ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Серия «Математика»
2020. Т. 33. С. 3—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.6
MSC 65D15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.33.3

Чебышевские приближения и аппроксимация методом наименьших квадратов *

В. И. Зоркальцев[1], Е. В. Губий[2]

[1] *Лимнологический институт СО РАН, Иркутск, Российская Федерация,*
[2] *Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается проблема линейной аппроксимации в виде задачи минимизации взвешенной чебышевской нормы и в виде задачи минимизации взвешенной евклидовой нормы вектора невязок. Приводится алгоритм однозначного вычисления во всех случаях чебышевской аппроксимации, не нуждающейся в условии Хаара. Доказана теорема о том, что любую аппроксимацию методом наименьших квадратов (при любом наборе положительных весовых коэффициентов в минимизируемой евклидовой норме) можно представить как чебышевское приближение за счет выбора весовых коэффициентов в чебышевской норме. В качестве примера рассматривается аппроксимация приведенных затрат топливоснабжения населенного пункта на основе энергетической плантации в виде квадратичной зависимости от объемов средств резервирования.

Ключевые слова: чебышевское приближение, условие Хаара, метод наименьших квадратов, надежность топливоснабжения от энергетических плантаций.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-07-00322), в рамках проекта РАН № 0279-2019-0003.

1. Задача линейной аппроксимации

Заданы значения g_{ij} факторов $j = 1, ..., m$ в наблюдениях $i = 1, ..., n$ при некоторых натуральных n и m. Величины g_{ij} образуют матрицу G размера $n \times m$. Задан вектор d из R^n значений результирующего показателя в наблюдениях $j = 1, ..., n$. Рассматривается проблема поиска вектора коэффициентов линейной аппроксимации y из R^m, при котором минимальны абсолютные величины компонент вектора невязок

$$x = Gy - d. \tag{1.1}$$

Здесь вектор Gy является линейной аппроксимацией вектора d.

Введем линейное многообразие возможных значений вектора невязок

$$L = \{x = Gy - d : \; y \in R^m\}.$$

Далее будем считать, что матрица G состоит из линейно независимых векторов-столбцов,

$$\operatorname{rank} G = m. \tag{1.2}$$

Тогда каждому значению $x \in L$ соответствует единственный вектор $y \in R^m$, при котором выполняется (1.1). Такой вектор y для данного $x \in L$ обозначим $\widetilde{y}(x)$.

Множество векторов линейного многообразия с парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Возможны различные способы конкретизации рассматриваемой проблемы линейной аппроксимации. В качестве наиболее общей конкретизации может рассматриваться поиск парето-оптимальных решений многокритериальной задачи минимизации абсолютных значений всех компонент вектора невязок. Множество парето-оптимальных векторов невязок для такой многокритериальной задачи обозначим

$$Q = \left\{ x \in L : \; \neg\exists\, z \in L, \sum_{j=1}^{n} |z_j| < \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \; |z_j| \le |x_j|, \; j = 1, ..., n \right\}.$$

В [6] было доказано, что множество Q не пусто, если L не пусто, является замкнутым, связным, возможно, невыпуклым, ограниченным, объединением конечного числа политопов (выпуклых оболочек конечных наборов векторов). Эти свойства переносятся на множество значений вектора $\widetilde{y}(x)$ при x, находящимся в Q. Обозначим это множество

$$Y = \{\widetilde{y}(x) : \; x \in Q\}.$$

Множество Y является замкнутым, связным, ограниченным, объединением конечного числа политопов, возможно, невыпуклым.

Метод наименьших квадратов. Рассматриваемую проблему можно формулировать в виде задачи минимизации штрафной функции $f(x)$, соизмеряющей отклонения от нуля компонент вектора x:

$$f(x) \to \min_{x \in L}. \tag{1.3}$$

В [6] рассматривалось множество дифференцируемых штрафных функций, каждая из которых в результате некоторого дифференцируемого возрастающего преобразования может переходить в строго выпуклую функцию, частные производные которых $\nabla_j f(x)$ удовлетворяют при всех $x \in R^n$ условию

$$\mathrm{sign} \nabla_j f(x) = \mathrm{sign}\, x_j, \ j = 1, ..., n,$$

где sign α — функция от вещественного α, принимающая значения -1, 0 или 1 при $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ или $\alpha > 0$. Множество функций, обладающих указанными двумя свойствами, обозначим F. Для любой функции f из F задача (1.3) имеет и единственное решение [6], которое обозначим $x(f)$. Этому решению соответствует единственное значение вектора y, которое обозначим

$$y(f) = \widetilde{y}(x(f)).$$

В частности, множеству F принадлежит евклидова норма

$$f_h^2(x) = \Big(\sum_{j=1}^{n} (h_j x_j)^2 \Big)^{1/2},$$

где h_j — заданные положительные весовые коэффициенты евклидовой нормы, составляющие вектор $h \in R_+^n$. Здесь R_+^n — множество векторов R^n со всеми положительными компонентами. Вместо функции f_h^2 в задаче (1.3) можно с тем же результатом использовать строго выпуклую функцию

$$\varphi_h^2(x) = \sum_{j=1}^{n} (h_j x_j)^2,$$

полученную возрастающим дифференцируемым преобразованием (возведения в квадрат) функции f_h^2. Справедливы равенства

$$x(\varphi_h^2) = x(f_h^2), \quad y(\varphi_h^2) = y(f_h^2).$$

Использование функций φ_h^2 или f_h^2 в задаче (1.3) означает, что осуществляется линейная аппроксимация методом наименьших квадратов.

Для того чтобы вектор x из R^n был решением задачи (1.3) с целевой функцией f_h^2 или φ_h^2 необходимо и достаточно, чтобы этот вектор находился в L и производная в точке x целевой функции по любому направлению из линейного подпространства, параллельного L, была равна нулю. Введем обозначение этого подпространства. Пусть

$$S = \{s = Gy: \ y \in R^m\}.$$

При любом $s \in S$ для решения задачи (1.3) методом наименьших квадратов должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{n} h_j x_j s_j = 0. \tag{1.4}$$

Введем множество оптимальных значений вектора невязок и вектора коэффициентов линейной регрессии при различных положительных весовых коэффициентах в евклидовой норме:

$$P_2 = \left\{x(f_h^2): \ h \in R_+^n\right\}, H_2 = \left\{y(f_h^2): \ h \in R_+^n\right\}.$$

Как доказано в [6], множество P_2 является связным, возможно, незамкнутым. При этом

$$P_2 \subseteq Q, \ \mathrm{cl}\, P_2 = Q. \tag{1.5}$$

где cl — замыкание множества. Доказано также, что P_2 совпадает с множеством точек минимума в задаче (1.3) с различными целевыми функциями $f \in F$:

$$P_2 = \{x(f): \ f \in F\}.$$

Эти свойства переносятся на множество H_2. Множество H_2 связное, возможно, незамкнутое. При этом

$$H_2 \subseteq Y, \ \mathrm{cl}\, H_2 = \mathrm{cl}\, Y. \tag{1.6}$$

Чебышевская аппроксимация. В качестве целевой функции задачи (1.3) может использоваться чебышевская норма

$$f_h^{\infty}(x) = \max_{j=1,\dots,n} h_j |x_j|,$$

где h_j — заданные весовые коэффициенты, образующие вектор $h \in R_+^n$. В таком случае поиск вектора x из решения задачи (1.3) и соответствующего ему вектора $y = \widetilde{y}(x)$ является задачей чебышевской линейной аппроксимации или, как синоним, чебышевским линейным приближением.

Функция f_h^{∞} не дифференцируемая. Ее использование в (1.3) может приводить к неоднозначному решению. Причем среди решений задачи (1.3) с такой целевой функцией могут оказаться векторы x, неудовлетворительные по содержательным соображениям, не находящиеся в Q [5]. При этом соответствующие таким x значения вектора $y(x)$ не будут находиться в Y.

Условие Хаара. В целях преодоления таких недостатков чебышевской аппроксимации используется условие Хаара [7; 8; 15], которое для рассматриваемой задачи линейной аппроксимации можно представить в виде следующих двух равносильных предположений.

1. Любые m строк матрицы G должны быть линейно независимыми.
2. Матрица G должна быть такой, чтобы при любом векторе весовых коэффициентов $h \in R^n_+$ задача (1.3) с целевой функции $f = f^\infty_h$ имела единственное решение.

Условие Хаара не всегда легко проверить для данной матрицы G. И не ясно, что нужно делать, если оно не выполняется. В [5; 7] был предложен алгоритм чебышевской аппроксимации, всегда приводящей к однозначному решению, причем к такому, при котором $x \in Q$, $y \in Y$. При этом условие Хаара может не выполняться. Приведем описание этого алгоритма применительно к рассматриваемой здесь формулировке задачи линейной аппроксимации.

2. Алгоритм однозначной чебышевской аппроксимации, не нуждающейся в условии Хаара

Вычисление однозначной во всех случаях чебышевской аппроксимации предлагается осуществлять в результате поиска относительно внутренних точек оптимальных решений последовательности задач линейного программирования с номерами $t = 1, ..., T$, при определяемом далее T. На каждом этапе t заданными являются два множества номеров J^t и K^t, такие что

$$J^t \cap K^t = \emptyset,\ J^t \cup K^t = \{1, ...n\},\ \ t = 1, ..., T.$$

При $t = 1$ полагаем

$$J^t = \{1, ...n\},\ \ K^t = \emptyset.$$

Задача линейного программирования, решаемая на этапе t, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ji} y_i - x_j = d_j,\ j \in J^t, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ji} y_i = d_j + \bar{x}_j,\ j \in K^t, \tag{2.2}$$

$$\alpha - x_j \geq 0,\ j \in J^t, \tag{2.3}$$

$$\alpha + x_j \geq 0,\ j \in J^t, \tag{2.4}$$

$$\alpha \to \min. \tag{2.5}$$

Переменными в этой задаче являются все компоненты вектора y, компоненты вектора x с номерами из J^t и дополнительная переменная α. Компоненты вектора x с номерами из K^t зафиксированы на уровне значений $\bar{x}_j$, определяемых в результате решения рассматриваемой задачи на предыдущих этапах. При $t = 1$, поскольку $K^t = \emptyset$, это условие несущественно. Отметим, что при $t = 1$ задача (2.1)–(2.5) является подробной записью задачи (1.3) при использовании в ней в качестве целевой функции чебышевской нормы f_h^∞.

Обозначим x^t, y^t, α^t оптимальное решение задачи (2.1)–(2.5) с минимальным (не сужаемым) набором активных (выполняемых в виде равенства) ограничений неравенств (2.3), (2.4). Отметим, что такие особые оптимальные решения вырабатывают алгоритмы метода внутренних точек [5], которые можно использовать при решении задачи (2.1)–(2.5).

Оптимальные решения с минимальным набором активных ограничений составляют подмножество относительно внутренних точек [12] оптимальных решений задачи линейного программирования. Для идентификации таких особых оптимальных решений может использоваться выполнение условия дополняющей нежесткости в строгой форме. Приведем это условие для задачи (2.1)–(2.5).

Двойственной к (2.1)–(2.5) является следующая задача линейного программирования. Найти переменные, составляющие вектор u из R^n и величины v_j, w_j при $j \in J^t$, из условий

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ji} u_j = 0, \ i = 1, ..., m, \tag{2.6}$$

$$u_j + v_j - w_j = 0, \ j \in J^t, \tag{2.7}$$

$$v_j \geq 0, \ w_j \geq 0, \ j \in J^t, \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j u_j + \sum_{j \in K^t} \bar{x}_j u_j \to \max. \tag{2.9}$$

Для того чтобы удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.4) переменные y_i, $i = 1, ..., n$, x_j, $j \in J^t$, α были оптимальными решениями задачи (2.1)–(2.5) и удовлетворяющими условиям (2.6)–(2.8), переменные u_j, $j = 1, ..., n$, v_j, w_j при $j \in J^t$ были оптимальными решениями задачи (2.6)–(2.9), необходимо и достаточно, как известно, выполнение следующих условий дополняющей нежесткости:

$$\min\{\alpha - x_j, v_j\} = 0, \ j \in J^t, \tag{2.10}$$

$$\min\{\alpha + x_j, w_j\} = 0, \ j \in J^t. \tag{2.11}$$

Чтобы указанные переменные составляли оптимальные решения с минимальным набором активных ограничений задач (2.1)–(2.5) и (2.6)–(2.9), необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к (2.10), (2.11) выполнялись неравенства:

$$\min\{\alpha - x_j,\ v_j\} > 0,\ \ j \in J^t, \tag{2.12}$$

$$\min\{\alpha + x_j,\ w_j\} > 0,\ \ j \in J^t. \tag{2.13}$$

Неравенства (2.12), (2.13) вместе с равенствами (2.10), (2.11) называются условиями дополняющей нежесткости в строгой форме.

Обозначим I_+^t и I_-^t множества номеров $j \in J^t$, для которых при $x = x^t$ выполняются в виде равенства условия (2.3) и, соответственно, (2.4). Пусть

$$I^t = I_+^t \cup I_-^t.$$

Отметим, что множества номеров I_+^t и I_-^t представляют минимальный набор активных ограничений-неравенств оптимальных решений задачи (2.1)–(2.5), т. е. набор ограничений неравенств данной задачи, который выполняется в виде равенств в любом оптимальном решении.

Зафиксируем на оптимальном уровне переменные x_j при $j \in I^t$. Положим

$$\bar{x}_j = x_j^t,\ j \in I^t.$$

Исключим из набора J^t номера, входящие в I^t, и добавим эти номера в набор K^t. Положим

$$J^{t+1} = J^t \backslash I^t,\ K^{t+1} = K^t \cup I^t.$$

Если $J^t \neq \emptyset$, то переходим к поиску относительно внутренней точки оптимальных решений задачи (2.1)–(2.5) при $t := t + 1$.

Поскольку $I^t \neq \emptyset$, то через конечное число этапов вычисления обязательно возникнет ситуация $J^{t+1} = \emptyset$. Это будет последний этап, для которого полагаем $T = t$. Вектор x^T определяется указанной процедурой однозначно. Однозначно при условии (1.2) определяется и вектор y^T. Решение x^T, y^T предлагается рассматривать в качестве однозначного решения задачи чебышевской линейной аппроксимации.

Получаемый в результате приведенного алгоритма вектор x^T будем называть чебышевской проекцией начала координат в R^n на линейное многообразие L. Положим

$$x(f_h^\infty) = x^T.$$

Получаемое на последнем этапе $t = T$ решение задачи (2.1)–(2.5) оптимальное значение вектора y будем обозначать

$$y(f_h^\infty) = y^T.$$

В [7] приведено доказательство следующего утверждения, которое означает, что определенная здесь чебышевская проекция начала координат на линейное многообразие может считаться удовлетворительной из содержательных соображений.

Теорема 1. *При любом* $h \in R^n_+$

$$x(f_h^\infty) \in Q.$$

Из этой теоремы и условия (1.2) вытекает аналогичное утверждение для векторов коэффициентов чебышевской аппроксимации, вычисляемых по приведенному выше алгоритму. Справедлива

Теорема 2. *При любом* $h \in R^n_+$

$$y(f_h^\infty) \in Y.$$

Определим множество чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие при различных весовых коэффициентах в чебышевской норме

$$P_\infty = \left\{x(f_h^\infty) : \ h \in R^n_+\right\}.$$

Введем также множество значений векторов коэффициентов линейной чебышевской аппроксимации

$$Y_\infty = \left\{y(f_h^\infty) : \ h \in R^n_+\right\}.$$

С использованием этих обозначений приведенные выше две теоремы равносильны следующим соотношениям

$$P_\infty \subseteq Q, \quad Y_\infty \subseteq H.$$

3. Связь чебышевского приближения и аппроксимации методом наименьших квадратов

Любую евклидову проекцию начала координат на линейное многообразие (вектор $x(f_h^2)$ при любом $h \in R^n_+$) можно представить за счет выбора весовых коэффициентов в чебышевской норме как введенную выше чебышевскую проекцию начала координат на линейное многообразие: при любом $h \in R^n_+$ найдется $r \in R^n_+$, такой что

$$x(f_h^2) = x(f_r^\infty). \tag{3.1}$$

Иными словами справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. $P_2 \subseteq P_\infty$.

Доказательство. Для вектора z из R^m будем обозначать $J_0(z)$, $J_+(z)$, $J_-(z)$, $J(z)$ множество номеров компонент, имеющих нулевые, положительные, отрицательные и ненулевые значения,

$$\begin{gathered} J_0(z) = \{j : \ z_j = 0\}, \ J_+(z) = \{j : \ z_j > 0\}, \\ J_-(z) = \{j : \ z_j < 0\}, \ J(z) = \{j : \ z_j \neq 0\}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Пусть при данном $h \in R_+^n$
$$x = x(f_h^2). \tag{3.3}$$
Положим
$$r_j = \frac{1}{|x_j|},\ j \in J(x).$$
При $j \in J_0(x)$ величина r_j может принимать любое положительное значение, например, $r_j = 1$.

При векторе r из R_+^n с указанными компонентами выполняются равенства:
$$r_j x_j = -1,\ j \in J_-(x), \tag{3.4}$$
$$r_j x_j = 1,\ j \in J_+(x), \tag{3.5}$$
$$r_j x_j = 0,\ j \in J_0(x). \tag{3.6}$$
Предположим, что
$$x \neq x(f_r^\infty). \tag{3.7}$$
Следовательно, при некотором $z \in L$, например, при $z = x(f_r^\infty)$
$$r_j\,|z_j| < 1,\ j \in J(x).$$

Пусть
$$s = z - x.$$
Вектор s находится в линейном подпространстве S. Для этого вектора, в силу (3.2), (3.4), (3.5),
$$s_j > 0,\ j \in J_-(x),$$
$$s_j < 0,\ j \in J_+(x).$$
Следовательно,
$$\sum_{j \in J(x)} h_j x_j s_j < 0. \tag{3.8}$$
Так как согласно определению (3.2)
$$\sum_{j \in J_0(x)} h_j x_j s_j = 0,$$
то
$$\sum_{j=1}^{n} h_j x_j s_j = \sum_{j \in J(x)} h_j x_j s_j.$$
Из (3.8) следует, что для данного вектора s равенство (1.4) не выполняется, что противоречит (3.3). Предположение (3.7) не верно. Теорема доказана. □

Из теоремы 3 и условия (1.2) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. $Y_2 \subseteq Y_\infty$.

Из (1.5), (1.6) и теорем 1–4 имеем соотношения

$$P_2 \subseteq P_\infty \subseteq Q, \;\; \mathrm{cl}\, P_2 = \mathrm{cl}\, P_\infty = Q,$$

$$Y_2 \subseteq Y_\infty \subseteq H, \;\; \mathrm{cl}\, Y_2 = \mathrm{cl}\, Y_\infty = H.$$

Эти соотношения означают, что P_2 и P_∞ близки между собой. Также близки между собой множества Y_2 и Y_∞. Данные факты могут рассматриваться как еще одно подтверждение правомочности рассматриваемого здесь определения всегда однозначной чебышевской апроксимации.

Замечание 1. Справедливы более сильные, чем теоремы 3, 4, утверждения. Можно доказать, что множества P_2 и P_∞ совпадают и, соответственно, совпадают множества Y_2 и Y_∞. В [7] были анонсированы утверждения о справедливости соотношений

$$P_\infty \subseteq P_2, \;\; Y_\infty \subseteq Y_2.$$

Отметим, что доказательства этих фактов, которыми располагают авторы, носят, в отличие от доказательства теоремы 3, неконструктивный характер. Опираясь на теоремы об альтернативных системах линейных неравенств, можно доказать, что для любого $r \in R^n_+$ существует $h \in R^n_+$, при котором

$$x(f^2_h) = x(f^\infty_r).$$

При этом правило вычисления h по значениям r и $x(f^\infty_r)$ неизвестно.

Замечание 2. Чебышевская аппроксимация часто используется в задачах поиска приближений функции через заданный набор других чем-то более удобных функций [1;3;4;9;14]. Пусть на отрезке $[a, b]$ аппроксимируется непрерывная функция одного вещественного аргумента $d(t)$ линейной комбинацией непрерывных линейно независимых на данном отрезке функций $g_i(t)$, $i = 1, ..., m$. Задана непрерывная функция весовых коэффициентов $h(t) > 0$ для всех $t \in [a, b]$. Требуется найти вещественные коэффициенты y_i, $i = 1, ..., m$, при которых минимально значение функции

$$F(y) = \sup\Big\{h(t)\Big|d(t) - \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(t)\Big| : \; t \in [a, b]\Big\}.$$

Для решения такой задачи обычно используются различные варианты ее дискретизации. Задается (возможно, итеративно меняется) набор значений аргумента, такой что

$$a \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le b.$$

Вычисляются компоненты векторов h и d, а также коэффициенты матрицы G

$$h_j = h(t_j)\,,\, d_j = d(t_j),\, j = 1, ..., n,$$

$$g_{ji} = g_i(t_j),\, j = 1, ..., n,\;\; i = 1, ..., m.$$

Приходим к рассмотренной выше задаче линейной чебышевской аппроксимации (1.3) при $f = f_h^\infty$.

Условие Хаара для обсуждаемой здесь чебышевской аппроксимации функций формулируется следующим образом [8; 15]. Функция

$$\varphi_y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(t)$$

при любом заданном $y \in R^m$, $y \neq 0$ должна иметь на отрезке $[a, b]$ не более, чем $m - 1$ нулей. Отсюда следует, что получаемая в результате дискретизации матрица G должна иметь любую квадратную подматрицу размера m неособенной. Набор функций g_i, $i = 1, ..., m$, при которых выполняется условие Хаара, принято называть чебышевской системой.

4. Аппроксимация результатов расчетов на модели топливоснабжения биотопливом из энергетических плантаций

В доказательстве теоремы 3 приводилось правило, по которому можно из результатов оценки методом наименьших квадратов определить весовые коэффициенты чебышевской нормы, при которых чебышевская аппроксимация совпадет с аппроксимацией методом наименьших квадратов. Приведем пример использования этого правила при аппроксимации зависимости затрат на обеспечение надежности топливоснабжения населенного пункта с энергетической плантации от объема средств обеспечения надежности.

Анализ надежности основывается на многократной имитации функционирования системы топливоснабжения населенных пунктов при случайных реализациях с заданными законами вероятности годовых потребностей в топливе и объемов производства [2]. В качестве средств обеспечения надежности топливоснабжения рассматриваются резервы мощности по производству топлива и емкость складов для хранения переходящих из одного отопительного периода в следующий эксплуатационных запасов топлива. Обе эти величины заданы в приводимых ниже расчетах в виде долей от математического ожидания годовой потребности в топливе. В результате расчетов на модели анализа надежности топливоснабжения (осуществляющей многократную имитацию функционирования систем топливоснабжения) определяется величина математического ожидания суммы ущербов от дефицита и затрат на обеспечение надежности (резервирование и хранение) как функция от величин средств обеспечения надежности:

$$d = f(K, C),$$

где f — рассчитываемая на основе многократного использования имитационной модели функция математического ожидания суммы ущербов от дефицита и затрат на резервирование. Аргументами являются: K — величина резерва мощности в производстве топлива, C — величина емкости склада для хранения переходящих (сверх сезонных) запасов топлива.

Таблица 1

Значения математического ожидания суммы годовых приведенных затрат на обеспечение надежности топливоснабжения с энергетических плантаций при разных значениях емкости складов и резервов мощности, млн руб. в год

Емкость складов, C	Резерв мощности, доля от математического ожидания потребности в топливе, K									
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	**0,10**
0	3,70	3,63	3,57	3,52	3,49	3,47	3,46	3,46	3,47	3,49
0,1	2,73	2,65	2,60	2,57	2,55	2,55	2,56	2,59	2,64	2,69
0,2	2,25	2,17	2,12	2,09	2,08	2,09	2,12	2,17	2,23	2,31
0,3	2,04	1,95	1,89	1,86	1,86	1,87	1,91	1,97	2,05	2,14
0,4	1,94	1,85	1,79	1,75	1,75	1,77	1,82	1,88	1,97	2,07
0,5	1,91	1,81	1,74	1,71	1,70	1,73	1,78	1,85	1,94	2,04
0,6	1,90	1,80	1,73	1,70	**1,69**	1,71	1,76	1,84	1,93	2,05
0,7	1,92	1,81	1,74	1,70	1,70	1,72	1,77	1,85	1,95	2,06
0,8	1,94	1,83	1,76	1,72	1,71	1,74	1,79	1,87	1,97	2,09
0,9	1,96	1,86	1,79	1,75	1,74	1,76	1,82	1,89	2,00	2,12
1	1,99	1,89	1,81	1,77	1,77	1,79	1,85	1,93	2,03	2,15

В табл. 1 представлены результаты расчетов значения результирующего показателя d (математического ожидания суммы ущербов от дефицита и затрат на обеспечение надежности для поселка с примерной численностью населения 7200 человек в природно-климатических условиях прибрежных районов озера Байкал) в зависимости от различных сочетаний показателей K и C.

Одной из целей представленных в табл. 1 расчетов является выбор оптимального сочетания средств резервирования, при которых минимально математическое ожидание затрат на обеспечение надежности и ущербов от дефицита. Для достижения этих целей важно выявить вид зависимости функции f. В частности, важно выяснение вопроса о выпуклости этой функции, можно ли считать ее унимодальной, допустимо ли для ее минимизации процедур одномерной оптимизации последовательно по каждому из двух аргументов.

В этих целях зависимость f аппроксимировалась методом наименьших квадратов квадратичной функцией от C и K, что представлялось как линейная функция от $m = 6$ факторов

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} g_{ji} y_j + x_j,\ j = 1, ..., n,$$

где x_j — погрешность линейной аппроксимации для ситуации j. Число рассматриваемых ситуаций $n = 143$. Для оценки коэффициентов линейной аппроксимации y_i, $i = 1, ..., m$ и погрешностей линейной аппроксимации x_j, $j = 1, ..., n$ применялся метод наименьших квадратов с постоянными весами,

$$\sum (x_j)^2 \to \min .$$

В результате получена следующая аппроксимация функции f:

$$\widetilde{f}(K, C) = 3,49 - 4,86C - 13,50K + 3,53C^2 + 118,72K^2 + 3,10KC.$$

Поскольку коэффициенты при составляющих C^2 и K^2 положительны, то зависимость $\widetilde{f}$ является выпуклой по каждому аргументу при фиксированном другом аргументе. Это дает основание пользоваться покоординатным спуском. Функция $\widetilde{f}$ также выпукла по обоим аргументам, поскольку матрица, задающая квадратичную ее составляющую, имеет положительный детерминант:

$$\Delta = 118,72 \times 3,53 - (1,55)^2 = 416,68.$$

Из результатов расчетов видно, что минимальное значение $\widetilde{f}(K_j, C_j)$ достигается примерно при тех же значениях аргументов, при которых достигаются минимальные значения исходной зависимости $f(K_j, C_j)$. В обоих случаях минимум достигается примерно при $C_j = 0,6$, $K_j = 0,05$.

Представление в виде задачи чебышевской аппроксимации. На основе расчетов методом наименьших квадратов можно вычислить весовые коэффициенты

$$r_j = 10/\left|x_j\right|,\ j = 1, ..., n.$$

Они приведены в табл. 2. При использовании таких коэффициентов в чебышевской норме f_r^∞ чебышевская аппроксимация по данным табл. 1 совпадает с рассмотренной выше аппроксимацией методом наименьших квадратов с одинаковыми весовыми коэффициентами в евклидовой норме. Отметим, что весовые коэффициенты являются безразмерными величинами. Умножение их всех на одно и то же положительное число не влияет на результат. Приведенное здесь правило задания весовых коэффициентов, результаты которого представлены в табл. 2, соответствует десятикратному увеличению всех весовых коэффициентов, рассчитываемых по правилу, приведенному в процессе доказательства теоремы 3.

Таблица 2

Весовые коэффициенты, при которых чебышевская аппроксимация равносильна аппроксимации методом наименьших квадратов с одинаковыми весами

Емкость складов, C	Резерв мощности, доля от математического ожидания потребности в топливе, K									
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	**0,10**
0	0,30	0,28	0,26	**0,26**	0,26	0,27	0,30	0,34	0,42	0,59
0,1	0,52	0,59	0,68	0,75	0,80	0,80	0,76	0,67	0,57	0,46
0,2	0,34	0,36	0,38	0,41	0,43	0,45	0,46	0,45	0,43	0,39
0,3	0,49	0,50	0,52	0,55	0,60	0,65	0,70	0,73	0,73	0,68
0,4	1,51	1,41	1,41	1,56	1,91	2,60	3,98	6,86	10,23	7,29
0,5	1,64	2,14	2,45	2,42	2,00	1,59	1,30	1,12	1,02	1,02
0,6	0,68	0,78	0,86	0,89	0,86	0,80	0,73	0,66	0,62	0,61
0,7	0,55	0,64	0,72	0,77	0,77	0,73	0,68	0,62	0,59	0,58
0,8	0,66	0,82	0,98	1,12	1,17	1,13	1,03	0,93	0,86	0,84
0,9	1,72	4,08	330,17	6,38	4,47	4,58	6,24	11,14	59,89	959,15
1	0,97	0,71	0,59	0,53	0,51	0,50	0,51	0,52	0,54	0,54

5. Заключение

Рассмотренный в данной статье алгоритм однозначного построения линейной чебышевской аппроксимации существенно расширяет возможности чебышевской аппроксимации функции. Этот алгоритм позволяет избавиться от необходимости проверки выполнения условия Хаара, позволяет расширить применение чебышевской аппроксимации на системы функций, не удовлетворяющие условию Хаара, для других постановок задач чебышевских приближений функций, в том числе на функции многих переменных [4; 10; 11; 13; 14].

Список литературы

1. Буров В. Н. Некоторые эффективные способы решения задачи П. Л. Чебышева о наилучшем приближении // Известия вузов. Математика. 1957. № 1. С. 67–79.

2. Губий Е. В., Зоркальцев В. И. Эффективность энергетических плантаций. Новосибирск : Наука, 2018. 96 с.
3. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.
4. Долганов Р. Л. Чебышевская аппроксимация асимптотически выпуклыми семействами функций // Известия вузов. Математика. 1972. № 7. С. 35–41.
5. Зоркальцев В. И. Метод внутренних точек: история и перспективы // Журнал вычислительной математики и математической физике. 2019. Т. 59, № 10. С. 1649–1665. https://doi.org/10.1134/S0044466919100181
6. Зоркальцев В. И. Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 106–118.
7. Зоркальцев В. И. Чебышевские приближения могут обходиться без условия Хаара // Материалы Международного симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование». Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. С. 29–33.
8. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М. : Наука, 1978. 272 с.
9. Колмогоров А. Н. Замечания по поводу многочленов П.Л. Чебышева наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи математических наук. 1948. Т. 3, № 1(23). С. 216–221.
10. Малоземов В. Н. Наилучшее равномерное приближение функций нескольких аргументов // Журнал вычислительной математики и математической физике. 1970. Т. 10, № 3. С. 575–586.
11. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М. : Наука, 1977. 456 с.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : МИР, 1973. 470 с.
13. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений // Математические заметки. 1971. Т. 9, № 5. С. 593–607.
14. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.-Л. : Изд. АН СССР, 1947. С. 151–235.
15. Haare A. Die Minkowskische Geometrie und die Anndherung an stetige Funktionen // Math. Ann. 1918. Vol. 78, N 3б. P. 415–127.

Валерий Иванович Зоркальцев, доктор технических наук, профессор, Лимнологический институт СО РАН, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, ул. Улан-Баторская, 3, тел.: (914)9523961, email: zork@isem.irk.ru, ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-3704-8759.

Елена Валерьевна Губий, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Российская Федерация, 664033,г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел.: (914)9279143, email: egubiy@gmail.com, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-0737-1835.

Поступила в редакцию 20.07.2020

Chebyshev Approximations by Least Squares Method

V. I. Zorkaltsev[1], E. V. Gubiy[2]

[1] *Limnological Institute SB RAS, Irkutsk, Russian Federation*
[2] *Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. We consider the problem of linear approximation in the form of the minimization problem of the weighted Chebyshev norm, and that in the form of the minimization problem of the weighted Euclidean norm of the residual vector. We give an algorithm for the unambiguous calculation in all cases of the Chebyshev approximation that does not require the Haar condition. The theorem obtained indicates that any approximation by the method of least squares (for any set of positive weight coefficients in the minimized Euclidean norm) can be represented as the Chebyshev approximation based on the choice of weight coefficients in the Chebyshev norm. As an example we consider the approximation of the reduced fuel supply costs of a settlement based on an energy plantation as a quadratic dependence on volumes of reserved funds.

Keywords: Chebyshev approximation, Haar condition, least squares method, reliability of fuel supply from energy plantations.

References

1. Burov V.N. Nekotorye effektivnye sposoby resheniya zadachi P.L.Chebysheva o nailuchshem priblizhenii [Some effective methods of solving the Chebyshev problem on best approximation]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1957, no 1, pp. 67-79. (in Russian)
2. Gubiy E.V., Zorkaltsev V.I. *Effektivnost' energeticheskikh plantatsiy* [Energy plantation efficiency], Novosibirsk, Nauka Publ., 2018, 96 p. (in Russian)
3. Dem'yanov V.F., Malozemov V.N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to Minimax], Moscow, Nauka Publ., 1972, 368 p. (in Russian)
4. Dolganov R.L. Chebyshevskaya approksimatsiya asimptoticheski vypuklymi semeystvami funktsiy [Chebyshev approximation by asymptotically convex families of functions], *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1972, no 7, pp. 35-41. (in Russian)
5. Zorkal'tsev V.I. Interior point method: history and prospects. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, pp. 1597-1612. https://doi.org/10.1134/S0965542519100178
6. Zorkal'tsev V.I. Octahedral and Euclidean projections of a point to a linear manifold. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, pp. 185-197. https://doi.org/10.1134/S0081543814020163
7. Zorkaltsev V.I. Chebyshevskie priblizheniya mogut obkhodit'sya bez usloviya Khaara [Chebyshev approximations can dispense with the Haar condition]. *Materialy Mezhdunarodnogo simpoziuma, posvyashchennogo 100-letiyu matematicheskogo obrazovaniya v Vostochnoy Sibiri i 80-letiyu so dnya rozhdeniya professora O. V. Vasil'eva «Dinamicheskie sistemy, optimal'noe upravlenie i matematicheskoe modelirovanie»* [Proceedings of the International Symposium dedicated to the 100th anniversary of mathematical education in Eastern Siberia and the 80th anniversary of the birth of Professor O. V. Vasiliev "Dynamical systems, optimal control and mathematical modeling"], Irkutsk, Irkutsk State University Publ., 2019, pp. 29-33. (in Russian)
8. Collatz L., Krabs W. *Approximationstheorie. Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1973, 208 p.

9. Kolmogorov A.N. Zamechaniya po povodu mnogochlenov P.L. Chebysheva naimenee uklonyayushchikhsya ot zadannoy funktsii [A remark on the polynomials of P.L. Chebyshev deviating the least from a given function]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1948, vol. 3, no 1(23), pp. 216-221. (in Russian)
10. Malozemov V.N. The best uniform approximation of functions of several arguments. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1970, vol. 10, no 3, pp. 28-43. https://doi.org/10.1016/0041-5553(70)90112-6
11. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975, 420 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65711-5
12. Rockafellar R. *Convex analysis*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970, 472 p.
13. Tikhomirov V.M. Some problems in approximation theory. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1971, vol. 9, pp. 343-350. https://doi.org/10.1007/BF01094364
14. Chebyshev P.L. *Voprosy o naimen'shikh velichinakh, svyazannye s priblizhennym predstavleniem funktsiy. Polnoe sobranie sochineniy. Tom 2* [Questions on smallest quantities connected with the approximate representation of functions, Collected works, vol. 2], Moscow, Leningrad, AN SSSP Publ., 1947, pp. 151-235. (in Russian)
15. Haare A. Die Minkowskische Geometrie und die Annдherung an stetige Funktionen, *Math. Ann.*, 1918, vol. 78, no 3б, pp. 415–127.

Valeriy Zorkaltsev, Doctor of Sciences (Technics), Professor, Limnological Institute SB RAS, 3, Ulan-Batorskaya st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (914)9523961, email:zork@isem.irk.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-3704-8759.

Elena Gubiy, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (914)9279143,
email: egubiy@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-0737-1835.

Received 20.07.2020