Серия «Математика»
2022. Т. 40. С. 3—14

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.55+517.96
MSC 39A45
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.3

Производящая функция решения разностного уравнения и многогранник Ньютона характеристического многочлена

Е. К. Лейнартас[1], **Т. И. Яковлева**[1✉]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ t.neckrasova@gmail.com

Аннотация. Производящие функции и разностные уравнения представляют собой мощный аппарат исследования задач перечислительного комбинаторного анализа. В одномерном случае пространство решений разностного уравнения конечномерно. При переходе к многомерной ситуации возникают проблемы, связанные как с возможностью различных вариантов задания дополнительных условий на решение разностного уравнения (задача Коши), так и с описанием соответствующего пространства производящих функций.

Для разностных уравнений в рациональных конусах целочисленной решетки известны достаточные условия на многогранник Ньютона характеристического многочлена, обеспечивающие сохранение иерархии Стенли для производящих функций его решений. А именно, производящая функция является рациональной (алгебраической, D-финитной), если таковыми являются производящие функции начальных данных и правой части уравнения.

В работе предлагается подход для отыскания производящей функции решения разностного уравнения, основанный на возможности расширения рационального конуса, в котором ищутся решения уравнения до конуса, в котором выполняются достаточные условия сохранения иерархии Стенли. Кроме того, приведена интегральная формула, связывающая производящие функции решения в исходном и расширенном конусах.

Ключевые слова: многомерные разностные уравнения, задача Коши, производящая функция, многогранник Ньютона характеристческого многочлена, рациональный конус

Благодарности: Первый автор поддержан Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876), второй автор использовал финансовую поддержку РФФИ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки (грант 20-41-243002).

Ссылка для цитирования: Лейнартас Е. К., Яковлева Т. И. Производящая функция решения разностного уравнения и многогранник Ньютона характеристического многочлена // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 40. С. 3–14.
https://doi.org/10.26516/1997-7670. 2022.40.3

Research article

Generating Function of the Solution of a Difference Equation and the Newton Polyhedron of the Characteristic Polynomial

Evgenij K. Leinartas[1], **Tat'jana I. Yakovleva**[1]✉

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ t.neckrasova@gmail.com

Abstract. Generating functions and difference equations are a powerful tool for studying problems of enumerative combinatorial analysis. In the one-dimensional case, the space of solutions of the difference equation is finite-dimensional. In the transition to a multidimensional situation, problems arise related both to the possibility of various options for specifying additional conditions on the solution of a difference equation (the Cauchy problem) and to describing the corresponding space of generating functions.
For difference equations in rational cones of an integer lattice, sufficient conditions are known on the Newton polyhedron of the characteristic polynomial that ensure the preservation of the Stanley hierarchy for the generating functions of its solutions. Namely, a generating function is rational (algebraic, D-finite) if such are the generating functions of the initial data and the right side of the equation.
In this paper, we propose an approach for finding the generating function of a solution to a difference equation based on the possibility of extending the rational cone in which solutions of the equation are sought to a cone in which sufficient conditions for the conservation of the Stanley hierarchy are satisfied. In addition, an integral formula is given that relates the generating functions of the solution in the original and extended cones.

Keywords: multidimensional difference equations, Cauchy problem, generating function, Newton polyhedron of the characteristic polynomial, rational cone

Acknowledgements: The first author was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876), the second author used the financial support of the RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-41-243002.

For citation: Leinartas E. K., Yakovleva T. I. Generating function of the solution of a difference equation and the Newton polyhedron of the characteristic polynomial. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 40, pp. 3–14. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.3

1. Введение

Важнейшей с точки зрения перечислительного комбинаторного анализа является задача описания пространства решений разностного уравнения и нахождения производящих функций этих решений. Один из способов описания пространства решений многомерного разностного уравнения состоит в том, чтобы задать дополнительные условия на решение (задача Коши), обеспечивающие его существование и единственность (см., например, [2; 9]). Существенную роль при этом играют геометрические характеристики многогранника Ньютона характеристического многочлена разностного уравнения. В [3; 4] были найдены достаточные условия на многогранник Ньютона, обеспечивающие не только разрешимость задачи Коши, но и позволяющие получить формулу для производящей функции решения и исследовать принадлежность производящей функции решения одному из классов иерархии Стенли: рациональные, алгебраические, D-финитные (D-конечные) функции. Наиболее полезными и широко используемыми являются рациональные функции (см., например, [6]).

В случае, когда условия, обеспечивающие сохранение иерархии Стенли, не выполняются, возникают проблемы, связанные с отсутствием явной формулы, в которой производящая функция решения задачи Коши выражается через производящую функцию начальных данных. В работе предлагается подход к их решению, основанный на возможности расширить множество, на котором ищутся решения разностного уравнения. При этом разностное уравнение и многогранник Ньютона не меняются, а условия на многогранник Ньютона, обеспечивающие разрешимость задачи Коши, выполняются, что и позволяет найти формулу для производящей функции решения.

Отметим, что с точки зрения теории кратных степенных рядов (производящих функций) предлагаемый подход является в некотором смысле обратным к задаче отыскание сечений кратного степенного ряда (см. [13]) или к задаче исследования аналитических свойств «диагональных» рядов (см. [1; 5; 10; 11]).

Во втором параграфе работы формулируется задача о «продолжении» решения задачи Коши в больший конус и приводится формула (теорема 1), связывающая производящую функцию решения задачи

Коши в исходном конусе с производящей функцией решения в расширенном конусе.

В §3 приведена интегральная формула (теорема 2) для производящей функции решения исходной задачи Коши.

2. Обозначения, определения, постановка задачи, основной результат

На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленных переменных определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j:

$$\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

и полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega,$$

где $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \cdot \dots \cdot \delta_n^{\omega_n}$, $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, c_ω — постоянные коэффициенты.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega f(x) = 0,\ x \in K \subset \mathbb{Z}^n,$$

В качестве K естественно выбрать конус, который вместе с точкой x содержит и все точки $x + \omega$.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \dots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$. *Рациональным конусом*, порожденным векторами $a^1, \dots, a^n$, называется множество

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}.$$

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v+K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\not\geqslant} v$, если $u - v \notin K$.

Для *фиксированного* $m \in K \cap \mathbb{Z}^n$ обозначим

$$K_m = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : x \underset{K}{\not\geqslant} m\}$$

и будем называть точки этого множества начальными (граничными).

Сформулируем следующую задачу.

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\delta)f(x) = g(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \tag{2.1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на множестве $K \cap \mathbb{Z}^n$ функция, и совпадающую на множестве K_m с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in K_m. \tag{2.2}$$

Эту задачу будем называть задачей Коши для уравнения (2.1), а условие (2.2) — начальными данными задачи Коши.

В одномерном случае $K = \mathbb{Z}_{\geqslant}$ и уравнение примет вид $\sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega f(x + \omega) = 0$, $c_m \neq 0$. Пространство решений в этом случае конечномерно и всякое решение $f(x)$ полностью определяется своими значениями в m точках $x = 0, 1, \ldots, m-1$.

Для $n > 1$ различные варианты постановки задачи Коши в рациональных конусах целочисленной решетки исследовались в работах [7; 8; 12; 14].

Характеристическим многочленом для разностного оператора (2.1) назовем многочлен Лорана $P(z) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} c_\omega z^\omega$.

Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества Ω.

Обозначим $F(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x}$, $\Phi_\omega(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n, x \underset{K}{\ngeq} \omega} \frac{\varphi(x)}{z^x}$, $G(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{g(x)}{z^x}$ производящие функции решения $f(x)$ задачи (2.1)–(2.2), начальных данных (2.2) и правой части $g(x)$ соответственно.

Рассмотрим задачу Коши в конусе $\tilde{K}$, не совпадающем с конусом K таком, что $N_P \subset \tilde{K}$. Требуется найти функцию $\tilde{f}(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\delta)\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x), x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n, \tag{2.3}$$

и совпадающую на множестве $\tilde{K}_m = \{x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n : x \underset{\tilde{K}}{\ngeq} m\}$ с заданной функцией $\tilde{\varphi}(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{\varphi}(x), x \in \tilde{K}_m. \tag{2.4}$$

Обозначим $\tilde{F}(z) = \sum\limits_{x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{f}(x)}{z^x}$, $\tilde{\Phi}_\omega(z) = \sum\limits_{x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n, x \underset{\tilde{K}}{\ngeq} \omega} \frac{\tilde{\varphi}(x)}{z^x}$ и $\tilde{G}(z) = \sum\limits_{x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{g}(x)}{z^x}$ производящие функции решения $\tilde{f}(x)$ задачи (2.3)–(2.4), начальных данных (2.4) и правой части $\tilde{g}(x)$ соответственно.

Естественным образом возникает вопрос о связи решений задач (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4) и их производящих функций. В общем случае это трудная задача, однако, при дополнительных условиях на многогранник Ньютона и конусы K и $\tilde{K}$ эту связь установить возможно. Важным частным случаем является ситуация $K \subset \tilde{K}$. Её можно интерпретировать так, что решения уравнения (2.1) «продолжаются» в больший конус. Если в этом конусе удается, не меняя разностного уравнения, найти хорошую (явную) формулу для производящей функции решения, то это представляет интерес, например, с точки зрения перечислительного комбинаторного анализа.

В качестве конуса $\tilde{K}$ рассмотрим конус, порожденный векторами $m-\omega, \omega \in \Omega$ и назовем его *конусом при вершине* m многогранника Ньютона.

Скелетом рационального конуса называется множество всех примитивных (не кратных) целочисленных векторов в гранях размерности 1.

Теорема 1. *Если $K \subset \tilde{K}$ и скелет конуса $\tilde{K}$ при вершине m содержит ровно n векторов, то задача* (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение $f(x)$ и существует решение $\tilde{f}(x)$ задачи* (2.3)–(2.4) *такое, что*

1) $\tilde{f}(x)|_K = f(x)$,

2) для производящей функции $\tilde{F}(z)$ решения задачи (2.3)–(2.4) *справедлива формула*

$$\tilde{F}(z) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega z^\omega \frac{1}{P(z)} \tilde{\Phi}_\omega(z) + \tilde{G}(z) \frac{1}{P(z)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как скелет конуса $\tilde{K}$ при вершине m содержит ровно n векторов, то $\tilde{K}$ — симплициальный конус (т. е. любой элемент выражается через образующие единственным образом $\tilde{K} = \langle b^1, \ldots, b^n \rangle$).

Докажем, что существует решение задачи (2.3)–(2.4).

Обозначим элементы множества $\Omega = \{\omega^1, \ldots, \omega^r\}$. Тогда по определению конус $\tilde{K} = \{y : y = \eta_1(m-\omega^1) + \ldots + \eta_r(m-\omega^r), \eta_1, \ldots, \eta_r \in \mathbb{Z}_\geqslant\}$. Из условия $K \subset \tilde{K}$ следует, что любой элемент $x \in K$ также лежит и в $\tilde{K}$. Условие $x \in \tilde{K}$ означает, что $x \underset{\tilde{K}}{\leqslant} 0$, тогда

$$\eta_1(m-\omega^1) + \ldots + \eta_r(m-\omega^r) \underset{\tilde{K}}{\leqslant} 0.$$

Отсюда следует, что $m - \omega^j \underset{\tilde{K}}{\leqslant} 0$ для любого $j = 1, \ldots, r$, поэтому выполняется условие

$$m \underset{\tilde{K}}{\leqslant} \omega, \text{ для любого } \omega \in \Omega. \tag{2.6}$$

Условие (2.6) обеспечивает существование и единственность решения задачи (2.3)–(2.4) (см. [3]).

Покажем, что из условия $K \subset \tilde{K}$ также следует, что задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение.

Двойственным к конусу $\tilde{K}$ называется конус

$$\tilde{K}^* = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, x\rangle \geqslant 0, x \in \tilde{K}\},$$

где $\langle k, x\rangle = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$. Обозначим множество его внутренних точек $\mathring{\tilde{K}}^*$.

Из условия $m \underset{\tilde{K}}{\leqslant} \omega$ для любого $\omega \in \Omega$ следует, что $\langle \nu, m\rangle = \max\limits_{\omega\in\Omega}\langle \nu, \omega\rangle$ для некоторого $\nu \in \mathring{\tilde{K}}^* \cap \mathbb{Z}^n$. Действительно, так как $m - \omega \in \tilde{K}$, то $\langle \nu, m - \omega\rangle > 0$ или $\langle \nu, m\rangle > \langle \nu, \omega\rangle$ для всех $\omega \in \Omega$, что и означает $\langle \nu, m\rangle = \max\limits_{\omega\in\Omega}\langle \nu, \omega\rangle$. Так как $K \subset \tilde{K}$, то $\tilde{K}^* \subset K^*$, т. е. ν принадлежит и конусу K^*.

Таким образом условие, что m — вершина многогранника Ньютона, означает, что задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение (см. [7]).

Докажем, что $\tilde{f}(x)|_K = f(x)$. Действительно, так как $K \subset \tilde{K}$ и скелет конуса $\tilde{K}$ при вершине m содержит ровно n векторов, то согласно теореме 1 работы [12] задачи (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4) согласованы, т. е. $\tilde{f}(x)|_K = f(x)$.

Так как выполняется условие (2.6), то для производящей функции $\tilde{F}(z)$ решения задачи (2.3)–(2.4) справедлива формула (2.5), где под $\frac{1}{P(z)}$ понимается ряд Лорана, определяемый следующим образом (см. также [3])

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum\limits_{\omega\neq m} c_\omega z^\omega} = \frac{1}{c_m z^m\Big(1 - \sum\limits_{\omega\neq m} \tilde{c}_\omega z^{\omega-m}\Big)} =$$

$$= \frac{1}{c_m z^m}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{\omega\neq m}\tilde{c}_\omega z^{\omega-m}\Big)^k = \sum_{x\in\tilde{K}\cap\mathbb{Z}^n}\frac{\tilde{p}_x}{z^x}.$$

□

3. Интегральное представление для производящей функции решения задачи Коши

Приведем интегральную формулу, связывающую производящие функции решений задач (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4).

Обозначим $\tau = a^1 + \dots + a^n$ и $\Pi_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} x \underset{K}{<} \tau\}$ n-мерный параллелотоп. В работе [7] (лемма 6) показано, что геометрическая прогрессия $\mathcal{E}(\xi) = \sum\limits_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} \xi^x$ сходится для ξ таких, что $|\xi^{a^j}| < 1$, $j = 1, \dots, n$

и ее сумма равна

$$\mathcal{E}(\xi) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \xi^x = \Big(\sum_{v \in \Pi_\tau \cap \mathbb{Z}^n} \xi^v \Big) \prod_{i=1}^n (1 - \xi^{a^i})^{-1}.$$

Пусть $E(\xi) = \mathcal{E}(\frac{1}{\xi})$, тогда областью сходимости функции $E(\xi)$ является $M_a = \{\xi : |\xi^{a^j}| > 1, j = 1, \ldots, n\}$. Если $K \subset \tilde{K}$, то $M_a \supset M_b = \{\xi : |\xi^{b^j}| > 1, j = 1, \ldots, n\}$, т. е. прогрессия $E(\xi)$ сходится и в области M_b. Обозначим $\tilde{E}(\xi) = \sum\limits_{y \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\gamma(y)}{\xi^y}$, где $\gamma(y) = \begin{cases} 0, & y \in K \\ 1, & y \in \tilde{K} \setminus K, \end{cases}$

Теорема 2. *Если производящие функции начальных данных* $\tilde{\Phi}_\omega(z)$ *и правой части* $\tilde{G}(z)$ *задачи Коши* (2.3)–(2.4) *сходятся в области* $\mathcal{D}_r = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi^{b^j}| > r_j, j = 1, \ldots, n\}$, *то для* $z \in \{z : |z^{b^j}| > r_j, j = 1, \ldots, n\}$ *справедлива интегральная формула, связывающая* $F(z)$ *и* $\tilde{F}(z)$

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \tilde{F}(\xi) \tilde{E}\Big(\frac{z}{\xi}\Big) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{3.1}$$

где $T = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi^{b^j}| = \rho_j, j = 1, \ldots, n\}$, *а* ρ *удовлетворяет условию* $r_j < \rho_j < |z^{b^j}|$, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Из формулы (2.5) теоремы 1 следует, что ряд $\tilde{F}(\xi)$ сходится в области $\mathcal{D}_r$ и для $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, ряды $\tilde{F}(\xi)$ и $\tilde{E}\Big(\frac{z}{\xi}\Big)$ сходятся на остове T абсолютно и равномерно. Перемножая их и почленно интегрируя, получим:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \sum_{x \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{f}(x)}{\xi^x} \sum_{y \in \tilde{K} \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\gamma(y) \xi^y}{z^y} \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \sum_{x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{f}(x)}{\xi^x} \frac{\xi^y}{z^y} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n} \int\limits_T \frac{\tilde{f}(x)}{\xi^x} \frac{\xi^y}{z^y} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Далее, используя формулу $\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \xi^k d\xi = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq (-1, \ldots, -1), \\ 1, & \text{при } k = (-1, \ldots, -1), \end{cases}$ и равенство $\tilde{f}(x)|_K = f(x)$, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n} \int\limits_T \frac{f(x)}{\xi^x} \frac{\xi^y}{z^y} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x} \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x} = F(z).$$

□

Заметим, что формулы, подобные интегральной формуле (3.1), приводились в [12].

Пример 1. Пусть конус K порожден векторами $a^1 = (1,0)$, $a^2 = (1,1)$. Рассмотрим разностное уравнение

$$f(x_1+2, x_2+1) = f(x_1+2, x_2) + f(x_1+1, x_2+1), (x_1, x_2) \in K \cap \mathbb{Z}^2. \quad (3.2)$$

Пусть $\Omega = \{(2,1), (2,0), (1,1)\}$, точка $m = (2,1)$. Сформулируем задачу Коши: найти решение уравнения (3.2) при выполнении условий

$$f(k,0) = 1, k = 0, 1, \ldots$$

$$f(0,0) = 1, f(1,1) = 2, f(2,2) = 6, f(3,3) = 20, \ldots \quad (3.3)$$

Производящая функция для $f(k,k)$ равна $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f(k,k)}{t^k} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}}$.

Задача Коши (3.2)–(3.3) имеет единственное решение. Для того чтобы найти явную формулу для производящей функции решения, нам нужно, чтобы выполнялось условие (2.6) для всех $\omega \in \Omega$. В нашем примере оно не выполняется, поэтому мы расширим конус до $\tilde{K}$, порожденного векторами $b^1 = (1,0)$, $b^2 = (0,1)$, и рассмотрим в этом конусе разностное уравнение (3.2) с начальными данными

$$f(k,0) = 1, k = 0, 1, \ldots$$

$$f(0,k) = 1, k = 0, 1, \ldots$$

$$f(1,k) = k+1, k = 0, 1, \ldots. \quad (3.4)$$

По теореме из [12] можно найти такие начальные данные, что сужение решения с носителем в $\tilde{K}$ на конус K будет совпадать с решением задачи (3.2)–(3.3). В нашем случае они находятся единственным образом.

В конусе $\tilde{K}$ задача Коши (3.2), (3.4) имеет единственное решение и вершина $m = (2,1)$ удовлетворяет условию (2.6), благодаря чему мы можем найти производящую функцию решения задачи (3.2),(3.4) $\tilde{F}$ по формуле (2.5):

$$\tilde{F}(z) = \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2 - z_1 - z_2}.$$

Далее, используя формулу (3.1), найдем производящую функцию $F(z)$ решения исходной задачи (3.2)–(3.3)

$$F(z) = \frac{z_1^2 z_2 + z_1\sqrt{z_1 z_2(z_1 z_2 - 4)}}{\sqrt{z_1 z_2 - 4}(\sqrt{z_1 z_2}(z_1 - 2) + z_1\sqrt{z_1 z_2 - 4})}.$$

4. Заключение

В работе предлагается подход к решению проблем, связанных с отсутствием явной формулы, в которой производящая функция решения задачи Коши выражается через производящую функцию начальных данных. Данный подход основан на возможности расширить множество, на котором ищутся решения разностного уравнения. При этом разностное уравнение и многогранник Ньютона не меняются, а условия на многогранник Ньютона, обеспечивающие разрешимость задачи Коши, выполняются, что и позволяет найти формулу для производящей функции решения.

В статье формулируется задача о «продолжении» решения задачи Коши в больший конус, приводятся формула, связывающая производящую функцию решения задачи Коши в исходном конусе с производящей функцией решения в расширенном конусе, и интегральная формула для производящей функции решения исходной задачи Коши.

Список источников

1. Лейнартас Е. К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30, № 2. С. 102–107.
2. Лейнартас Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 2. С. 335–340.
3. Лейнартас Е. К., Некрасова Т. И. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами в рациональных конусах целочисленной решетки // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 98–112. https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.108
4. Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2013. Т. 6, № 3. С. 88–96.
5. Почекутов Д. Ю. Диагонали рядов Лорана рациональных функций // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1370–1383.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М. : Мир, 2009. 767 с.
7. Яковлева Т. И. Корректность задачи Коши для многомерных разностных уравнений в рациональных конусах // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 468–480. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.218
8. Apanovich M. S., Leinartas E. K. On correctness of Cauchy problem for a polynomial difference operator with constant coefficients // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2018. Vol. 26. P. 3–15. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.3
9. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 225. P. 51–75.
10. Djokoviĉ D. Ẑ. A properties of the Taylor expantion of rational function in several variables // J. of Math. Anal. and Appl. 1978. Vol. 66. P. 679–685.

11. Haustus M. L. T., Klarner D. A. The diagonal of a double power series // Duke Math. J. 1971. Vol. 38, № 2. P. 229–235.
12. Leinartas E. K., Yakovleva T. I. The Cauchy problem for multidimensional difference equations and the preservation of the hierarchy of generating functions of its solutions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11, № 6. P. 712–722. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-712-722
13. Lipshitz L. D-Finite power series // Journal of Algebra. 1989. Vol. 122. P. 353–373.
14. Lyapin A. P., Chandragiri S. Generating functions for vector partition functions and a basic recurrence relation // Journal of Difference Equations and Applications. 2019. Vol. 25, № 7. P. 1052–1061. https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1649396

References

1. Leinartas E.K. Multidimensional Hadamard composition and sums with linear constraints on the summation indices. *Sib. Math. J.,* 1989, vol. 30, pp. 250–255. https://doi.org/10.1007/BF00971380
2. Leinartas E.K. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations. *Sib. Math. J.,* 2007, vol. 48, pp. 268–272. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0026-0
3. Leinartas E.K., Nekrasova T.I. Constant coefficient linear difference equations on the rational cones of the integer lattice. *Sib. Math. J.,* 2016, vol. 57, pp. 74–85. https://doi.org/10.1134/S0037446616010080
4. Nekrasova T.I. Dostatochnye uslovija algebraichnosti proizvodjashhih funkcij reshenij mnogomernyh raznostnyh uravnenij [Sufficient conditions of algebraicity of generating functions of the solutions of multidimensional difference equations]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2013, vol. 6, no. 3, pp. 88–96. (in Russian)
5. Pochekutov D.Y. Diagonals of the laurent series of rational functions.*Sib. Math. J.,* 2009, vol. 50, no. 6, pp. 1081–1091. https://doi.org/10.1007/s11202-009-0119-z
6. Stanley R. *Perechislitel'naja kombinatorika. Derev'ja, proizvodjashhie funkcii i simmetricheskie funkcii* [Enumerative combinatorics. Trees, generating functions and symmetric functions.] Moscow, Mir Publ., 2009, 767 p. (in Russian)
7. Yakovleva T.I. Well-posedness of the Cauchy problem for multidimensional difference equations in rational cones. *Siberian Mathematical Journal,* 2017, vol. 58, no. 2, pp. 363–372. https://doi.org/10.1134/S0037446617020185
8. Apanovich M.S., Leinartas E.K. On correctness of Cauchy problem for a polynomial difference operator with constant coefficients. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2018, vol. 26, pp. 3–15. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.3
9. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Mathematics,* 2000, vol. 225, pp. 51–75.
10. Djokoviĉ D.Ẑ. A properties of the Taylor expantion of rational function in several variables. *J. of Math. Anal. and Appl.,* 1978, vol. 66, pp. 679–685.
11. Haustus M.L.T., Klarner D.A. The diagonal of a double power series. *Duke Math. J.,* 1971, vol. 38, no. 2, pp. 229–235.
12. Leinartas E.K., Yakovleva T.I. The Cauchy problem for multidimensional difference equations and the preservation of the hierarchy of generating functions of its solutions. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics,*

2018, vol. 11, no. 6, pp. 712–722. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-712-722
13. Lipshitz L. D-Finite power series. *Journal of Algebra,* 1989, vol. 122, pp. 353–373.
14. Lyapin A.P., Chandragiri S. Generating functions for vector partition functions and a basic recurrence relation. *Journal of Difference Equations and Applications,* 2019, vol. 25, no. 7, pp. 1052–1061. https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1649396

Об авторах

Лейнартас Евгений Константинович, д-р физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, lein@mail.ru.

Яковлева Татьяна Игоревна, канд. физ.-мат. наук, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, t.neckrasova@gmail.com.

About the authors

Evgenij K. Leinartas, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, lein@mail.ru.

Tat'jana I. Yakovleva, Cand. Sci. (Phys.Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, t.neckrasova@gmail.com.

Поступила в редакцию / Received 22.02.2022
Поступила после рецензирования / Revised 29.03.2022
Принята к публикации / Accepted 07.04.2022