Серия «Математика»
2020. Т. 33. С. 35—50

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.958+533.1
MSC 45D05, 83-02
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.33.35

Задача Коши для системы интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа *

Н. П. Чуев
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Российская Федерация

Аннотация. В статье изучается задача Коши для системы нелинейных интегродифференциальных уравнений газовой динамики, описывающей нестационарное движение конечной массы самогравитирующего газа, ограниченной свободной границей. Предполагается, что движение газа рассматривается при условии, что свободная граница во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц. Это делает удобным переход от эйлеровых к лагранжевым координатам. Первоначально данная система в эйлеровых координатах преобразуется в систему интегродифференциальных уравнений в лагранжевых координатах. Доказана лемма об эквивалентности этих систем. Затем система в переменных Лагранжа преобразуется к системе, состоящей из интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнения неразрывности, для которой с помощью метода последовательных приближений доказана теорема существования решения задачи Коши. Методом математической индукции доказана непрерывность решения и принадлежность искомых функций пространству бесконечно дифференцируемых функций, доказана их ограниченность и единственность полученного решения. Решение системы интегральных уравнений типа Вольтерра определяет отображение начальной области в область движущегося газа, а также задает закон движения свободной границы как отображение точек начальной границы.

Ключевые слова: задача Коши, лагранжевы координаты, система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, метод последовательных приближений.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–07–00407.

1. Введение

Проблема эволюции газовых тел в вакууме является актуальной для многих задач современной математики и теоретической астрофизики. В данной работе рассматривается задача Коши для системы уравнений газовой динамики, описывающей изэнтропическое, нестационарное движение в вакууме гравитирующего по закону Ньютона, политропного и изолированного конечного объёма идеального газа, с переменной областью течения, ограниченного свободной поверхностью. Задача о движении газа со свободными границами почти 50 лет стали объектами строгих математических исследований. Основные результаты в этом направлении получены Л.В. Овсянниковым, В. К. Андреевым и др. [1;9]. Изучение движений сплошной среды с учетом сил самогравитации является актуальной проблемой на протяжении более трех последних веков. Эти исследования были начаты И. Ньютоном и К. Маклореном. Существенный вклад в эту область науки внесли С. Д. Пуассон, К. Якоби. Далее это направление обогатилось благодаря трудам Ж. Лиувилля, Дирихле, Дедекинда, Римана, Дарвина и Джинса. Затем данная теория получила развитие в работах выдающихся ученых А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Л. Лихтенштейна и др. [6;13]. Движение гравитирующего газового шара рассматривалось как модель звезд в работах и монографии К. П. Станюковича [12], В статье О. И. Богоявленского [2] рассмотрена динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа. Существует большое число публикаций по данной теме. Теория математического моделирования динамики самогравитирующих газовых сред продолжает интенсивно развиваться.

2. Постановка задачи

Пусть в момент $t = 0$ в пространстве R^3 задана область Ω_0, заполненная газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Задача о движении газа в силовом поле сводится к определению области $\Omega_t \in R^4$, занимаемой газом в момент времени t, а также вектора скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и давления $p(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих в области $\mathbf{x} \in \Omega_t, \quad t \in (0, \mathrm{T})$ системе уравнений газовой динамики в форме Л. Эйлера [12]:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} + \tfrac{1}{\rho(\mathbf{x},t)}\nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \\ &\tfrac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt} = -\rho(\mathbf{x}, t)\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

При условиях, что при $t = 0$ в каждой точке $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ области Ω_0 известны распределения: $\mathbf{u}_0 = \{u_0,\ v_0,\ w_0\},\ \rho = \rho_0(\mathbf{x}),\ p = p_0(\mathbf{x})$, где $u_0(\mathbf{x})$ — вектор скорости частиц газа, $\rho_0(\mathbf{x})$ — плотности и $p_0(\mathbf{x})$ — давление газа.

На границе Γ_t области Ω_t выполняется условие

$$\rho(\mathbf{x},t)=0 \text{ для } \mathbf{x}\ \in\Gamma_t, \text{ при } t\geq 0. \tag{2.2}$$

Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \rho_0(\mathbf{x}),\ p_0(\mathbf{x})$ задаются в пространстве $C^\infty(\overline{\Omega}_0)$ – бесконечно-дифференцируемых функций в области $\overline{\Omega}_0$, замкнутая граница Γ_0 принадлежит классу C^∞ – бесконечно-дифференцируемых функций.

Сила ньютоновского притяжения в правой части векторного уравнения системы (2.1) равна $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)=\nabla\Phi(\mathbf{x},t)$, где $\nabla\Phi$ — градиент ньютоновского потенциала, который задается тройным интегралом:

$$\Phi(\mathbf{x},t)=G\iiint\limits_{\Omega_t}\frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}', \tag{2.3}$$

где G – гравитационная постоянная, $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ - расстояние между точками области.

Отметим следующее: функции $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{F},\mathbf{P},\mathbf{x},\mathbf{x}'$ переменные ξ,η всюду в тексте являются векторными величинами.

Рассматриваемая в статье модель изэнтропического движения политропного газа позволяет исключить плотность $\rho(\mathbf{x},t)$ и давление $p(\mathbf{x},t)$ из системы (2.1). Для этого используем уравнение состояния политропного газа в виде

$$p(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\gamma}\rho^\gamma(\mathbf{x},t), \tag{2.4}$$

где $\gamma>1$ — показатель политропы. При произвольном γ и условия (2.2) в системе (2.1) в окрестности свободной границы $\Gamma_t,\quad t\geqslant 0$, возникает сингулярность. Поэтому будем изучать движение газа при $\gamma=1+\frac{l}{m}$, где (l,m) принадлежит множеству N натуральных чисел, $l\geqslant 2$.

Введем новую неизвестную функцию

$$\rho(\mathbf{x},t)=\sigma^m(\mathbf{x},t), \tag{2.5}$$

после подстановки которой в систему (2.1) получим систему газовой динамики с градиентным членом, не имеющим сингулярности:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt}+\tfrac{m}{l}\nabla\sigma^l(\mathbf{x},t)=\mathbf{F}(\mathbf{x},t),\\ &\tfrac{d\sigma(\mathbf{x},t)}{dt}=-\tfrac{1}{m}\sigma(\mathbf{x},t)\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\end{aligned} \tag{2.6}$$

с начальными данными $\mathbf{u_o}(\mathbf{x}),\ \sigma_\mathbf{0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_0$, условием

$$\sigma(\mathbf{x},t)=0,\ \text{для } \mathbf{x}\in\Gamma_t,\ \text{при } t\geqslant 0. \tag{2.7}$$

Эквивалентность систем уравнений газовой динамики (2.1) и (2.6) при условии политропности (2.4) замены переменной (2.5) и условиях (2.2), (2.7) очевидна.

Будем предполагать, что свободная граница во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, т. е. исключается возможность переноса массы через свободную поверхность.

Преобразуем систему газовой динамики (2.6) и найдем ее вид в лагранжевых координатах $(\xi,\ t)$ следующим образом.

Пусть система газовой динамики (2.6) имеет решение $\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\ \sigma(\mathbf{x},t)$. При известном векторе скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ закон движения частиц газа определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}\left(\mathbf{x},t\right) \tag{2.8}$$

с начальным условием в момент времени $t=0$

$$\mathbf{x} = \xi. \tag{2.9}$$

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (2.8) с начальными условиями (2.9) будет иметь вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(\xi,t\right). \tag{2.10}$$

Рассмотрим подробнее свойства решения (2.10) задачи Коши (2.8), (2.9). Вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(\xi,t\right)$ описывает траекторию частицы газа, находящейся в точке $\xi \in \Omega_0$ в момент $t=0$, а также задает отображение замкнутой Ω_0 в область Ω_t при фиксированном t. Если непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbf{x}\left(\xi,t\right)$ обладает достаточной гладкостью, то существование дифференцируемого обратного преобразовании выполнимо при условии, что якобиан отображения

$$J(\xi,t) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \det\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\right) \tag{2.11}$$

отличен от нуля.

Введем лагранжевы переменные $\xi = \{\xi,\eta,\zeta\}$ как значения координат частиц газа в начальный момент в области Ω_0. Рассматривая $\mathbf{x} = \{x,y,z\}$ как функции независимых переменных ξ,η,ζ,t, то в момент t скорость частицы будет

$$\frac{\partial\mathbf{x}\left(\xi,t\right)}{\partial t} = \mathbf{u}\left(\mathbf{x}\left(\xi,t\right),t\right) = \mathbf{v}\left(\xi,t\right), \tag{2.12}$$

а ускорение заменим лагранжевым выражением

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t^2}. \tag{2.13}$$

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа имеет вид [8]

$$\rho\left(\mathbf{x}\left(\xi,t\right),t\right)J(\xi,t)=\rho_0(\xi). \tag{2.14}$$

Обозначая $\rho\left(\mathbf{x}\left(\xi,t\right),t\right)=\widetilde{\rho}(\xi,t)$, последнее уравнение примет вид

$$\widetilde{\rho}(\xi,t)J(\xi,t)=\rho_0(\xi), \tag{2.15}$$

здесь $\rho_0(\xi)$ обозначает первоначальную плотность газа в точках Ω_0.

Запишем уравнение неразрывности с применением замены функции (2.5)

$$\sigma^m(\mathbf{x}(\xi,t),t)J(\xi,t)=\sigma_0^m(\xi) \tag{2.16}$$

Перейдем в векторном уравнении системы (2.6) к лагранжевым координатам, предварительно продифференцировав потенциал $\Phi(\xi,t)$. Тогда для силовой функции $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)=\nabla\Phi(\mathbf{x},t)$, после вычисления градиента и подстановки $\mathbf{x}(\xi,t)$, получим формулу

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\left(\xi,t\right),t\right)=G\iiint\limits_{\Omega_t}\rho\left(\mathbf{x}',t\right)\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}\left(\xi,t\right)}{\left|\mathbf{x}\left(\xi,t\right)-\mathbf{x}'\right|^3}d\mathbf{x}'.$$

Применяя теорему о замене переменной в кратном интеграле и, заменяя $\mathbf{x}'=\mathbf{x}\left(\eta,t\right)$ в предыдущем равенстве, получим

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\left(\xi,t\right),t\right)=G\iiint\limits_{\Omega_0}\rho\left(\mathbf{x}\left(\eta,t\right),t\right)\frac{\mathbf{x}\left(\eta,t\right)-\mathbf{x}\left(\xi,t\right)}{\left|\mathbf{x}\left(\xi,t\right)-\mathbf{x}\left(\eta,t\right)\right|^3}J\left(\eta,t\right)d\eta, \tag{2.17}$$

где $J(\eta,t)=\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(\xi',\eta',\zeta')}$ — якобиан преобразования (2.11) для $\eta=\{\xi', \eta',\zeta'\}\in\Omega_0$.

На основании (2.14) равенство (2.17) в форме Лагранжа примет вид:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t),t)=G\iiint\limits_{\Omega_0}\rho_0\left(\eta\right)\frac{\mathbf{x}\left(\eta,t\right)-\mathbf{x}\left(\xi,t\right)}{\left|\mathbf{x}\left(\xi,t\right)-\mathbf{x}\left(\eta,t\right)\right|^3}d\eta. \tag{2.18}$$

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=\{p(\mathbf{x},t),\ q(\mathbf{x},t),\ r(\mathbf{x},t)\}=\frac{m}{l}\nabla_{\mathbf{x}}\sigma^l(\mathbf{x},t) \tag{2.19}$$

и тогда система (2.6), с учетом (2.13), (2.18)–(2.19) в лагранжевых координатах примет следующий вид

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial^2\mathbf{x}(\xi,t)}{\partial t^2}=-\mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi,t),t)+\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t),t),\\&\widetilde{\sigma}(\xi,t)J^{\frac{1}{m}}(\xi,t)=\sigma_0(\xi).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение:

Лемма 1. *Для того чтобы гладкое отображение* (2.10) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ *определяло с помощью равенства* (2.8) $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *и уравнения неразрывности решение системы* (2.6), *описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа, необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло системе уравнений* (2.20), *а также следующим начально-краевым условиям:*

$$\begin{gathered}\mathbf{x}(\xi,0)=\xi, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(\xi,t)}{\partial t}|_{t=0}=\mathbf{u_0}(\xi), \quad J(\xi,0)=1, \quad \widetilde{\sigma}(\xi,0)=\sigma_0(\xi), \\ \textit{для } \forall\xi\in\Omega_0, \quad \widetilde{\sigma}(\xi,t)=0 \quad \textit{при} \quad \xi\in\Gamma_0 \quad \textit{и} \quad t\geq 0.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Функции $\mathbf{u_0}(\xi)$, $\sigma_0(\xi)$ *задаются в пространстве* $C^\infty(\overline{\Omega}_0)$ – *бесконечно-дифференцируемых функций в области* $\overline{\Omega}_0$, *замкнутая граница* Γ_0 *принадлежит классу* C^∞ — *бесконечно-дифференцируемых функций.*

Доказательство. Данное утверждение является аналогом леммы, рассмотренной в фундаментальной работе Л. В. Овсянникова, определившей важнейшие направления исследований движений идеальной жидкости со свободными границами [9]. Автором в статье [14] доказана аналогичная лемма для случая движения конечной массы самогравитирующего газа и, может, без существенных дополнений применима для доказательства сформулированного выше утверждения. □

Задача Коши для системы (2.20) состоит в отыскании решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ и $\sigma = \widetilde{\sigma}(\xi, t)$, удовлетворяющего начально-краевым условиям (2.21). Решение данной задачи Коши для системы (2.20) равносильно решению интегро-дифференциальной системы с интегральным векторным уравнением для вектор-функции $\mathbf{x}(\xi, t)$ типа Вольтерра и сохранением уравнения неразрывности в прежнем виде.

Таким образом, система (2.20) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}(\xi,t)=\xi+\mathbf{u_0}(\xi)t+\int_0^t(t-\tau)\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,\tau),\tau)-\mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi,\tau),\tau)\right)d\tau, \\ \widetilde{\sigma}(\xi,t)J^{\frac{1}{m}}(\xi,t)=\sigma_0(\xi).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Для системы сохраняются начально-краевые условия (2.21) и задаются дополнительные условия для $\forall\xi\in\Omega_0$:

$$\max\begin{pmatrix}\sup|\xi|, \ \sup|u_0(\xi)|, \ \sup|\sigma_0^m(\xi)|=\sup|\rho_0(\xi)|, \\ \sup\frac{m}{l}|\nabla_\xi\sigma^l(\xi)|, \ \sup|G\iiint\limits_{\Omega_0}\rho_0(\eta)\frac{\eta-\xi}{|\xi-\eta|^3}d\eta|\end{pmatrix}=A_0<\infty. \tag{2.23}$$

Эквивалентность систем уравнений (2.20) и (2.22) легко проверяется дифференцированием и 2-кратным интегрированием.

3. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для интегрального уравнения типа Вольтерра

В данном разделе доказывается теорема о локальной по времени разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальной системы (2.22) в пространстве $C_2^\infty(Q_T)$, где Q_T — цилиндрическая область $Q_T = \bar{\Omega}_0 \times [0, T]$. Пространство $C_2^\infty(Q_T)$ есть множество непрерывных бесконечно дифференцируемых функций по переменным ξ и непрерывным производным до второго порядка включительно по $t \in [0, T]$.

После приведенного определения перейдем к доказательству теоремы существования и единственности.

Теорема 1. *Задача Коши для интегро-дифференциальной системы уравнений* (2.22) *имеет единственное решение* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, $\sigma(\xi, t)$, *принадлежащее пространству* $C_2^\infty(Q_t)$ *в области* $Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0, t_1]$, *определенное на конечном интервале времени* $t \in [0, t_1]$ *и удовлетворяющее начально-краевым условиям* (2.21), (2.23).

Доказательство. Применяя метод последовательных приближений [3], [10], построим первое приближение, полагая в (2.22)

$$\mathbf{x_0}(\xi, t) = \xi,\ \mathbf{x_0}(\eta, t) = \eta = \{\xi', \eta', \zeta'\},$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1}(\xi, t) &= \xi_\mathbf{0} + \mathbf{u_0}(\xi)t + \textstyle\int_0^t (t-\tau)\cdot(\mathbf{F_0}(\xi) - \mathbf{P_0}(\xi))\, d\tau = \\ &= \xi_\mathbf{0} + \mathbf{u_0}(\xi)t + (\mathbf{F_0}(\xi) - \mathbf{P_0}(\xi))\,\tfrac{t^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{F_0}(\xi)$ получена с помощью равенства (2.18), а функция $\mathbf{P_0}(\xi) = \frac{m}{l}\nabla_\xi \sigma_0^l(\xi)$ на основании (2.16) и (2.19). Первая итерация уравнения неразрывности (2.22) обращается в тождество с применением (2.16) и при условии, что якобиан J при $\mathbf{x} = \xi$ равен 1, т. е. получим $\sigma(\xi, t) = \sigma_0(\xi)$, с учетом положительности σ и σ_0.

Продолжим построение последовательности функции, получим для $n+1$-й, $n \in N$, итерации:

$$\begin{gathered} \mathbf{x_{n+1}}(\xi, t) = \xi + \mathbf{u_0}(\xi)t + G\textstyle\int_0^t (t-\tau)\,(\mathbf{F}(\mathbf{x_n}(\xi,\tau),\tau) - \mathbf{P}(\mathbf{x_n}(\xi,\tau),\tau))\, d\tau, \\ \sigma(\mathbf{x_n}(\xi,t),t) J_n^{\frac{1}{m}}(\xi,t) = \sigma_0(\xi). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Докажем методом математической индукции непрерывность функций $\mathbf{x_n}(\xi, t)$, $\sigma_n = \sigma(\mathbf{x_n}(\xi, t), t)$ и принадлежность пространству $C_2^\infty(Q_t)$. Для $\mathbf{x_0}$ и $\mathbf{x_1}$ это следует из начальных условий (2.21), (2.23), на основании теорем о дифференцируемости ньютоновского потенциала [4]– [11] и функции $P_0(\xi)$.

Пусть $\mathbf{x_n}(\xi,t)$ и $\sigma(\mathbf{x_n}(\xi,t),t) \in C_2^\infty(Q_t)$ области $Q_t = \bar\Omega_0 \times [0,t_1]$, причем время t_1 в дальнейшем будет определено.

Докажем справедливость утверждения для $\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t)$. Итерации $\mathbf{x_n}(\xi,t)$ задают последовательность отображений $\Omega_0 \cup \Gamma_0$ в области $\Omega_n \cup \Gamma_n$ для $n \in N$ где N — множество натуральных чисел. Функции $\mathbf{x_n}(\xi,t)$ с $J(\xi,t) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right)$ отличным от нуля определяют непрерывно дифференцируемое обратное отображение $\Omega_n \cup \Gamma_n \to \Omega_0 \cup \Gamma_0$ с помощью функций

$$\xi = \mathbf{x_n^{-1}}(\mathbf{x_n},t) \text{ и } \eta = \mathbf{x_n^{-1}}(\mathbf{x'_n},t), \tag{3.3}$$

где точки $\mathbf{x_n} \in \Omega_n \cup \Gamma_n$ и $\mathbf{x'_n} \in \Omega_n \cup \Gamma_n$.

Преобразуем функцию $\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi,t\right),t\right)$ следующим образом.

Пусть дан интеграл

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi,t\right),t\right) = G \iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0\left(\eta\right) \frac{\mathbf{x_n}\left(\eta,t\right) - \mathbf{x_n}\left(\xi,t\right)}{\left|\mathbf{x_n}\left(\xi,t\right) - \mathbf{x_n}\left(\eta,t\right)\right|^3} d\eta,$$

после подстановки в этот интеграл преобразования (3.3), используя тождество $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x^{-1}}(x,t),t)$, получим

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n},t\right) = G \iiint\limits_{\Omega_n} \rho_0\left(\mathbf{x_n}^{-\mathbf{1}}\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right)\right) J^{-1}\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right) \frac{\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'} - \mathbf{x_n}}{\left|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}_\mathbf{n}^{'}\right|^3} d\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'}.$$

На основании уравнения неразрывности (2.16) справедливо равенство

$$\rho\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right) = \sigma^m(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t) = \rho_0\left(\mathbf{x_n}^{-\mathbf{1}}\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right)\right) J^{-1}\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right), \tag{3.4}$$

где

$$J^{-1}\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right) = \frac{\partial\left(\xi^{'},\eta^{'},\zeta^{'}\right)}{\partial\left(\mathbf{x'_n},\mathbf{y'_n},\mathbf{z'_n}\right)}$$

— якобиан обратного преобразования, и тогда сила притяжения $\mathbf{F}$ примет классический вид, определенная для области Ω_n

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n},t\right) = G \iiint\limits_{\Omega_n} \rho\left(\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'},t\right) \frac{\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'} - \mathbf{x_n}}{\left|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}_\mathbf{n}^{'}\right|^3} d\mathbf{x}_\mathbf{n}^{'} \tag{3.5}$$

для $n \in N$.

На основании теорем о непрерывности, дифференцируемости потенциала $\Phi(\mathbf{x_n},t)$, существования несобственного интеграла, зависящего от параметров ξ, η, ζ, t [4], [11], теорем о непрерывности, дифференцируемости сложной и обратной функций [7] следует существование производных любого порядка для функции (3.5) по ξ как сложной функции. Из предположения, что $\rho\left(\mathbf{x_n},(t)\right) = \sigma^m(\mathbf{x_n},t) \in C_2^\infty$ в области независимых переменных $Q_t = \overline{\Omega}_0 \times [0, t_1]$, а также граница Γ_n области Ω_n, уравнение которой можно взять функцию $\rho\left(\mathbf{x_n}, t\right) = 0$, принадлежащую пространству C_2^{∞}, приводит к окончательному выводу, что вектор-функция $\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}, t\right) \in C_0^{\infty}$ в области $Q_t = \overline{\Omega}_0 \times [0, t_1]$.

Рассмотрим функцию $\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi, t\right), t\right)$. Так как

$$\sigma_0(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbf{\Omega_0}),\ J(\xi, t) \in C_2^{\infty}(Q_t),$$

то из равенства (2.16) и предположения, что $\mathbf{x_n}(\xi, t) \in C_2^{\infty}$, следует, что $\sigma(\mathbf{x_n}, t) \in C_2^{\infty}(Q_t)$. Из равенства (2.16) и формулы преобразования градиента при переходе от эйлеровой к лагранжевой форме [1] получим равенство:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi, t\right), t\right) = \frac{m}{l} \nabla_x \sigma^l(\mathbf{x}, t)|_{x = x_n(\xi, t)} = \frac{m}{l}\left(M^*(\xi, t)^{-1} \nabla_\xi \sigma^l\left(\mathbf{x_n}(\xi, t), t\right)\right), \tag{3.6}$$

где M^* — транспонированная матрица Якоби $\frac{\partial \mathbf{x_n}}{\partial \xi}$. Из равенства (3.6) следует, что $\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi, t\right), t\right) \in C_2^{\infty}(Q_t)$.

На основании индуктивного предположения, что $\mathbf{x_n} = \mathbf{x_n}(\xi, t) \in C_2^{\infty}\left(\overline{\Omega}_0\right)$, принадлежности $\mathbf{u_0}(\xi) \in C_0^{\infty}\left(\overline{\Omega}_0\right)$, $\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi, t\right), t\right) \in C_0^{\infty}(Q_t)$, $\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}\left(\xi, t\right), t\right) \in C_2^{\infty}(Q_t)$ следует, что $\mathbf{x_{n+1}}(\xi, t) \in C_2^{\infty}$ в области $Q_t = \overline{\Omega}_0 \times [0, t_1]$.

Таким образом доказано, что функции $\mathbf{x_n}(\xi, t)$, $\sigma(\mathbf{x_n}(\xi, t), t)$ принадлежат пространству $C_2^{\infty}(Q_t)$ при $n \in N$.

Из равенства (2.12) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{x_n}(\xi, t)}{\partial t} = \mathbf{v_n}(\xi, t) = \mathbf{v_n}\left(\mathbf{x_n}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{x}, t), t\right) = \mathbf{u_n}(\mathbf{x}, t)$$

и функции $\mathbf{v_n}(\xi, t)$ и $\mathbf{u_n}(\mathbf{x}, t)$ принадлежат пространству $C_1^{\infty}(Q_t)$.

Из непрерывности функций $\mathbf{x_n}(\xi, t)$ и $\sigma(\mathbf{x_n}(\xi, t), t)$ в замкнутой ограниченной области $Q_t = \overline{\Omega}_0 \times [0, t_1]$ следует их ограниченность. Из начальных условий имеем:

$$|\xi| < A_0 < \infty,\ |\mathbf{x_1}(\xi, t)| < A_0(1 + t + t^2) < A_1 < \infty \text{ при } t \in [0, t_1].$$

И далее, для $\forall n \in N$ существует A_n, что $|\mathbf{x_n}(\xi, t)| < A_n < \infty$. Отсюда следует

$$|\mathbf{x_n}(\xi, t)| < \sup\{A_n\} = A < \infty \text{ для } \forall n \in N, \text{ в области } Q_t.$$

Аналогично из равенства (2.20) получим оценки:

$$|\sigma_0(\xi)| < A_0 < \infty,\ |\sigma(\mathbf{x_1}(\xi, t), t)| < A_0 B_1 < \infty,$$

где постоянное число $B_1 > |J_1^{-\frac{1}{m}}(\xi, t)|$.

Продолжая, для произвольного $n \in N$ будем иметь оценку

$$|\sigma(\mathbf{x_n}(\xi, t), t)| < A_0 B_n < \infty.$$

Окончательно, для $\forall n \in N$

$$|\sigma(\mathbf{x_n}(\xi,t),t)| < \sup\{AB_n\} = AB < \infty, \text{ в области } Q_t.$$

Рассмотрим и оценим разность $|\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t) - \mathbf{x_n}(\xi,t)|$ для $n \in N$. Из векторного уравнения (3.1) следует

$$|\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t) - \mathbf{x_n}(\xi,t)| = \left|\int_0^t (t-\tau)\left[\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}(\xi,\tau),\tau\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,\tau),\tau\right)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}(\xi,\tau),\tau\right) - \mathbf{P}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,\tau),\tau\right)\right)\right] d\tau\right|. \tag{3.7}$$

Для произвольной точки $(\xi,t) \in Q_t$ разность функций в подынтегральном выражении (3.7) запишем с применением леммы Адамара [5], [15] для разности $\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}(\xi,t),t\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right)$ в виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}(\xi,t),t\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right) = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dr}\mathbf{F}\left(r\mathbf{x_n}(\xi,t) + (1-r)\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right) dr = \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}'\left(\mathbf{X_n},t\right) dr \cdot \left(\mathbf{x_n}(\xi,t) - \mathbf{x_{n-1}}(\xi,t)\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\mathbf{X_n} = r\mathbf{x_n} + (1-r)\mathbf{x_{n-1}}$, определена в области $\overline{\Omega}_0 \times [0,t_1]$ и ограничена

$$\sup\{\mathbf{X_n}\} = \sup\{r\mathbf{x_n} + (1-r)\mathbf{x_{n-1}}\} \leqslant 2A, \text{ для } \forall n \in N. \tag{3.9}$$

В матричной форме разность примет вид:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n},t\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}},t\right) = \Phi_{1n}(\xi,t) \cdot \left(\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}\right).$$

Производные элементов матрицы $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X_n}}$ ограничены в замкнутой области Q_t постоянной величиной M_{1n}, то, применяя оценку к матрице $\Phi_{1n}(\xi,t)$ [5], получим неравенство

$$|\Phi_{1n}(\xi,t)| \leq 3M_{1n} < \infty,$$

которое справедливо для $\forall n \in N$ и поэтому существует

$$\sup\{3M_{1n}\} = 3M_1 < \infty. \tag{3.10}$$

Рассмотрим разность $\mathbf{P}\left(\mathbf{x_n}(\xi,t),t\right) - \mathbf{P}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right)$.

Из уравнения неразрывности системы (3.2) для $\sigma(\mathbf{x_n}(\xi,t),t)$, равенства (3.6) для $P(\mathbf{x_n},t)$ и зависимость этой функций в конечном итоге от $\sigma_0(\xi)$ и $\mathbf{x_n}(\xi,t)$ определим оценки для разности вектор-функций $\sigma(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t)$, аналогично полученным результатам (3.9)–(3.10) в матричной форме

$$P(\mathbf{x_n},t) - P(\mathbf{x_{n-1}},t) = \Phi_{2n}(\xi,t)\left(\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}\right), \tag{3.11}$$

Производные элементов матрицы $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{X_n}}$ ограничены в замкнутой области Q_t величиной M_{2n} и применяя оценку к матрице $\Phi_{2n}(\xi, t)$, аналогичную (3.10), получим $|\Phi_{2n}(\xi, t)| \leqslant 3M_{2n} < \infty$. Множество положительных чисел $\{3M_{2n}\}$ является ограниченным для $n \in N$, поэтому существует

$$\sup\{3M_{2n}\} = 3M_2 < \infty. \tag{3.12}$$

Из равенств (3.7)–(3.12) следует, что

$$|\mathbf{x_{n+1}}(\xi, t) - \mathbf{x_n}(\xi, t)| \leqslant 3M_1 \int_0^t (t-\tau)|\mathbf{x_n}(\xi, \tau) - \mathbf{x_{n-1}}(\xi, t)| d\tau +$$

$$+3M_2 \int_0^t (t-\tau)|\mathbf{x_n}(\xi, \tau)\tau - \mathbf{x_{n-1}}(\xi, \tau)\tau| d\tau.$$

Последнее неравенство, справедливое для $n \in N$, имеет место для любых $(\xi, t) \in Q_t$, поэтому его можно переписать так:

$$\max|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}| \leq 6M \int_0^t (t-\tau) \max|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}| d\tau \leq$$

$$\leq 6M \max|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}| \frac{t^2}{2} = 3M \cdot \max|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}| t^2,$$

где $M = \max(M_1, M_2)$. Выбирая $0 < t < \sqrt{\frac{1}{3M}} = T$, и, при $t_1 \in (0, T)$, обозначив $3Mt^2 = q$, при $t = t_1$, получим неравенство

$$\max|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}| \leq q \max|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}|, \quad q < 1,$$

справедливое для $n \in N$. Полученное рекуррентное неравенство можно продолжить, последовательно преобразуя правые части от n, $n-1$, $n-2$, ..., 1, в результате получим неравенство

$$\max|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}| \leq q^n \max|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}|. \tag{3.13}$$

Продолжив преобразование неравенства (3.13) с учетом (3.1) и условия $\mathbf{x_0} = \xi$, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\max|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}| \leq q^n \max\left|\mathbf{u_0}(\xi)t + (\mathbf{F_0}(\xi) - \mathbf{P_0}(\xi))\,\tfrac{t^2}{2}\right| \leq \\ &\leq q^n A\left(t + t^2\right) \leq Cq^n \text{ при } C = A\left(t + t^2\right)\Big|_{t=t_1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Неравенства (3.13), (3.14) справедливы для $n \in N$, приводят к утверждению об абсолютной и равномерной сходимости ряда, относительно $\xi \in \overline{\Omega}_0$ и $t \in [0, t_1]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}) < \infty,$$

а значит, равномерную сходимость последовательности $\{\mathbf{x_n}(\xi,t)\}$:

$$\mathbf{x_n}(\xi,t)=\xi+\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{x_k}(\xi,t)-\mathbf{x_{k-1}}(\xi,t)) \tag{3.15}$$

к некоторой функции $\mathbf{x}(\xi,t)$, которая принадлежит пространству C_2^∞ в области $Q_t=\overline{\Omega}_0\times[0,t_1]$.

Предельный переход при $n\longrightarrow\infty$ в равенствах (3.1), (3.2) и (3.6) дает соотношение (2.22). Отсюда следует принадлежность $\mathbf{x}(\xi,t)$ и $\sigma(\xi,t)$ пространству C_2^∞ и обращение в тождество векторного уравнения и уравнения неразрывности в лагранжевой форме системы (2.20).

Используем полученные результаты для оценки верхней границы решения $\mathbf{x}(\xi,t)$ в области $\overline{\Omega}_0\times[0,t_1)$. Рассмотрим неравенство (3.15), которое с учетом (3.13) примет вид

$$|\mathbf{x_n}(\xi,t)|\le \max|\xi|+\max|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}|\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}.$$

Переходя к пределу при $n\longrightarrow\infty$, при $0<q<1$, получим

$$|\mathbf{x}(\xi,t)|\le \max|\xi|+\max|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}|\frac{1}{1-q}$$

и после подстановки в это неравенство (3.1) $q=3Mt^2$ получим для $t\in[0,t_1]$ оценку решения $\mathbf{x}(\xi,t)$:

$$|\mathbf{x}(\xi,t)|\le\max|\xi|+\left(\max|\mathbf{u_0}(\xi)t|+(\max|\mathbf{F_0}(\xi)|+\max|\mathbf{P_0}(\xi)|)\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{1-3Mt^2}.$$

Выше была определена ограниченность функции $|\mathbf{x_n}(\xi,t)|<A$, для $n\in N$, и после предела при $n\to\infty$ эта оценка уточняется последним неравенством при $(\xi,t)\in Q_t=\overline{\Omega}_0\times[0,t_1]$.

Доказательство единственности решения.

Допустим, что $\mathbf{y}(\xi,t)$ является другим решением интегрального уравнения (2.22) и составим разность двух решений:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)|&=\\ &=\left|\int_0^t(t-\tau)\left[(\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,\tau),\tau)-\mathbf{F}(\mathbf{y}(\xi,\tau),\tau))\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-(\mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi,\tau),\tau)-\mathbf{P}(\mathbf{y}(\xi,\tau),\tau))\right]d\tau\right|.\end{aligned}$$

Используя лемму Адамара, теорему о среднем для определенного интеграла [7] и полученные преобразования (3.9)–(3.12), заменив в них $\mathbf{x_n}$ и $\mathbf{x_{n-1}}$ на $\mathbf{x}(\xi,t)$ и $\mathbf{y}(\xi,t)$, получим

$$|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)|\le 6M\int_0^t(t-\tau)|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)|d\tau$$

или

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 6MT_1 \int_0^t |\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\tau. \tag{3.16}$$

Согласно неравенству Гронуолла в интегральной форме [16] для $\xi \in \overline{\Omega}_0, \;\; t \in [0, t_1]$ из (3.16) следует $|\mathbf{x}(\xi, t) - \mathbf{y}(\xi, t)| = 0$, т.е. $\mathbf{x}(\xi, t) = \mathbf{y}(\xi, t)$.

Таким образом, не существует другой функции $\mathbf{y}(\xi, t)$, отличной от $\mathbf{x}(\xi, t)$ и удовлетворяющей векторному уравнению системы (2.22), начально-краевым условиям (2.21) и условиям (2.23). Как следствие полученного утверждения следует единственность функции

$$\widetilde{\sigma}(\xi, t) = \sigma(\mathbf{x}(\xi, t), t).$$

Доказательство теоремы завершено. □

4. Заключение

В настоящей работе получены точные трехмерные аналитические решения задачи Коши для нелинейной интегро-дифференциальной системы газовой динамики, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа со свободной границей в вакууме.

Наряду с теоретическим значением разработки методов решения интегро-дифференциальных уравнений, предложенных в данной работе, полученные результаты являются определенным вкладом в изучение закономерностей движения газа для ряда астрофизических и космогонических задач.

Рассмотрение системы газовой динамики в форме Лагранжа, затем преобразование её в эквивалентную систему интегральных уравнений типа Вольтерра, позволило определить отображение области Ω_0 в область движущегося газа $\Omega_t \in R^4$, в момент времени t. Свободная граница является также образом точек решения системы интегральных уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ при отображении $\xi \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Тем самым задача по определению закона движения свободной границы является также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$. Применяя первые итерации метода последователь-ных приближений можно определить приближенно некоторые закономерности движения свободной границы газового облака.

Разработанный метод применим для дальнейших исследований как перспективное направление в развитии теории интегро-дифференциальных систем общего вида, описывающих движение сред во внутреннем поле тяжести.

Список литературы

1. Андреев В. К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск : Наука, 1992. 136 с.
2. Богоявленский О. И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида // ПММ. 1976. № 40. С. 270-280.
3. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М. : Физматлит, 2002. 160 с.
4. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М. : Гостехиздат, 1953. 415 с.
5. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 228 с.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М. : ОГИЗ, 1947. 929 с.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М. : Наука, 1983. 448 с.
8. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
9. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1967. 75 с.
10. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. М. ; Л., 1936. 125 с.
11. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М. : ОГИЗ, 1946. 318 с.
12. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М. : Наука, 1971. 875 с.
13. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М. : Мир, 1973. 228 с.
14. Чуев Н. П. О существовании и единственности решения задачи Коши для системы интегральных уравнений, описывающей движение разреженной массы самогравитирующего газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 663-672. https://doi.org/10.1134/S0965542520040077
15. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
16. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск, 2003. 562 с.

Николай Павлович Чуев, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра естественнонаучных дисциплин, Уральский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация, 620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66, тел.: (343)2212444, email: n_chuev44@mail.ru.

Поступила в редакцию 29.05.2020

The Cauchy Problem for System of Volterra Integral Equations Describing the Motion of a Finite Mass of a Self-gravitating Gas

N. P. Chuev

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russian Federation

Abstract. In this article we investigate the Cauchy problem for a system of nonlinear integro-differential equations of gas dynamics that describes the motion of a finite mass of a self-gravitating gas bounded by a free boundary. It is assumed that gas moving is considered under the condition that at any time the free boundary consists of the same particles. This makes convenient the transition from Euler to Lagrangian coordinates. Initially, this system in Euler coordinates is transformed into a system of integro-differential equations in Lagrangian coordinates. A lemma on equivalence of these systems is proved. Then the system in Lagrange variables is transformed into a system consisting of Volterra integral equations and the equation continuity, for which the existence theorem for the solution of the Cauchy problem is proved with the help of the method of successive approximations. Based on the mathematical induction, the continuity of the solution and belonging of the solution to the space of infinitely differentiable functions are proved. The boundedness and the uniqueness of the solution are proved. The solution of a system of Volterra integral equations defines the mapping of the initial domain into the domain of moving gas, and also sets the law of motion of a free boundary, as a mapping of points of an initial boundary.

Keywords: Cauchy problem, self-gravitating gas, Lagrangian coordinates, system of nonlinear integro - differential equations, method of successive approximations.

References

1. Andreev V.K. *Ustoychivost' neustanovivshikhsya dvizheniy zhidkosti so svobodnoy granitsey* [Stability of unsteady fluid motions with a free boundary]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 136 p. (in Russian)
2. Bogoiavlenskii O.I. Dynamics of a gravitating gaseous ellipsoid. *J. Appl Math. Mech.*, 1976, no. 40, pp. 246-256.
3. Vasilieva A.B., Tikhonov N.A. *Integral'nye uravneniya* [Integral equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 160 p. (in Russian)
4. Gunter N.M. *Teoriya potentsiala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* [Potential theory and its application to the basic problems of mathematical physics]. Moscow, Gostehizdat Publ., 1953, 415 p. (in Russian)
5. Kartashev A.P., Rozhdestvenskii B.L. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya i osnovy variatsionnogo ischisleniya* [Ordinary differential equations and fundamentals of the calculus of variations]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 228 p. (in Russian)
6. Lamb H. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, OGIZ Publ., 1947, 929 p.(in Russian)
7. Nikolsky S.M. *Kurs matematicheskogo analiza, T. II* [A Course in Mathematical Analysis, vol. II.] Moscow, Nauka Publ., 1983, 448 p. (in Russian)
8. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki* [Lectures on the basics of gas dynamics]. Moscow-Izhevsk, Institut kompyuternih issledovanii Publ., 2003, 336 p. (in Russian)
9. Ovsyannikov L.V. *Obshchie uravneniya i primery. Zadacha o neustanovivshemsya dvizhenii zhidkosti so svobodnoy granitsey* [General equations and examples]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967, 75 p. (in Russian)
10. Smirnov N.S. *Vvedenie v teoriyu nelineynykh integral'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of nonlinear integral equations]. Moscow, Leningrad, 1936, 125 p. (in Russian)
11. Sretensky L.N. *Teoriya n'yutonovskogo potentsiala* [Theory of Newtonian potential]. Moscow, OGIZ Publ., 1946, 318 p. (in Russian)

12. Stanyukovich K.P. *Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoy sredy* [Unsteady motion of continuum media]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 875 p. (in Russian)
13. Chandrasekhar S. *Ellipsoidal'nye figury ravnovesiya* [Ellipsoidal figures of equilibrium] Moscow, Mir Publ., 1973, 228 p.
14. Chuev N.P. On the existence and uniqueness of a solution to a problem Cauchy for a system of integral equations describing the motion of a rarefied mass of a self-gravitating gas. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 4, pp. 663-672. https://doi.org/10.1134/S0965542520040077
15. Hartman F. *Ordinary Differential Equations.* Moscow, Mir Publ., 1970, 720 p. (in Russian)
16. Evans L.C. *Partial differential equations.* Novosibirsk, 2003, 562 p. (in Russian)

Nikolai Chuev, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Ural State University of Railway Transport, 66, Kolmogorov st., Yekaterinburg, 620034, Russian Federation, tel.: (343)2212444, email: n_chuev44@mail.ru.

Received 29.05.2020