Серия «Математика»
2021. Т. 38. С. 96—111

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716
MSC 03B50, 08A99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.38.96

О решетке ES_I-замкнутых классов мультифункций ранга 2

В. И. Пантелеев[1], Э. С. Тагласов[1]

[1] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Рассмотрены мультифункции на двухэлементном множестве вместе с операторами суперпозиции и разветвления по предикату равенства. Оператор суперпозиции основан на пересечении множеств. Основная цель работы — описание всех замкнутых относительно рассматриваемых операторов классов. Оператор разветвления по предикату равенства позволяет поставленную задачу свести к описанию всех замкнутых классов, порожденных мультифункциями от двух переменных. Показано, что решетка замкнутых относительно рассматриваемых операторов классов содержит 237 элементов, что расширяет известный результат о всех замкнутых классах частичных функций на двухэлементном множестве. Для каждого замкнутого класса указано порождающее множество.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, предикат равенства, замыкание, предполное множество, решетка замкнутых классов.

1. Введение

При изучении функциональных систем одной из основных задач является задача описания всех замкнутых относительно операторов замыкания классов функций. Для булевых функций, рассматриваемых вместе с оператором суперпозиции, эта задача была решена Э. Постом в 1921 г. В [2] можно посмотреть компактное представление этого результата. Решетка замкнутых классов булевых функций является счетной и потому эффективно описываемой. Если рассматривать только оператор суперпозиции, то для многих функциональных систем решетка замкнутых классов является континуальной. К таким функциональным системам относятся функции k-значной логики [10], частичные функции [1], гиперфункции [11]. Эффективное описание континуальных множеств — как правило, труднорешаемая задача. Поэтому интерес стали вызывать функциональные системы, где наряду с суперпозицией рассматриваются и другие операторы, которые приводят к конечной или счетной классификации. Одним из таких операторов является оператор разветвления по предикату равенства [3].

Оператор разветвления по предикату равенства рассматривался на функциях k-значной логики [9], на частичных функциях [4; 5], гиперфункциях [7; 12].

Говоря о гипер- и мультифункциях, стоит заметить, что по суперпозиции $f(g_1 \ldots, g_n)$ можно неоднозначно определить соответствующую гипер- или мультифункцию (см., например, [8], где рассматриваются определения, основанные на объединении и пересечении множеств).

В представленной работе рассматриваются мультифункции на двухэлементном множестве с операторами суперпозиции и разветвления по предикату равенства. При этом рассматривается так называемая S_I-суперпозиция, которая основана на пересечении множеств [6;8]. Показано, что решетка замкнутых относительно рассматриваемых операторов классов содержит 237 элементов. Так как множество частичных булевых функций является подмножеством множества мультифункций на двухэлементном множестве, то среди 237 множеств содержится 100 замкнутых классов, описанных в [5].

2. Основные понятия и определения

Дадим строгие определения множеств мультифункций (M), гиперфункций (H), частичных (O^*) и всюду определенных (O) функций на конечном множестве A. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$M_n = \left\{f \mid f : A^n \to 2^A\right\}, \ M = \bigcup_n M_n,$$

$$H_n = \left\{f \mid f : A^n \to 2^A \setminus \{\varnothing\}\right\}, \ H = \bigcup_n H_n,$$

$$O^*_n = \{f \mid f : A^n \to A \cup \{\varnothing\}\}, \ O^* = \bigcup_n O^*_n,$$

$$O_n = \{f \mid f : A^n \to A\}, \ O = \bigcup_n O_n.$$

Мощность множества A называется рангом мультифункций.

При изучении гипер- и мультифункций, как правило, множество $\{a\}$, состоящее из одного элемента, не отличают от элемента a этого множества (если это не вызывает недоразумения), что позволяет не писать лишний раз скобки. В соответствии с этим, во-первых, утверждение $a \in a$ является справедливым, а во-вторых, являются справедливыми следующие вложения $O \subseteq O^* \subseteq M$ и $O \subseteq H \subseteq M$.

Если f — n-местная мультифункция, $f_1, \ldots, f_n$ — m-местные мультифункции или переменные, то суперпозиция $f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом[1]: если набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Для мультифункции $g(x_1, \ldots, x_m)$ будем говорить, что она получена S_I-суперпозицией из мультифункций $f, f_1, \ldots, f_n$.

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть R^m — m-местный предикат. Будем говорить, что (мульти)функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет предикат R^m, если для любых n наборов

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1}), \ldots, (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}),$$

принадлежащих предикату, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}))$$

также принадлежит R^m.

Множество (мульти)функций, сохраняющих предикат R, обозначается как $\mathrm{Pol}R$. Удобно задавать m-местный предикат, содержащий n наборов, матрицей размерности $m \times n$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Множество функций из O_2, сохраняющих некоторый предикат, заданный на множестве E_2, является замкнутым (см., например, [2]), в общем же случае множество мультифункций, сохраняющих предикат, необязательно замкнуто относительно суперпозиции. Но справедливы следующие леммы.

[1] Это определение впервые введено в [6]. В [8] приводится одно из обоснований такого определения.

Лемма 1. [6;8] *Если мультифункция f получена суперпозицией функций g, g_1, …, g_m, сохраняющих некоторый предикат R, то на двоичных наборах из предиката мультифункция f обязательно возвращает набор (не обязательно двоичный) из предиката.*

Лемма 2. [8] *Пусть мультифункция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ получена из мультифункции $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ введением фиктивной переменной x_i, предикат R задан на множестве 2^A. Мультифункция f сохраняет предикат R тогда и только тогда, когда мультифункция g сохраняет предикат R.*

В дальнейшем рассматриваем мультифункции, заданные на множестве $A = E_2 = \{0, 1\}$. При этом для множества E_2 используется обозначение «$-$» (прочерк), а для пустого множества — обозначение «$*$». Наряду с термином «мультифункция» используется термин «функция», если это не вызывает недоразумения.

Определим ES_I-замыкание множества $Q \subseteq M_2$, как множество всех мультифункций из M_2, которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных, S_I-суперпозиции и разветвления по предикату равенства. ES_I-замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$ или $[Q]_{ES_I}$.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием, называется ES_I-замкнутым множеством. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ порождает ES_I-замкнутое множество Q (ES_I-полно в множестве Q), если $[R] = Q$. Множество $R \subseteq M_2$ называется ES_I-предполным, если ES_I-замыкание R отлично от M_2, но ES_I-замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с M_2 для любой мультифункции $f \notin R$.

3. ExS_I-замыкание

Оператор разветвления по предикату равенства позволяет свести изучение ES_I-замкнутости множеств мультифункций к изучению ES_I-замкнутости множеств функций, зависящих от двух переменных.

Лемма 3. *Любой ES_I-замкнутый класс мультифункций из M_2 порождается множеством всех своих мультифункций, зависящих не более чем от двух переменных.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения полностью повторяет соответствующее для частичных функций из [4]. □

Лемма 3 позволяет свести задачу описания ES_I-замкнутых классов мультифункций к построению всех ES_I-замкнутых множеств мультифункций двух переменных.

Замечание 1. При получении мультифункции $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящей от n переменных, через мультифункции $f_1, \ldots, f_k$, зависящих не более чем от n переменных, может потребоваться использование промежуточных функций, которые зависят более чем от n переменных.

Пример 1. Пусть $f_1(x_1, x_2) = (1111)$, $f_2(x_1, x_2) = (- - -1)$, $f_3(x_1) = (-1)$. Применение ES_I-замыкания к мультифункциям без использования функций большего числа переменных не дает новых мультифункций. Однако если рассмотреть:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{если } x_1 = x_3, \\ f_2(x_1, x_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

то можно получить, например, мультифункцию

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, f_3(x_2)) = (1 - 11).$$

Поэтому для работы с мультифункциями не более чем двух переменных нужно уточнить определения используемых операторов. Сделаем это по аналогии с [5].

Пусть мультифункции f, g_1, g_2, h_1 и h_2 зависят только от двух переменных. Будем говорить, что функция f получается из функций g_1, g_2, h_1, h_2 с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства (Ex-оператор), если для всех двоичных наборов (α_1, α_2) выполняются следующие условия:

- пусть $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, тогда

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если } h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{иначе;} \end{cases}$$

- пусть $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = *$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = *$, тогда $f(\alpha_1, \alpha_2) = *$;
- иначе, если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = -$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = -$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cap g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если пересечение не пусто;} \\ g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также ограничим действие суперпозиции только на функции двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = g(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В операторах в качестве функций h_1 и h_2 допускается использование селекторных функций. Замыкание множества Q относительно операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, будем обозначать $[Q]_{ExS_I}$.

Определение ExS_I-замыкания позволяет создать алгоритм построения ExS_I-замкнутых классов.

В процессе работы алгоритм строит ExS_I-порождающие множества двухместных функций. С помощью компьютерного счета было получено, что в M_2 имеется ровно 237 ExS_I-замкнутых классов, 100 из которых являются замкнутыми классами частичных функций. Все остальные замкнутые классы представлены в таблицах 2–4 своими порождающими множествами.

4. ES_I-замкнутые классы в M_2

Теорема 1. *Для любого множества Q выполняется:* $[Q]_{ExS_I} \subseteq [Q]_{ES_I}$.

Доказательство. Покажем, что каждую мультифункцию $f(x, y)$, полученную с помощью ExS_I-операторов, можно получить с использованием операторов ES_I-замыкания. Очевидно, что достаточно рассмотреть только Ex-оператор.

Пусть $f(x, y)$ получена из $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$ с помощью Ex-оператора.

Определим мультифункции $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y)$ следующим образом:

$$u(x, y, z, t) = \begin{cases} g_1(x, y), & \text{если } z = t, \\ g_2(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$v(x, y) = u(x, y, h_1(x, y), h_2(x, y)).$$

Покажем, что на произвольном наборе (α_1, α_2) значения $v(\alpha_1, \alpha_2)$ и $f(\alpha_1, \alpha_2)$ совпадают.

Пусть $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = \tau_1$ и $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = \tau_2$. Рассмотрим все возможные варианты значений τ_1 и τ_2.

- $\tau_1 \in E_2, \tau_2 \in E_2$. Тогда

$$v(\alpha_1, \alpha_2) = u(\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если } \tau_1 = \tau_2, \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

- $\tau_1 = *$. Тогда

$$v(\alpha_1, \alpha_2) = u(\alpha_1, \alpha_2, *, \tau_2) = *.$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_2 = *$.

- Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 \in E_2$. Тогда

$$v(\alpha_1, \alpha_2) = u(\alpha_1, \alpha_2, -, \tau_2) =$$

$$= \begin{cases} u(\alpha_1, \alpha_2, 0, \tau_2) \cap u(\alpha_1, \alpha_2, 1, \tau_2), & \text{если пересечение не пусто;} \\ u(\alpha_1, \alpha_2, 0, \tau_2) \cup u(\alpha_1, \alpha_2, 1, \tau_2), & \text{иначе;} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cap g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если пересечение не пусто;} \\ g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 = -$.

• Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 = -$. Тогда

$$v(\alpha_1, \alpha_2) = u(\alpha_1, \alpha_2, -, -) =$$
$$= \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in \{0,1\}} u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in \{0,1\}} u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Но $\bigcap\limits_{\beta_i \in \{0,1\}} u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cap g_2(\alpha_1, \alpha_2)$, а
$\bigcup\limits_{\beta_i \in \{0,1\}} u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2)$

□

Следствие 1. *Число ES_I-замкнутых классов в M_2 не больше 237.*

Для получения нижней оценки числа классов рассмотрим следующие множества мультифункций:

$K_1 = \mathrm{Pol}\, R_1$, $R_1 = (0\ *)$; $K_2 = \mathrm{Pol}\, R_2$, $R_2 = (1\ *)$; $K_3 = O_2^*$; $K_4 = H_2$;

$K_5 = \{f \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{*, 1, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;

$K_6 = \{f \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{*, 0, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;

$K_7 = \mathrm{Pol} R_7$; $R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}$;

$K_8 = \mathrm{Pol} R_8$; $R_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$;

$K_9 = \mathrm{Pol} R_9$; $R_9 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$;

$K_{10} = \mathrm{Pol}\, R_{10}$, $R_{10} = (0)$; $K_{11} = \mathrm{Pol}\, R_{11}$, $R_{11} = (1)$;

$K_{12} = \{f \mid f(1, \ldots, 1) \in \{1, -\}$ и
$f(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \{*, 1, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;

$K_{13} = \{f \mid f(0, \ldots, 0) \in \{0, -\}$ и
$f(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \{*, 0, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;

K_{14} – функции, которые на противоположных наборах возвращают следующие значения: $\{(*\,*), (*\ 0), (*\ 1), (*\ -), (0\ *), (1\ *), (-\ *)\}$;

$K_{15} = \{f \mid * \in f(0, \ldots, 0) \cup f(1, \ldots, 1)\}$;

$K_{16} = \mathrm{Pol} R_{16}$; $R_{16} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}$;

$K_{17} = \mathrm{Pol} R_{17}$; $R_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & - & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$.

Теорема 2. *Множества $K_1 - K_{17}$ являются ES_I-замкнутыми.*

Доказательство. Множества $K_1 - K_9$ являются предполными множествами [8], а потому замкнутыми.

Для множеств K_{10}, K_{11}, K_{16}, K_{17} замкнутость относительно суперпозиции следует из Леммы 1, а относительно введения фиктивных переменных следует из Леммы 2.

Предикаты соответствующих множеств содержат только один двоичный набор. Тогда подставляя его функцию, полученную с помощью разветвления по предикату равенства по формуле 2, получим значение соответствующее значению функции f_1, которая сохраняет соответствующий предикат. А в предикатах K_{16} и K_{17} кроме того содержатся все наборы вида $(*\ \beta)$ либо $(\beta\ *)$, где $\beta \in \{*, 0, 1, -\}$. Очевидно, что такие наборы предиката функция сохраняет.

Множество K_{12} — это множество функций, которые не возвращают значение 0. При применении ES_I-операторов замыкания не появится функции, которая будет возвращать значение 0.

Пусть функции $f, f_1, \ldots, f_m$ принадлежат множеству K_{12}. Рассмотрим значение функции $g = f(f_1, \ldots, f_m)$ на единичном наборе:

$$g(1,\ldots,1) = f(f_1(1,\ldots,1),\ldots,f_m(1,\ldots,1)) =$$
$$= \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(1,\ldots,1)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(1,\ldots,1)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как функция f не возвращает 0, то пересечение может давать 1, $-$ или $*$. Если пересечение дает $*$, то берется объединение, а так как среди всех наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ будет набор (1,...,1), то объединение не может давать $*$.

Рассмотрим оператор разветвления по предикату равенства. Функция, полученная по формуле 2, на единичном наборе возвращает значение соответствующее значению функции f_1, которая принадлежит множеству K_{12}.

Замкнутость множества K_{13} показывается двойственным образом множеству K_{12}.

Рассмотрим множество K_{14}. Пусть функции $f, f_1, \ldots, f_m$ принадлежат множеству K_{14}. Рассмотрим функция g, полученную с помощью суперпозиции $g = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$. Так как, на противоположных значениях внутренние функции возвращают набор с $*$, то и суперпозиция на тех же набора по определению будет возвращать набор с $*$.

Покажем замкнутость относительно разветвления по предикату равенства. Очевидно, что значения функции, полученную по формуле 2, на противоположных наборах будут соответствовать значениям на противоположных наборах одной и той же функции, которая принадлежит множеству K_{14}.

Для класса K_{15} замкнутость относительно суперпозиции вытекает из того, что если хотя бы одна внутренняя функция на некотором наборе возвращает $*$, то и вся суперпозиция возвращает $*$. А для разветвления по предикату равенства рассуждения аналогичны соответствующим для класса K_{14}.

$\square$

Лемма 4. *Множества $K_1, \ldots, K_{17}$ являются попарно различными.*

Доказательство. Попарная различность предполных множеств $K_1 - K_9$ показана в [8]. Справедливость леммы следует из табл. 1, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца находится мультифункция f, такая, что $f \in K_i$ и $f \notin K_j$. $\square$

Таблица 1

Различность множеств $K_1 - K_{17}$

	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}
K_1	$**$	$**$	$**$	$**$	00	00	$0*$	$*0$
K_2	$**$	$**$	$**$	$**$	11	11	$1*$	$*1$
K_3	$**$	$**$	$**$	$**$	00	00	$0*$	$*0$
K_4	$--$	$--$	$0-$	$1-$	$--$	$--$	$--$	$--$
K_5	$**$	$**$	$**$	$**$	11	11	$1*$	$*1$
K_6	$**$	$**$	$**$	$**$	00	00	$0*$	$*0$
K_7	$**$	$**$	$**$	$**$	$--$	$--$	$--$	$--$
K_8	$**$	$**$	$**$	$**$	01	01	10	10
K_9	$**$	$**$	$**$	$**$	01	01	$0*$	$*0$
K_{10}	$\times$	00	00	01	00	00	00	00
K_{11}	11	$\times$	01	01	11	11	11	11
K_{12}	11	$--$	$\times$	11	11	11	11	11
K_{13}	$--$	00	00	$\times$	00	00	00	00
K_{14}	$**$	$**$	$**$	$**$	$\times$	$\times$	$0*$	$*1$
K_{15}	$**$	$**$	$**$	$**$	$*111$	$\times$	$0*$	$*1$
K_{16}	$**$	$**$	$**$	$**$	01	01	$\times$	$*1$
K_{17}	$**$	$**$	$**$	$**$	01	01	$0*$	$\times$

Пусть даны ExS_I-замкнутые классы $F_1, \ldots, F_m$ и ES_I-замкнутые классы $G_1, \ldots, G_n$.

Для каждого ExS_I-замкнутого класса F_i $(1 \leq i \leq m)$ построим вектор

$$v_{F_i} = (\gamma_{1_i}, \ldots, \gamma_{n_i}),$$

вектор принадлежности мультифункций из F_i множествам $G_1 - G_n$:

$$\gamma_{j_i} = \begin{cases} 1, & \text{если } F_i \subseteq G_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как множества $G_1 - G_n$ являются ES_I-замкнутыми, то очевидно, что из функций некоторого класса K, у которого в позиции i вектор v_K содержит 1 нельзя ES_I-замыканием получить класс K', у которого вектор $v_{K'}$ в этой позиции содержит 0.

Назовем ES_I-замкнутые классы $G_1, \ldots, G_n$ разделяющими для множеств $F_1, \ldots, F_m$, если векторы $v_{F_1}, \ldots, v_{F_m}$ попарно различны.

Теорема 3. *ExS_I-замкнутые классы являются различными относительно ES_I-замыкания.*

Доказательство. Для каждого ExS_I-замкнутого класса F построим вектор

$$v_F = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_j}),$$

вектор принадлежности множествам $K_{i_1} - K_{i_j}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq 17)$.

Для удобства сравнения разобьем множество всех векторов принадлежности на 4 семейства относительно принадлежности предполным классам K_5 и K_6 (обозначим это как K_5K_6, $\overline{K}_5K_6$, $K_5\overline{K}_6$, $\overline{K}_5\overline{K}_6$, где крышка означает то, что на соответствующей позиции стоит 0 или то, что рассматриваемое ExS_I-замкнутое множество не содержится в ES_I-замкнутом классе).

Семейство K_5K_6. Классы этого семейства разобьем на 2 множества относительно принадлежности предполному классу K_1.

Разделяющими для классов из $K_5 \cap K_6 \cap K_1$ являются множества $K_2, K_3, K_7, K_8, K_{12}$ (см. табл. 2), а для $K_5 \cap K_6 \cap \overline{K}_1$ — $K_2, K_4, K_7, K_8, K_9, K_{12}, K_{13}$ (см. табл. 3).

Под номером 1 указан замкнутый класс частичных функций, которые на любом наборе возвращают $*$.

Остальные семейства представлены в таблице 4 из приложения, в которой не приведены замкнутые множества частичных функций (см. [5]). В этой таблице семейства ExS_I-замкнутых классов разбиваются на подсемейства и для каждого подсемейства приведено наименьшее разделяющее множество ES_I-замкнутых классов.

Таблица 2

Классы, содержащиеся в $K_5 \cap K_6$ и K_1

№	Базис	K_2	K_3	K_7	K_8	K_{12}
1	$(* * **)$	1	1	1	1	0
2	$(* - -*)$	1	0	1	0	0
3	$(* - **)$	1	0	0	1	0
4	$(* - *-)$	0	0	0	1	1
5	$(* - -*), (* - **)$	1	0	0	0	0
6	$(* - --)$	0	0	0	0	1
7	$(* - *-), (* - **)$	0	0	0	1	0
8	$(* - --), (* - -*)$	0	0	0	0	0

□

Теорема 4. *Число ES_I-замкнутых классов множества мультифункций ранга 2 равно 237.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из теорем 1 и 3.
□

Таблица 3

Классы, содержащиеся в $K_5 \cap K_6$ и $\overline{K}_1$

№	Базис	K_2	K_4	K_7	K_8	K_9	K_{12}	K_{13}
9	$(- - - -)$	0	1	1	0	0	1	1
10	$(- * * -)$	0	0	1	0	0	1	1
11	$(- - **)$	1	0	0	1	1	0	1
12	$(- - - -), (* - - *)$	0	0	1	0	0	0	0
13	$(- - - *)$	1	0	0	0	1	0	1
14	$(- - * -)$	0	0	0	0	0	1	1
15	$(- - **), (* - **)$	1	0	0	1	1	0	0
16	$(- - - *), (* - - *)$	1	0	0	0	1	0	0
17	$(- - - -), (* - - -)$	0	0	0	0	0	1	0
18	$(- - - -), (- - - *)$	0	0	0	0	0	0	1
19	$(- - **), (* - * -)$	0	0	0	1	1	0	0
20	$(- - - *), (* - - -)$	0	0	0	0	1	0	0
21	$(- - * -), (* - - *)$	0	0	0	0	0	0	0

5. Заключение

В работе рассмотрены мультифункции, заданные на двухэлементном множестве. Описаны все ES_I-замкнутые классы мультифункций, доказано, что их ровно 237. Следующим шагом является рассмотрение мультифункций, заданных на трехэлементном множестве, а затем и общий случай — мультифункций, заданных на k-элементном множестве. Также остается открытым вопрос об описании всех замкнутых относительно S_I-суперпозиции классов.

Список литературы

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.
2. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. М. : Физматлит, 2000. 128 с.
3. Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Серия 1, Математика и механика. 2003. № 6. С. 37–39.
4. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 80–88. https://doi.org/10.4213/dm1015
5. Матвеев С. А. Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 239–244.

6. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2009. № 2 (68). С. 60–79.
7. Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Т. 10. С. 93–105.
8. Пантелеев В. И., Тагласов Э. С. ES_I-замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов // Интеллектуальные Системы. Теория и приложения. 2021. Т. 25, вып. 2. С. 55–80.
9. Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикату // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып 4. С. 18–25.
10. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.
11. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set // Multiple-Valued Logic. An International Journal. 2002. Vol. 8, N 4. P. 495–501.
12. Panteleev V. I., Riabets L. V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. 2020. Т. 13, № 2. С. 231–241. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-231-241

Владимир Иннокентьевич Пантелеев, доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664000, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7(3952) 52-12-98, email: vl.panteleyev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

Эдуард Станиславович Тагласов, магистрант, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664000, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7(3952) 52-12-98, email: taglasov1@gmail.com

Поступила в редакцию 25.10.2021

On the Lattice of ES_I-closed Classes of Multifunctions on Two-elements Set

V. I. Panteleev[1], E. S. Taglasov[2]

[1] *Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. The paper considers multifunctions on a two-element set with superposition and the equality predicate branching operator. The superposition operator is based on the intersection of sets. The main purpose of the work is to describe all closed classes with respect to the considered operators. The equality predicate branching operator allows the task to be reduced to a description of all closed classes generated by 2-variable multifunctions. Using this, it is shown that the lattice of classes closed with respect to the considered operators contains 237 elements. A generating set is specified for each closed class. The result obtained in the paper extends the known result for all closed classes of partial functions on a two-element set.

Keywords: multifunction, superposition, equality predicate, closure, precopmlete set, lattice of closed classes.

References

1. Alekseev V.B., Voronenko A.A. On some closed classes in partial two-valued logic. *Discrete Math. Appl.*, 1994, vol. 6, no. 4, pp. 58-79. (in Russian)
2. Marchenkov S.S. *Closed classes of Boolean functions.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 128 p. (in Russian)
3. Marchenkov S.S. Closure Operators with Predicate Branching. *Bulletin of Moscow State University. Series 1. Mathematics and Mechanics*, 2003, no. 6, pp. 37-39. (in Russian)
4. Marchenkov S.S. The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions. *Discrete Math. Appl.*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 381-389. https://doi.org/10.1515/DMA.2008.028
5. Matveev S.S. Construction of All E-closed Classes of Partial Boolean Functions. *Mathematical problems in cybernetics*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, vol. 18, pp. 239–244. (in Russian)
6. Panteleev V.I. The Completeness Criterion for Depredating Boolean Functions. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2009, vol. 68, no. 2, pp. 60-79. (in Russian)
7. Panteleyev V.I., Riabets L.V. The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2014, vol. 10, pp. 93-105. (in Russian)
8. Panteleev V.I., Taglasov E.S. ES_I-closure of rank 2 multi-functions: completeness criterion, classification and types of bases. *Intelligent Systems. Theory and Applications*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 55-80. (in Russian)
9. Soloviev V.D. Closed classes in k-valued logic with a branching operation by predicates. *Discrete Math. Appl.*, 1990, vol. 2, no. 4. pp. 18-25. (in Russian)
10. Yanov Yu.I., Muchnik A.A. On the existence of k-valued closed classes without a finite basis. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1959, vol. 127, pp. 44–46. (in Russian)
11. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002, vol. 8, no. 4 pp. 495-501.
12. Panteleev V.I., Riabets L.V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 231-241. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-231-241

Vladimir Panteleev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: +7(3952) 52-12-98, email: vl.panteleyev@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

Eduard Taglasov, Undergraduate, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: +7(3952) 52-12-98, email: taglasov1@gmail.com

Received 25.10.2021

Приложение

Таблица 4

Замкнутые классы, порождающие и разделяющие множества

Классы, не содержащиеся в K_5 и содержащиеся в K_6 и K_2

№	Базис	K_1	K_3	K_8	K_{10}	K_{13}	K_{16}
22	$(*0**), (*-**)$	1	0	1	0	0	1
23	$(0-**)$	1	0	1	1	1	0
24	$(*0-*)$	1	0	0	0	0	1
25	$(00-*)$	1	0	0	1	1	0
26	$(0-**), (*0**)$	1	0	1	0	0	0
27	$(-0**)$	0	0	1	0	1	0
28	$(-0**), (*0**)$	0	0	1	0	0	0
29	$(00-*), (*00*)$	1	0	0	0	0	0
30	$(-00*)$	0	0	0	0	1	0
31	$(-00*), (*00*)$	0	0	0	0	0	0

Классы, не содержащиеся в K_5 и содержащиеся в K_6 и $\overline{K}_2$

№	Базис	K_1	K_3	K_4	K_8	K_9	K_{10}	K_{13}	K_{16}
32	$(000-)$	1	0	1	0	0	1	1	0
33	$(*0*-)$	1	0	0	1	1	0	0	1
34	(-000)	0	0	1	0	0	0	1	0
35	$(0-**), (*0*0)$	1	0	0	1	1	0	0	0
36	$(-0**), (*0*0)$	0	0	0	1	1	0	0	0
37	$(*00-)$	1	0	0	0	1	0	0	1
38	$(00*-)$	1	0	0	0	0	1	1	0
39	$(00-*), (*000)$	1	0	0	0	1	0	0	0
40	$(-00*), (*000)$	0	0	0	0	1	0	0	0
41	$(000-), (*000)$	1	0	0	0	0	0	0	0
42	$(-0*0)$	0	0	0	0	0	0	1	0
43	$(-000), (*000)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $K_5 \cap \overline{K}_6$ и K_1

№	Базис	K_2	K_3	K_8	K_{11}	K_{12}	K_{17}
44	$(*1**), (*-**)$	1	0	1	0	0	1
45	$(*-*1)$	1	0	1	1	1	0
46	$(*1-*)$	1	0	0	0	0	1
47	$(*1-1)$	1	0	0	1	1	0
48	$(*1**), (*-*1)$	1	0	1	0	0	0
49	$(*1*-)$	0	0	1	0	1	0
50	$(*1*-), (*1**)$	0	0	1	0	0	0
51	$(*11*), (*1-1)$	1	0	0	0	0	0
52	$(*11-)$	0	0	0	0	1	0
53	$(*11-), (*11*)$	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $K_5 \cap \overline{K}_6$ и $\overline{K}_1$

№	Базис	K_2	K_3	K_4	K_8	K_9	K_{11}	K_{12}	K_{17}
54	$(11-1)$	1	0	1	0	0	1	1	0
55	$(1-**)$	1	0	0	1	1	0	0	1
56	$(111-)$	0	0	1	0	0	0	1	0
57	$(1-**), (*1*1)$	1	0	0	1	1	0	0	0

58	$(11**), (*1*-)$	0	0	0	1	1	0	0	0
59	$(11-*)$	1	0	0	0	1	0	0	1
60	$(1-*1)$	1	0	0	0	0	1	1	0
61	$(11-*), (*111)$	1	0	0	0	1	0	0	0
62	$(111*), (*11-)$	0	0	0	0	1	0	0	0
63	$(111*), (11-1)$	1	0	0	0	0	0	0	0
64	$(11*-)$	0	0	0	0	0	0	1	0
65	$(111-), (111*)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$ и $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$

№	Базис	K_3	K_4	K_7	K_8	K_9	K_{14}	K_{15}
66	$(1--0)$	0	1	1	0	0	0	0
67	$(0**1), (1--0)$	0	0	1	0	0	0	0
68	$(1-**), (*0*0)$	0	0	0	1	1	1	1
69	$(1-**), (*010)$	0	0	0	1	1	0	1
70	$(*01-), (0011), (101*)$	0	0	0	1	1	0	0
71	$(1-*0)$	0	0	0	1	0	0	0
72	$(100-)$	0	1	0	0	0	0	0
73	$(10-*), (*000)$	0	0	0	0	1	0	1
74	$(*00-), (0001), (100*)$	0	0	0	0	1	0	0
75	$(10*-)$	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$ и $\overline{K}_1 \cap K_2$ и $\overline{K}_3$

№	Базис	K_4	K_8	K_9	K_{11}	K_{14}	K_{15}	K_{17}
76	$(10-1)$	1	0	0	1	0	0	0
77	$(0-**), (10**)$	0	1	1	0	1	1	1
78	$(1-**), (*0*1)$	0	1	1	0	1	1	0
79	$(-01*)$	0	1	1	0	0	1	1
80	$(1-**), (*011)$	0	1	1	0	0	1	0
81	$(0-*1), (101*)$	0	1	1	0	0	0	1
82	$(*-*1), (0011), (101*)$	0	1	1	0	0	0	0
83	$(10-*)$	0	0	1	0	0	1	1
84	$(-0*1)$	0	0	0	1	0	0	0
85	$(10-*), (*001)$	0	0	1	0	0	1	0
86	$(00-1), (100*)$	0	0	1	0	0	0	1
87	$(*0-1), (0001), (100*)$	0	0	1	0	0	0	0
88	$(00-*), (1001)$	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$ и $K_1 \cap \overline{K}_2$ и $\overline{K}_3$

№	Базис	K_4	K_8	K_9	K_{10}	K_{14}	K_{15}	K_{16}
89	$(001-)$	1	0	0	1	0	0	0
90	$(*0*1), (*0*-)$	0	1	1	0	1	1	1
91	$(01**), (*0*-)$	0	1	1	0	1	1	0
92	$(*01-)$	0	1	1	0	0	1	1
93	$(0-**), (*010)$	0	1	1	0	0	1	0
94	$(0-*1), (*010)$	0	1	1	0	0	0	1
95	$(*01-), (0011), (001*)$	0	1	1	0	0	0	0
96	$(*1-0)$	0	0	1	0	0	1	1
97	$(01*-)$	0	0	0	1	0	0	0
98	$(01-*), (*000)$	0	0	1	0	0	1	0
99	$(00-1), (*000)$	0	0	1	0	0	0	1
100	$(*00-), (0001), (000*)$	0	0	1	0	0	0	0
101	$(001-), (*000)$	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$ и $K_1 \cap K_2$ и $\overline{K}_3 \cap K_{15}$

№	Базис	K_7	K_8	K_{10}	K_{11}	K_{14}	K_{16}	K_{17}
102	$(*01*), (*--*)$	1	0	0	0	0	1	1
103	$(*-**), (*0**), (*1**)$	0	1	0	0	1	1	1
104	$(*0*1), (*-*1)$	0	1	0	1	1	1	0
105	$(01**), (0-**)$	0	1	1	0	1	0	1
106	$(*01*), (*-**)$	0	1	0	0	0	1	1
107	$(*011), (*-*1)$	0	1	0	1	0	1	0
108	$(001*), (0-**)$	0	1	1	0	0	0	1
109	$(*0**), (*-*1)$	0	1	0	0	1	1	0
110	$(0-**), (*1**)$	0	1	0	0	1	0	1
111	$(*01*), (*0-*)$	0	0	0	0	0	1	1
112	$(*0-1)$	0	0	0	1	0	1	0
113	$(01-*)$	0	0	1	0	0	0	1
114	$(*01*), (*-*1)$	0	1	0	0	0	1	0
115	$(0-**), (*01*)$	0	1	0	0	0	0	1
116	$(0-**), (*0*1)$	0	1	0	0	1	0	0
117	$(0-**), (*011)$	0	1	0	0	0	0	0
118	$(*00*), (*0-1)$	0	0	0	0	0	1	0
119	$(01-*), (*00*)$	0	0	0	0	0	0	1
120	$(00-*), (*001)$	0	0	0	0	0	0	0

Классы, содержащиеся в $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$ и $K_1 \cap K_2$ и $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_{15}$

№	Базис	K_4	K_7	K_8	K_{10}	K_{11}	K_{16}	K_{17}
121	$(0--1)$	1	1	0	1	1	1	1
122	$(0--1), (0**1)$	0	1	0	1	1	1	1
123	$(0--1), (*01*)$	0	1	0	0	0	1	1
124	$(0-*1)$	0	0	1	1	1	1	1
125	$(00-1)$	1	0	0	1	1	1	1
126	$(00-1), (00*1)$	0	0	0	1	1	1	1
127	$(0-*1), (*01*)$	0	0	1	0	0	1	1
128	$(0-*1), (*011)$	0	0	1	0	1	1	0
129	$(001*), (0-*1)$	0	0	1	1	0	0	1
130	$(*-**), (0011), (*011)$	0	0	1	0	0	1	0
131	$(*-**), (0011), (001*)$	0	0	1	0	0	0	1
132	$(00-1), (*00*)$	0	0	0	0	0	1	1
133	$(00-1), (*001)$	0	0	0	0	1	1	0
134	$(000*), (00-1)$	0	0	0	1	0	0	1
135	$(*-*1), (0011), (001*)$	0	0	1	0	0	0	0
136	$(*0-*), (0001), (*001)$	0	0	0	0	0	1	0
137	$(*0-*), (0001), (000*)$	0	0	0	0	0	0	1
138	$(*0-1), (0001), (000*)$	0	0	0	0	0	0	0