_j$. По лемме 3 пункт 1) [9] $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(g_j, \varphi)$, где g_j — внутренний $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}_j$, $j \in J$. Используя лемму 1, получаем, что $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(g, \varphi)$, где

$$g(\omega') = \mathfrak{F},$$
$$g(\omega \cap \sigma_i) = g_j(\omega \cap \sigma_i), \text{ если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j),$$

$$g(\omega\cap\sigma_i)=\varnothing,\text{ если }\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma\setminus\big(\cup_{j\in J}\omega\sigma(\mathfrak{F}_j)\big).$$

По лемме 2 $\mathfrak{F}_j$ — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по предположению индукции $\mathfrak{F}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ также является $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Кроме того, так как f_j — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}_j$, то по лемме 3 g_j — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}_j$, $j\in J$. Таким образом, получаем, что все непустые значения $\omega\sigma$-спутника g — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Следовательно, по определению кратности $\mathfrak{F}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Теорема доказана. □

Лемма 4. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j\mid j\in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга, $\omega\sigma(\mathfrak{F}_j)\cap\omega\sigma(\mathfrak{F}_l)=\varnothing$ для любых $j\neq l$, $j,l\in J$, и $\mathfrak{F}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Если $\mathfrak{F}=\omega\sigma R(f,\varphi)$, где f — внутренний $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}$, φ — главное $\omega\sigma$–направление, $\varphi_0\leq\varphi\leq\varphi_1$, то $\mathfrak{F}_j=\omega\sigma R(f_j,\varphi)$, где*

$$\begin{gathered}f_j(\omega')=\mathfrak{F}_j,\\ f_j(\omega\cap\sigma_i)=f(\omega\cap\sigma_i),\ \textit{если }\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma(\mathfrak{F}_j),\\ f_j(\omega\cap\sigma_i)=\varnothing,\ \textit{если }\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma\setminus\omega\sigma(\mathfrak{F}_j).\end{gathered}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}_j=\omega\sigma R(f_j,\varphi)$, где f_j — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении леммы, $j\in J$.

1) Покажем, что $\mathfrak{H}_j\subseteq\mathfrak{F}_j$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H}_j\setminus\mathfrak{F}_j$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M=G_{\mathfrak{F}_j}$.

Так как $G\in\mathfrak{H}_j=\omega\sigma R(f_j,\varphi)$, то $O^\omega(G)\in f_j(\omega')=\mathfrak{F}_j$. Следовательно, $O^\omega(G)\subseteq G_{\mathfrak{F}_j}=M$ и $G/M\cong G/O^\omega(G)/M/O^\omega(G)\in\mathfrak{G}_\omega$.

Пусть $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma(G/M)\subseteq\omega\sigma(G)$. Так как $G\in\mathfrak{H}_j=\omega\sigma R(f_j,\varphi)$, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}\in f_j(\omega\cap\sigma_i)$, т. е. $f_j(\omega\cap\sigma_i)\neq\varnothing$. Тогда $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma(\mathfrak{F}_j)$, $f_j(\omega\cap\sigma_i)=f(\omega\cap\sigma_i)$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}\in f(\omega\cap\sigma_i)$.

Так как $\varphi\leq\varphi_1$, то $\varphi(\omega\cap\sigma_i)\subseteq\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. По лемме 1 пункт 1) [4] получаем $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)}\subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$. По лемме 1 пункт 7) [4] имеем $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)}=G^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}=\big(G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}\big)^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}}$. Если $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}\neq G$, то $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}\subseteq M$ и $G/M\cong G/G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}/M/G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}\in\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. Противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}=G$. Значит, $G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)}=G^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}}=O^{\omega\cap\sigma_i}(G)$.

В силу леммы 3 пункт 2) [9] можем считать, что $f(\omega')=\mathfrak{F}$. Учитывая рассуждения, проведенные выше, получаем, что

$$O^{\omega\cap\sigma_i}(G)=G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)}\subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}\in f(\omega\cap\sigma_i)\subseteq\mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\subseteq\mathfrak{G}_\omega$, то по лемме 1 пункт 1) [4] $O^\omega(G)\subseteq O^{\omega\cap\sigma_i}(G)\in f(\omega\cap\sigma_i)\subseteq\mathfrak{F}=f(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_k \in \omega\sigma(G) \setminus \{\omega \cap \sigma_i\}$. Так как $O^{\omega\cap\sigma_i}(G) = G^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$, то

$$G/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong G/O^{\omega\cap\sigma_i}(G)/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/O^{\omega\cap\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_k)'}$$

и $\omega\cap\sigma_k \in \omega\sigma(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})$. Так как φ является главным $\omega\sigma$-направлением, то $\varphi(\omega\cap\sigma_k)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_k)'} = \varphi(\omega\cap\sigma_k)$ и по лемме 1 пункт 9) [4] получаем $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} = (G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)}$. Из $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$ следует, что $(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} \in f(\omega\cap\sigma_k)$. Поэтому получаем, что $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} \in f(\omega\cap\sigma_k)$ и по определению $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, то, ввиду комонолитичности группы G существует такое $l \in J$, что $G \in \mathfrak{F}_l$. Тогда $\omega\sigma(G) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{F}_l)$. Пусть $j \neq l$. Тогда $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j)\cap\omega\sigma(\mathfrak{F}_l) = \varnothing$. Противоречие. Значит, $j = l$ и $G \in \mathfrak{F}_j$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$.

2) Покажем, что $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}_j$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_j \setminus \mathfrak{H}_j$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{H}_j}$. Из $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$ следует, что для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{F}_j)$ имеет место $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) = f_j(\omega\cap\sigma_i)$. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}_j$, $O^{\omega}(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}_j$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{F}_j = f_j(\omega')$. Таким образом, $G \in \omega\sigma R(f_j,\varphi) = \mathfrak{H}_j$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}_j$.

Из 1) и 2) получаем, что $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$.

Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга, $\omega\sigma(\mathfrak{F}_j)\cap\omega\sigma(\mathfrak{F}_l) = \varnothing$ для любых $j \neq l$, $j, l \in J$, и $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Если $\mathfrak{F}$ является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с главным $\omega\sigma$-направлением φ, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$, то $\mathfrak{F}_j$ также является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с тем же $\omega\sigma$-направлением φ, $j \in J$.*

Доказательство. Проведем индукцию по кратности n.

Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{F}$ — 0-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Так как по условию $\mathfrak{F}_j$ — непустой класс Фиттинга, то по определению кратности $\mathfrak{F}_j$ — 0-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, $j \in J$, и утверждение теоремы выполнено.

Пусть $n = 1$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. По лемме 3 пункт 1) [9] $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(g,\varphi)$, где $g(\omega') = f(\omega') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$, т.е. $\mathfrak{F}$ обладает внутренним $\omega\sigma$-спутником g. Тогда по лемме 4 получаем, что $\mathfrak{F}_j$ — $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Пусть $n > 1$ и утверждение теоремы выполняется для всех натуральных чисел, меньших n.

Если $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, то $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, где f — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}$. По лемме 3 пункт 1) [9] $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(g,\varphi)$, где g — внутренний $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}$. Используя лемму 4, получаем, что $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(g_j,\varphi)$, где

$$g_j(\omega') = \mathfrak{F}_j,$$
$$g_j(\omega \cap \sigma_i) = g(\omega \cap \sigma_i), \text{ если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j),$$
$$g_j(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{F}_j).$$

По лемме 2 $\mathfrak{F}$ — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по предположению индукции $\mathfrak{F}_j$ также является $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, $j \in J$. Кроме того, так как f — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}$, то по лемме 3 g — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-спутник $\mathfrak{F}$. Таким образом, получаем, что все непустые значения $\omega\sigma$-спутника g_j — $(n-1)$-кратно $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Следовательно, по определению кратности $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, $j \in J$.

Теорема доказана. □

Так как $\omega\sigma$-направление φ_0 $\omega\sigma$-полного класса Фиттинга является главным, то из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга, $\omega\sigma(\mathfrak{F}_j) \cap \omega\sigma(\mathfrak{F}_l) = \varnothing$ для любых $j \neq l$, $j, l \in J$, и $\mathfrak{F} = \otimes_{j \in J}\mathfrak{F}_j$. Тогда $\mathfrak{F}$ является n-кратно $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга, $j \in J$.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ — n-кратно $\omega\sigma$-локальный класс Фиттинга. Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3 пункт 1 [9] $\mathfrak{F}$ обладает внутренним $\omega\sigma$-спутником f. Тогда по лемме 2 пункт 1 [8] $f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $f(\omega \cap \sigma_i) \neq \varnothing$, а значит, $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

Лемма доказана. □

Следствие 2. *Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — ортогональная система классов Фиттинга и $\mathfrak{F} = \otimes_{j \in J}\mathfrak{F}_j$. Тогда $\mathfrak{F}$ является n-кратно $\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно $\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга, $j \in J$.*

Доказательство. Покажем, что $\omega\sigma(\mathfrak{F}_j) \cap \omega\sigma(\mathfrak{F}_l) = \varnothing$ для любых $j \neq l$, $j, l \in J$. Допустим противное, и пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j) \cap \omega\sigma(\mathfrak{F}_l)$ для некоторых $j \neq l$, $j, l \in J$.

Так как $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_j)$, то по лемме 5 $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}_j$. Аналогично, так как $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_l)$, то $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}_l$. Получаем, что $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{F}_l = (1)$. Противоречие. Таким образом, $\omega\sigma(\mathfrak{F}_j) \cap \omega\sigma(\mathfrak{F}_l) = \varnothing$ для любых $j \neq l$, $j, l \in J$.

Тогда, поскольку $\omega\sigma$-направление φ_1 $\omega\sigma$-локального класса Фиттинга является главным, утверждение следствия вытекает из теорем 1 и 2. □

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Через $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ обозначим решетку всех его n-кратно $\omega\sigma$-веерных подклассов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Пересечение всех n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, содержащих непустой класс групп $\mathfrak{X}$, обозначим $\omega\sigma R^n(\mathfrak{X},\varphi)$ и назовем n-кратно $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, *порожденным* $\mathfrak{X}$.

Далее рассмотрим необходимые понятия общей теории решеток [1] относительно решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$.

n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$ с $\omega\sigma$-направлением φ класса $\mathfrak{F}$ называется *дополняемым* в решетке $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, если существует такой n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга $\mathfrak{K}$ с $\omega\sigma$-направлением φ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=(1)$, $\mathfrak{F}=\omega\sigma R^n(\mathfrak{H}\cup\mathfrak{K},\varphi)$. Решетка $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ называется *дистрибутивной*, если для любых классов $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}\in\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ выполняется тождество

$$\mathfrak{T}\cap\omega\sigma R^n(\mathfrak{H}\cup\mathfrak{K},\varphi)=\omega\sigma R^n((\mathfrak{T}\cap\mathfrak{H})\cup(\mathfrak{T}\cap\mathfrak{K}),\varphi).$$

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

Элемент $\mathfrak{K}$ называется *атомом* решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, если $\mathfrak{K}$ покрывает (1), т. е. не существует такого $\mathfrak{M}\in\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, что $(1)\subset\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j\mid j\in J\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{T}\neq\varnothing$ — произвольный неединичный n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ в $\mathfrak{F}$, то во множестве J найдется такое подмножество J_1, что $\mathfrak{T}=\otimes_{j\in J_1}\mathfrak{F}_j$.*

Доказательство. По следствию 3.2.8 [3] $\mathfrak{T}=\otimes_{j\in J}(\mathfrak{T}\cap\mathfrak{F}_j)$. Так как $\mathfrak{F}_j$ — атом решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{T}\cap\mathfrak{F}_j\in\{(1),\mathfrak{F}_j\}$. Пусть J_1 — такое подмножество в J, что $j\in J_1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T}\cap\mathfrak{F}_j=\mathfrak{F}_j$. Тогда $\mathfrak{T}=\otimes_{j\in J_1}\mathfrak{F}_j$.

Лемма доказана. □

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с главным $\omega\sigma$-направлением φ, $\varphi_0\leq\varphi\leq\varphi_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j\mid j\in J\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что **из 1) следует 2)**. Пусть $\{\mathfrak{F}_j\mid j\in J\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H}=\otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Так как $\mathfrak{F}_j\subseteq\mathfrak{F}$

и $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то получаем, что $\mathfrak{H} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$. По теореме 1 $\mathfrak{H}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, т.е. $\mathfrak{H} \in \omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ и G — комонолитическая с комонолитом $M = G_\mathfrak{H}$. Так как булева решетка является решеткой с дополнениями, то в $\mathfrak{F}$ найдется такой n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга $\mathfrak{K}$ с $\omega\sigma$-направлением φ, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$. Учитывая теорему 1, получаем, что $\mathfrak{F} = \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi) = \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$. Так как G — комонолитическая группа, то $G \in \mathfrak{H}$ или $G \in \mathfrak{K}$. В первом случае имеем противоречие. Если $G \in \mathfrak{K}$, то $M \in \mathfrak{K}$, а следовательно, $M \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = (1)$. Значит, G — простая группа.

Покажем, что $\omega\sigma R^n(G, \varphi)$ является атомом решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$. Допустим противное, и пусть $\mathfrak{M}$ — неединичный n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ и $(1) \subset \mathfrak{M} \subset \omega\sigma R^n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как булева решетка является решеткой с дополнениями, то в $\mathfrak{F}$ найдется такой n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга $\mathfrak{L}$ с $\omega\sigma$-направлением φ, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R^n(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{L}, \varphi) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{L}$. Так как $G \notin \mathfrak{M}$, $G \in \mathfrak{F}$ и G — простая группа, то $G \in \mathfrak{L}$. Тогда $(1) \subset \mathfrak{M} \subset \omega\sigma R^n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L} \neq (1)$. Противоречие. Следовательно, $\omega\sigma R^n(G, \varphi)$ — атом решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$.

Таким образом $\omega\sigma R^n(G, \varphi) = \mathfrak{F}_j$ для некоторого $j \in J$ и $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Покажем, что **из 2) следует 1)**. Для начала докажем, что $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями. Пусть $\mathfrak{T}$ — произвольный неединичный n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ из $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 6 существует набор $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J_1\}$ атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{T} = \otimes_{j\in J_1}\mathfrak{F}_j$. Пусть $J_2 = J \setminus J_1$ и $\mathfrak{H} = \otimes_{j\in J_2}\mathfrak{F}_j$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{T}$ в решетке $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$. По теореме 1 $\mathfrak{H}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ. Кроме того, из замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$. По лемме 3 $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$ с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда по лемме 6 существует набор $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J_3\}$ атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H} = \otimes_{j\in J_3}\mathfrak{F}_j$. Для любого $j \in J_3$ имеем $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{T}$, а следовательно, $j \in J_1$. Аналогично, для любого $j \in J_3$ имеем $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}$, а следовательно, $j \in J_2$. Но $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ и $J_1 \cup J_2 = J$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H} = (1)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi)$. Действительно, из $\mathfrak{T} \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi)$ и $\mathfrak{H} \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}, \varphi)$ в силу замнутости класса Фиттинга $\omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi)$ относительно произведений нормальных $\omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi)$-подгрупп, получаем, что

$$\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j = (\otimes_{j\in J_1}\mathfrak{F}_j) \otimes (\otimes_{j\in J_2}\mathfrak{F}_j) = \mathfrak{T} \otimes \mathfrak{H} \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi).$$

Обратно, так как $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, а значит, $\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, то $\omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{H}, \varphi)$. Таким образом, $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.

Докажем дистрибутивность решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ — произвольные n-кратно $\omega\sigma$-веерные подклассы Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ из $\mathfrak{F}$. Применяя лемму 3, непосредственно получаем включение

$$\omega\sigma R^n((\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) \cup (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{K}), \varphi) = \omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}), \varphi) \subseteq \mathfrak{T} \cap \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi).$$

Действительно, $\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{H} \cup \mathfrak{K} \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{T} \cap \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$. По лемме 3 $\mathfrak{T} \cap \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$. — n-кратно $\omega\sigma$-веерный подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$ с $\omega\sigma$-направлением φ. Тогда $\omega\sigma R^n(\mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}), \varphi) \subseteq \mathfrak{T} \cap \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$.

Предположим, что обратное включение неверно и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{T} \cap \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi) \setminus \omega\sigma R^n((\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) \cup (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{K}), \varphi)$. Тогда G — комонолитическая группа. Поскольку $G \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F} = \otimes_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, то существует такое $j \in J$, что $G \in \mathfrak{F}_j$ и $\omega\sigma R^n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}_j$. Так как $\mathfrak{F}_j$ — атом решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R^n(G, \varphi)$. Из $G \in \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$ получаем, что $\mathfrak{F}_j \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi)$. По лемме 6 существуют такие наборы $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J_1\}$, $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J_2\}$ атомов решетки $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{H} = \otimes_{j \in J_1} \mathfrak{F}_j$, $\mathfrak{K} = \otimes_{j \in J_2} \mathfrak{F}_j$. Учитывая теорему 1, получаем, что $\mathfrak{F}_j \subseteq \omega\sigma R^n(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}, \varphi) \subseteq \otimes_{j \in J_1 \cup J_2} \mathfrak{F}_j$. Значит, $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}$ или $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{K}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}$ или $G \in \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{K}$, т. е. $G \in \mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{T} \cap (\mathfrak{H} \cup \mathfrak{K}) = (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) \cup (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{K}) \subseteq \omega\sigma R^n((\mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}) \cup (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{K}), \varphi).$$

Противоречие. Таким образом, $\omega\sigma R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка, а значит, учитывая доказанное выше, булева.

Теорема доказана. □

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно $\omega\sigma$-полный класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega\sigma A^n(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\sigma A^n(\mathfrak{F})$.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно $\omega\sigma$-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega\sigma L^n(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\sigma L^n(\mathfrak{F})$.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно ω-веерный класс Фиттинга с главным ω-направлением φ, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega R^n_\varphi(\mathfrak{F})$ *булева;*

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, *где* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *— набор всех атомов решетки* $\omega R^n_\varphi(\mathfrak{F})$.

Следствие 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— нееденичный* n*-кратно* ω*-полный класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega A^n(\mathfrak{F})$ *булева;*

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, *где* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *— набор всех атомов решетки* $\omega A^n(\mathfrak{F})$.

Следствие 7. *[4] Пусть* $\mathfrak{F}$ *— нееденичный* n*-кратно* ω*-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $\omega L^n(\mathfrak{F})$ *булева;*

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, *где* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *— набор всех атомов решетки* $\omega L^n(\mathfrak{F})$.

Следствие 8. *[5] Пусть* $\mathfrak{F}$ *— нееденичный* n*-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка $L^n(\mathfrak{F})$ *булева;*

2) $\mathfrak{F} = \otimes_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, *где* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *— набор всех атомов решетки* $L^n(\mathfrak{F})$.

Замечание 1. Следствия 3, 4 получаются из теоремы 3 при $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ соответственно. Следствие 5 получено из теоремы 3 в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$. Следствия 6, 7 вытекают тогда из следствия 5 при $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ соответственно. Из следствия 7 при $\omega = \mathbb{P}$ имеем следствие 8.

3. Заключение

В работе описаны n-кратно $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, у которых решетка всех n-кратно $\omega\sigma$-веерных подклассов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ является булевой. Эти классы удалось представить с помощью прямого разложения атомов решетки. Вызывает интерес решение следующих вопросов в дальнейших исследованиях:

1) изучение булевых решеток n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, $\varphi > \varphi_1$;

2) изучение стоуновых решеток n-кратно $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ.

Список источников

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 568 с.

2. Ведерников В. А. О новых типах ω-веерных классов Фиттинга конечных групп // Украинский математический журнал. 2002. Т. 54, № 7. С. 897–906. https://doi.org/10.1023/A:1022058224181
3. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2012. 322 с.
4. Воробьев Н. Н. О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18. 2002. № 5(14). С. 43–46.
5. Воробьев Н. Н., Скиба А. Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
6. Воробьев Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сибирский математический журнал. 1996. Т. 37, № 6. С. 1296–1302.
7. Демина Е. Н. Решетки n-кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций мультиоператорных T-групп // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 3–25. https://doi.org/10.4213/dm1168
8. Камозина О. В. Спутники и произведения $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 88–97. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-88-97
9. Камозина О. В. $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 107–116. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116
10. Скачкова Ю. А. Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 42–46. https://doi.org/10.4213/dm252
11. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск : Беларуская навука, 1997. 240 с.
12. Скиба А. Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Известия вузов. Математика. 1994. № 10. С. 75–80.
13. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Формации алгебр с дополняемыми подформациями // Украинский математический журнал. 1991. Т. 43, № 7-8. С. 1008–1012. http://dx.doi.org/10.1007/BF01058698
14. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, N 3. P. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875
15. Guo W., Zhang L., Vorob'ev N. T. On σ-local Fitting classes // J. Algebra. 2020. Vol. 542. P. 116–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009
16. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. N 1 (34). С. 79–82.

References

1. Birkhoff G. *Lattice theory.* Moscow, Science Publ., 1984, 568 p. (in Russian)
2. Vedernikov V.A. On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1086–1097. (in Russian) https://doi.org/10.1023/A:1022058224181
3. Vorob'ev N.N. *Algebra of classes of finite groups.* Vitebsk, VSU im. P.M. Masherova Publ., 2012, 322 p. (in Russian)
4. Vorob'ev N.N. On the Boolean lattices of n-multiply ω-local Fitting classes. *Proceedings of the Gomel State Univ. im. F. Skaryna. Questions of Algebra-18*, 2002, no. 5(14), pp. 43–46. (in Russian)
5. Vorob'ev N.N., Skiba A.N. On the Boolean lattices of n-multiply local Fitting classes. *Siberian Math. J.*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 446–452. (in Russian)

6. Vorob'ev N.T. On the Hawkes conjecture for radical classes. *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1137–1142. (in Russian)
7. Demina E.N. The lattices of n-multiply Ω_1-foliated τ-closed formations of multioperator T-groups. *Discrete Math. Appl.*, 2012, vol. 22, no. 2, pp. 147–172. (in Russian) https://doi.org/10.4213/dm1168
8. Kamozina O.V. Satellites and products of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 88–97. (in Russian) https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-88-97
9. Kamozina O.V. $\omega\sigma$-fibered Fitting classes. *Chebyshevskii sbornik*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 107–116. (in Russian) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-11
10. Skachkova Yu.A. Boolean lattices of multiply Ω-foliated formations. *Discrete Math. Appl.*, 2002, vol. 12, no. 5, pp. 477–482. (in Russian) https://doi.org/10.4213/dm252
11. Skiba A.N. *Algebra of formations.* Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997, 240 p. (in Russian)
12. Skiba A.N. On local formations with complemented local subformations. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1994, no. 10, pp. 75–80. (in Russian)
13. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Formations of algebras with complemented subformations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1991, vol. 43, no. 7-8, pp. 1008–1012. (in Russian) http://dx.doi.org/10.1007/BF01058698
14. Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N. On n-multiply σ-local formations of finite groups. *Comm. Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875
15. Guo W., Zhang L., Vorob'ev N.T. On σ-local Fitting classes. *J. Algebra*, 2020, vol. 542, pp. 116–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009
16. Skiba A.N. On one generalization of the local formations. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2018, no. 1 (34), pp. 79–82.

Об авторах

Камозина Олеся Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц., Брянский государственный инженерно-технологический университет, Российская Федерация, 241037, г. Брянск, ovkamozina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2803-6016

About the authors

Olesia V. Kamozina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Bryansk State University of Engineering and Technology, Bryansk, 241037, Russian Federation, ovkamozina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2803-6016

Поступила в редакцию / Received 11.12.2021
Поступила после рецензирования / Revised 07.04.2022
Принята к публикации / Accepted 14.04.2022