



Серия «Математика»

2020. Т. 31. С. 34–48

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.63

MSC 35Q35

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.34>

Об одном семействе математических моделей адекватной сложности, описывающих пассивный массоперенос в спокойных русловых потоках *

К. А. Надолин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Аннотация. Обсуждаются проблемы моделирования спокойных русловых течений малой мутности в пределах протяженных слабо искривленных участков. Представлена методика получения упрощенных математических моделей, адекватно учитывающих пространственный характер течения, основанная на методе малого параметра. В отличие от распространенных осредненных уравнений предлагаемые в статье математические модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности перемешивания и распределения вещества в потоке.

Ключевые слова: математическая модель, русловой поток, турбулентность, свободная поверхность, метод малого параметра, пассивная примесь.

1. Введение

Особенности распространения вещества в речных потоках связаны с тем, что поперечное сечение речного русла имеет существенно различные размеры в вертикальном и горизонтальном направлениях. (Отношение между характерной глубиной и характерной шириной равнинных рек колеблется в пределах от 0,1 до 0,005 [11].) Эти особенности естественных водотоков могут быть использованы для значительного упрощения математического описания процессов распространения

* Работа поддержана грантом Благотворительного фонда Владимира Потанина, проект GK190000844.

вещества без существенной потери точности результатов моделирования, поэтому разработка редуцированных моделей, ориентированных на природные водотоки и адекватно описывающих процесс рассеяния пассивных примесей, является весьма актуальной задачей [5].

При моделировании потоков малой мутности рассматривают перенос пассивной примеси, когда изменение концентрации вещества в потоке не влияет на его гидродинамику — распределение скорости и давления [1]. Это позволяет отделить задачу определения поля скорости потока от задачи определения концентрации вещества. Поскольку процесс перемешивания в естественных водотоках определяется как диффузией вещества, так и его переносом движущейся жидкостью, то гидродинамические характеристики течения играют здесь важную роль, и скорость потока необходимо задавать так же точно, как и описывать процесс диффузии. Другими словами, точность моделирования гидродинамики течения должна быть согласована с точностью моделирования диффузии, а математическая модель массопереноса должна включать в себя как модель течения ("гидродинамическую подсистему"), так и модель переноса и диффузии вещества ("концентрационную подсистему").

В работе представлены редуцированные пространственно трехмерные модели распространения пассивной неконсервативной примеси в протяженном потоке, рассмотрена классификация их математических моделей, предложенная ранее [9]. Модельные уравнения получены методом малого параметра из уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутых на основе гипотезы Буссинеска [7], и уравнения диффузии распадающегося вещества в движущейся среде [8].

В отличие от предыдущих исследований автора в данной работе при постановке задачи учитывается сила Кориолиса и показано, что в базовом приближении ее влиянием можно пренебречь.

Предлагаемые модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности перемешивания и распределения вещества в потоке [9].

2. Общие уравнения в безразмерных переменных

Рассмотрим распространение пассивной примеси в турбулентном русловом потоке. Будем предполагать, что рассматриваемый участок русла искривлен слабо. (Позже это предположение будет сформулировано математически.)

Введем прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) , как показано на рис. 1.

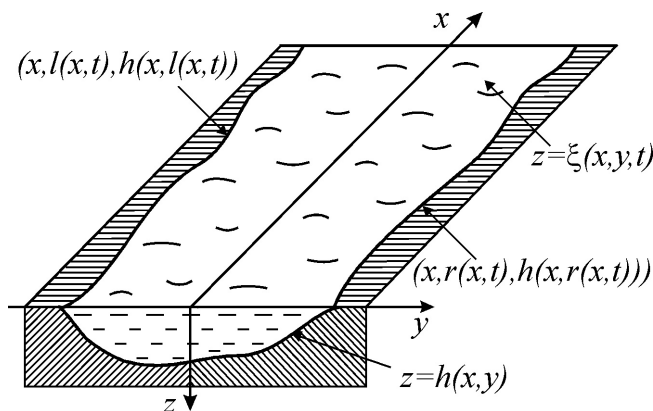


Рис. 1. Геометрия потока и система координат

Пусть свободная поверхность описывается уравнением $z = \xi(x, y, t)$, где $\xi(x, y, t)$ — неизвестная функция. Дно потока будем считать заданным соотношением $z = h(x, y)$, где $h(x, y)$ известная функция. Берега будем считать либо заданными известными цилиндрическими поверхностями $y = l(x)$ и $y = r(x)$, которые ортогональны плоскости xOy (так обстоит дело, например, для искусственных каналов прямоугольного сечения), либо береговые линии для левого и правого берега определяются зависимостями $y = l(x, t)$ и $y = r(x, t)$ исходя из условия $\xi(x, y, t) = h(x, y)$ (так обстоит дело, например, для речных русел или искусственных каналов трапециевидного сечения).

Функции $y = l(x, t)$ и $y = r(x, t)$ находятся, как неявно заданные, из уравнения $h(x, y) - \xi(x, y, t) = 0$. Считается, что в любой момент времени t при $l(x, t) < y < r(x, t)$ выполнено условие $h(x, y) > \xi(x, y, t)$, т. е. отсутствуют острова или отмели.

Входное и выходное сечения будут определяться уравнениями $x = 0$ и $x = L_x$, соответственно, где L_x — протяженность рассматриваемого участка потока.

Перейдем к безразмерным переменным, следуя [9]. Выберем в качестве линейного масштаба по соответствующему направлению характерную длину L_x , ширину L_y и глубину L_z потока. В дальнейшем отношения $\varepsilon = L_z/L_y$ и $\delta = L_y/L_x$ будут предполагаться малыми. Различные компоненты вектора скорости нормируем, используя разные масштабы. Пусть U_x — характерная скорость в направлении x . За масштаб скорости в направлении y примем $U_y = \delta U_x$, а в направлении z , соответственно $U_z = \varepsilon U_y = \varepsilon \delta U_x$. В качестве масштаба измерения давления выберем $P = \rho U_x^2$, а времени — $T = L_x/U_x$. Это означает, что число Эйлера $Eu = P \rho^{-1} U_x^{-2}$ и число Струхала $Sh = L_z T^{-1} U_x^{-1}$ для рассматриваемых течений равны единице. (Заметим, что такое предположение выполняется для широкого класса русловых потоков [11; 12].)

За масштаб измерения концентрации примем максимальное значение концентрации вещества в начальный момент времени $\max(C_0)$.

Компоненты вектора угловой скорости, входящей в выражение для силы Кориолиса, и вектора внешней нагрузки нормируются в соответствии с представлением

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= (\omega \cos \theta_x, \delta\omega \cos \theta_y, \varepsilon\delta\omega \cos \theta_z) \\ \mathbf{f} &= (f \cos \psi_x, \delta f \cos \psi_y, \varepsilon\delta f \cos \psi_z)\end{aligned}$$

В безразмерных переменных уравнение конвекции-диффузии, где конвективная часть управляется полем скорости турбулентного течения [8], имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{33} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(d_{23} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{32} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ \varepsilon\delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{13} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{31} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \\ &+ \varepsilon^2\delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{21} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) + \varepsilon^2\delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{11} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \lambda c,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $d_{ij} = D_{ij} (U_z L_z)^{-1}$, $d_{ij} = d_{ji}$ — безразмерные коэффициенты турбулентного обмена; $\lambda = \gamma L_x U_x^{-1}$ — параметр распада вещества.

Начальное и краевые условия запишем в виде

$$c|_{t=0} = c^0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = c^{in}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=1} = c^{out},\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{z=h(x,y)} = 0,\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{z=\xi(x,y,t)} = 0.\tag{2.4}$$

где $c^0 = C_0 / \max(C_0)$, $c^{in} = C^{in} L_x / \max(C_0)$ и $c^{out} = C^{out} L_x / \max(C_0)$ — заданные безразмерные функции.

Уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутые на основе гипотезы Буссинеска и учитывающие действие силы Кориолиса

[7], относительно безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon\delta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \left. \right] - \\ &- \frac{1}{Ro} \varepsilon^2 \delta^3 (w \cos \theta_y - v \cos \theta_z) + \frac{\sin \varphi}{Fr}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \delta \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left. \right] - \\ &- \frac{1}{Ro} \varepsilon^2 \delta (u \cos \theta_z - w \cos \theta_x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \delta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon\delta \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left. \right] - \\ &- \frac{1}{Ro} \delta (v \cos \theta_x - u \cos \theta_y) + \frac{\cos \varphi}{Fr}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

Здесь введены число Рейнольдса $Re = \rho U_x L_z / \bar{\eta}$, число Фруда $Fr = U_x^2 / g L_z$, число Россби $Ro = U_x / 2\omega L_x$ и безразмерная функция вязкости $\nu(x, y, z) = \eta(x, y, z) / \bar{\eta}$, учитывающая турбулентность потока в соответствии с гипотезой Буссинеска.

Начальные и краевые условия имеют вид

$$u|_{t=0} = u^0(x, y, z), \quad v|_{t=0} = v^0(x, y, z), \quad w|_{t=0} = w^0(x, y, z), \quad (2.9)$$

$$u|_{x=0} = a_x(y, z, t), \quad v|_{x=0} = a_y(y, z, t), \quad w|_{x=0} = a_z(y, z, t), \quad (2.10)$$

$$u|_{x=1} = b_x(y, z, t), \quad v|_{x=1} = b_y(y, z, t), \quad w|_{x=1} = b_z(y, z, t). \quad (2.11)$$

где \mathbf{v}^0 , \mathbf{a} , и \mathbf{b} – заданные векторные поля.

$$u = v = w|_{z=h(x,y)} = 0. \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w \Big|_{z=\xi(x,y,t)} = 0, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon\delta\frac{Re}{\nu_\xi}p\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \varepsilon^2\delta^2\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \\
 & \quad + \varepsilon^3\delta\frac{\kappa}{\nu_\xi}\left(\delta^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big|_{z=\xi(x,y,t)} = \\
 & = \frac{F}{\nu_\xi}\cos\psi_x\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \varepsilon^2\delta^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon\frac{Re}{\nu_\xi}p\frac{\partial\xi}{\partial y} - \delta\frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \\
 & \quad + \varepsilon^2\delta^3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \varepsilon^3\frac{\kappa}{\nu_\xi}\left(\delta^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big|_{z=\xi(x,y,t)} = \\
 & = \delta\frac{F}{\nu_\xi}\cos\psi_y\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \varepsilon^2\delta^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{Re}{\nu_\xi}p + \varepsilon\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial y} - 2\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \varepsilon^3\delta\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \\
 & \quad + \varepsilon^3\delta^3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{\kappa}{\nu_\xi}\left(\delta^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\Big|_{z=\xi(x,y,t)} = \\
 & = \varepsilon\delta\frac{F}{\nu_\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\psi_x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\psi_y\right)\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \varepsilon^2\delta^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь $\nu_\xi = \nu(x, y, \xi)$ — значение функции турбулентной вязкости на поверхности потока, $\kappa = \vartheta(\bar{\eta}U_x)^{-1}$ — капиллярный параметр, углы ψ_x и ψ_y определяют направление, а параметр $F = fL_z(\bar{\eta}U_x)^{-1}$ — интенсивность ветровой нагрузки.

Уравнения (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.16) содержат общую постановку задачи о распространении пассивной примеси в турбулентном потоке, и их решение представляет значительную трудность.

Для упрощения начально-краевых задач (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.16) воспользуемся тем, что характерной особенностью русловых потоков являются их большая протяженность и малая, по сравнению с шириной, глубина. Это означает, что параметры ε и δ можно считать малыми.

3. Классификация моделей русловых потоков

Уравнения (2.1)–(2.16), записанные в безразмерном виде и содержащие параметры ε и δ , позволяют получать различные математические модели русловых потоков [9]. Для этого требуется определить связь

между указанными параметрами в соответствии с предположениями о характере исследуемого течения.

В таблице 1 приведены различные варианты связи между параметрами, которые могут быть использованы для характеристики русловых потоков.

Таблица 1

Тип модели	ε	δ	Подстановка в уравнениях (2.1)-(2.16)
1. мелкий протяженный поток	$o(1)$	$O(\varepsilon)$	$\varepsilon = \delta$
2. сверхмелкий протяженный поток	$o(\delta)$	$o(1)$	$\varepsilon = \delta^2$
3. мелкий сверхпротяженный поток	$o(1)$	$o(\varepsilon)$	$\delta = \varepsilon^2$
4. мелкий широкий поток	$o(1)$	$O(1)$	$\delta = 1$
5. глубокий протяженный поток	$O(1)$	$o(\varepsilon)$	$\varepsilon = 1$
6. существенно трехмерный поток	$O(1)$	$O(1)$	$\varepsilon = \delta = 1$

Например, понятие *мелкого протяженного потока* формализовано предположением, что параметры ε и δ являются малыми величинами одного порядка. Это означает, что ширина значительно превосходит глубину потока, причем рассматривается течение на участке русла, длина которого во столько же раз превосходит ширину потока, во сколько раз ширина превосходит глубину. Считая ε и δ малыми параметрами разных порядков малости, получим уравнения, описывающие *мелкий сверхпротяженный поток* ($\delta = o(\varepsilon)$) или *сверхмелкий протяженный поток* ($\varepsilon = o(\delta)$). Варианты, когда лишь один из параметров является малым, отвечают случаям *глубокого протяженного потока* и *мелкого широкого потока*. Заметим, что отказ от предположения о малости как параметра ε , так и параметра δ приводит к общим трехмерным уравнениям.

В качестве примера рассмотрим получение математической модели *мелкого протяженного потока*. Полагая в (2.1)–(2.16) $\delta = \varepsilon$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} + \frac{\partial c v}{\partial y} + \frac{\partial c w}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{33} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(d_{23} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{32} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{13} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{31} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(d_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{21} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{11} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \lambda c. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Начальные и граничные условия (2.2) во входном и выходном сечениях сохраняются. Граничные условия на дне и на свободной поверхности (2.3), (2.4) примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{z=h(x,y)} &= 0, \\
 \frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \varepsilon^4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{z=\xi(x,y,t)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнения гидродинамической подсистемы (2.5)–(2.7) примут вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\
 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] &- \\
 - \frac{1}{Ro} \varepsilon^5 (w \cos \theta_y - v \cos \theta_z) + \frac{\sin \varphi}{Fr}, \\
 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) &- \\
 - \frac{1}{Ro} \varepsilon^3 (u \cos \theta_z - w \cos \theta_x) \\
 \varepsilon^4 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) &- \\
 - \frac{1}{Ro} \varepsilon (v \cos \theta_x - u \cos \theta_y) + \frac{\cos \varphi}{Fr},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнение неразрывности (2.8) остается прежним, как и начально-краевые условия (2.9)–(2.13).

Динамические условия на свободной границе (2.14)–(2.16) примут вид

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon^2 \frac{Re}{\nu_\xi} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^4 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\
 + \varepsilon^4 \frac{\kappa}{\nu_\xi} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{z=\xi} = \frac{F_x}{\nu_\xi} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Re}{\nu_\xi} p \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\
& + \varepsilon^2 \frac{\kappa}{\nu_\xi} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \Big|_{z=\xi} = \frac{F_y}{\nu_\xi} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} \\
& \frac{Re}{\nu_\xi} p + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \\
& - \varepsilon^2 \frac{\kappa}{\nu_\xi} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \Big|_{z=\xi} = \\
& = \varepsilon^2 \frac{1}{\nu_\xi} \left(F_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + F_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где введены обозначения $F_x = F \cos \psi_x$, $F_y = F \cos \psi_y$.

Начально-краевая задача (3.1),(2.2),(3.2) образует концентрационную подсистему, а (3.3),(2.8)-(2.13),(3.4) – гидродинамическую подсистему математической модели перемешивания примеси в *мелком протяженном потоке*.

4. Базовая модель мелкого протяженного потока

Наличие малого параметра в уравнениях русловых потоков, записанных в безразмерных переменных, позволяет применить стандартную технику разложения неизвестных величин в асимптотические ряды

$$\begin{aligned}
c &= c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots \\
u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\
v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\
w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\
p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\
\xi &= \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

и свести исходные нелинейные задачи к рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач. При этом уравнения для главных членов можно рассматривать как редуцированные трехмерные математические модели, описывающие соответствующие разновидности русловых потоков.

Применение такого подхода основывается на условии, что в уравнениях, записанных в безразмерном виде, величина слагаемых определяется стоящими при них параметрами. Для неизвестных величин и

их производных это обеспечивается выбором масштабов, а для формы русла (в исходной геометрии) требуется выполнение условий

$$\frac{\partial h}{\partial x} = O(\varepsilon\delta), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = O(\varepsilon)$$

что и означает слабую искривленность потока.

Модель мелкого протяженного потока. В качестве примера рассмотрим получение редуцированной математической модели мелкого протяженного потока.

Как было показано в предыдущем разделе, начально-краевая задача (3.1), (2.2), (3.2) образует концентрационную подсистему, а (3.3), (2.8)-(2.13), (3.4) – гидродинамическую подсистему полной математической модели перемешивания примеси в мелком протяженном потоке.

Будем искать решение этих подсистем в виде рядов (4.1) по степеням параметра ε . Подставляя (4.1) в (3.1)-(3.3), (2.2), (2.8)-(2.13), (3.4) и группируя слагаемые, содержащие старшие члены разложения (4.1), получим уравнения первого приближения, которые назовем *базовой математической моделью* перемешивания примеси в *мелком протяженном потоке*

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial c_0 u_0}{\partial x} + \frac{\partial c_0 v_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0 w_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{33} \frac{\partial c_0}{\partial z} \right) - \lambda c_0, \quad (4.2)$$

$$c_0|_{t=0} = c^0, \quad \frac{\partial c_0}{\partial x} \Big|_{x=0} = c^{in}, \quad \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=\xi_0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -GI, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = Re \frac{\partial p_0}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{G}{Re}, \quad (4.3)$$

$$p_0|_{z=\xi_0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big|_{z=\xi_0} = -\frac{F_x}{\nu \xi_0}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} \Big|_{z=\xi_0} = -\frac{F_y}{\nu \xi_0},$$

$$u_0 = v_0 = w_0|_{z=h} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} - w_0 \Big|_{z=\xi_0} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь $\nu_{\xi_0} = \nu(x, y, \xi_0)$ и введены гравитационный параметр

$$G = ReFr^{-1} \cos \varphi$$

и уклон потока $I = \text{tg } \varphi$.

Уравнения (4.2),(4.3) содержат не все производные по сравнению с исходными уравнениями (3.1),(3.3), и поэтому некоторые из начально-краевых условий должны быть отброшены или заменены интегральными соотношениями. Также отметим, что в уравнения (4.2) не вошли слагаемые, связанные с действием силы Кориолиса.

Система (4.2)–(4.4) является базовой математической моделью перемешивания. Уравнения (4.2) образуют концентрационную подсистему, а (4.3), (4.4) — гидродинамическую подсистему базовой модели.

Здесь важно отметить, что гидродинамическая подсистема решается независимо от концентрационной подсистемы, но они согласованы по точности приближения. В этом методологическое отличие от некоторых исследований, когда рассматривается лишь задача для концентрации вещества, а скорость потока считается известной и исключается из рассмотрения.

Решение уравнений гидродинамической подсистемы (4.3) может быть явно записано в квадратурах

$$\begin{aligned} p_0 &= Gre^{-1}(z - \xi_0), & \xi_0 &= \xi_0(x, y, t), & u_0 &= GI(J_2 - \xi_0 J_1) + F_x J_1, \\ v_0 &= G \frac{\partial \xi_0}{\partial y} (J_2 - \xi_0 J_1) + F_y J_1, \\ w_0 &= G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi_0 J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi_0 J_3) \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right) \right) + F_x \frac{\partial J_3}{\partial x} + F_y \frac{\partial J_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} J_1(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} \frac{d\tau}{\nu(x, y, \tau)}, & J_2(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} \frac{\tau d\tau}{\nu(x, y, \tau)}, \\ J_3(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} J_1(x, y, \tau) d\tau, & J_4(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} J_2(x, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку закон изменения турбулентной вязкости $\nu(x, y, z)$ в потоке должен быть задан, величины $J_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ следует считать известными функциями.

Давление и компоненты скорости в (4.5) выражены через возвышение свободной поверхности ξ_0 , которое определяется из кинематического краевого условия (4.4).

Подставляя выражения (4.5) в кинематическое краевое условие (4.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0}{\partial t} &= G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi_0 J_3) - (J_2 - \xi_0 J_1) \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ (J_4 - \xi_0 J_3) \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi_0 J_3) - (J_2 - \xi_0 J_1) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right)^2 \left. \right] + \\ &+ F_x \left(\frac{\partial J_3}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) + F_y \left(\frac{\partial J_3}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь функции J_i , $i = 1, 2, 3, 4$ и их производные вычислены на свободной границе при $z = \xi_0$.

Для уравнения (4.6) надо задать начальную форму свободной поверхности, а также граничные условия во входном створе $x = 0$ и на берегах потока, которые могут быть, согласно постановке задачи, либо фиксированными и заданными, либо должны определяться из условия $h(x, y) - \xi(x, y, t) = 0$, т.е. являются нестационарными и неизвестными.

Численные результаты моделирования гидродинамики и пассивного массопереноса для мелких протяженных русловых потоков на основе упрощенной модели (4.2)-(4.4) представлены в [6; 10].

5. Уравнения для поправок

Использование метода малого параметра для получения редуцированных математических моделей русловых потоков приводит к рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач. Уравнения для главных членов разложения неизвестных величин по степеням малого параметра мы называем *базовой математической моделью*. Именно базовые модели предлагается использовать при моделировании массопереноса в естественных водотоках разных типов (см. табл.). Уравнения для последующих членов разложения неизвестных величин по степеням малого параметра являются *поправочными* и могут быть использованы для уточнения результатов, полученных на основе базовых моделей.

Уравнения для поправок остаются линейными, но оказываются весьма громоздкими, причем эта громоздкость возрастает с ростом порядка рассматриваемых поправок (т.е. учитываемой степени малого параметра).

Проведенные вычислительные эксперименты [2]- [4] показали, что поправки к базовым моделям, как и следовало ожидать, весьма малы и не оказывают заметного влияния на результаты, полученные на основе базовых моделей. Поэтому уравнения для поправок не имеют практического значения при моделировании водных объектов. Однако анализ уравнений для поправок может быть полезен для лучшего понимания роли и оценки вклада того или иного члена математической модели руслового потока в решение задачи моделирования.

6. Заключение

Модельные уравнения, полученные выше, описывают распространение пассивной примеси в русловых потоках как пространственно трехмерный процесс, при этом они существенно проще полных трехмерных

уравнений, а в некоторых случаях — и двумерных [2]. Упрощение связано с тем, что рассматриваются протяженные мелководные и слабо искривленные русловые потоки, которые не являются *существенно трехмерными* объектами (хотя, конечно, их нельзя считать и одномерными течениями).

Обратим внимание на ряд моментов, важных для правильного понимания области применимости, которая соответствует полученным моделям.

Во-первых, при получении моделей используется методика формальной оценки малости членов уравнений, на основе степеней малого параметра, входящих в эти члены. При этом исходные полные трехмерные уравнения должны быть записаны в безразмерной форме так, чтобы неизвестные безразмерные функции и их производные были порядка $O(1)$. Правильный выбор масштабов безразмерных величин для конкретного потока должен обеспечить выполнение этого условия и определить, какой тип модели в классификации таблицы может быть использован.

Во-вторых, слабая искривленность потока означает, что (в размерных величинах) производная функции $h(x, y)$ по переменной y должна быть порядка δ , а производная по переменной x — порядка $\varepsilon\delta$.

В-третьих, рассматриваются “медленные” потоки, т. е. в размерных величинах производная продольной скорости по времени должна быть порядка $\varepsilon\delta$. Поэтому в модельных уравнениях гидродинамическая подсистема оказывается стационарной, или слабо зависящей от времени в силу возможной нестационарности свободной границы.

И наконец, для первых четырех типов потоков (см. таблицу) уравнения редуцированных моделей в первом приближении оказываются весьма близки между собой, хотя присутствуют и некоторые различия. Для уточнения результатов следует рассматривать *уравнения для поправок* — членов более высокого порядка. Выписать эти уравнения не составляет труда, и не приведены они лишь из-за своего громоздкого вида. Уравнения поправок остаются линейными, причем несмотря на их внешнее различие для потоков разных типов, влияние самих поправок на поля скорости и концентрации оказывается незначительным.

Список литературы

1. Аргучинцев В. К., Аргучинцева А. В. Численное моделирование течений и переноса примесей в стратифицированных озерах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2007. Т. 1, № 1. С. 42–51.
2. Бабаян А. В., Надолин К. А. О моделировании распространения вещества в плоском стационарном потоке вязкой жидкости // Водные ресурсы. 2000. Т. 21, № 2. С. 184–191.

3. Бабаян А. В., Надолин К. А. О моделировании тэйлоровской дисперсии в трубе переменного сечения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2001. № 3. С. 27–29.
4. Бабаян А. В., Надолин К. А. Моделирование рассеяния вещества в трехмерном открытом стационарном потоке вязкой жидкости // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2001. Спецвып. : Математическое моделирование. С. 23–25.
5. Васильев О. Ф. Математическое моделирование гидравлических и гидрологических процессов в водоемах и водотоках (обзор работ, выполненных в Сибирском отделении Российской академии наук) // Водные ресурсы. 1999. Т. 26, № 5. С. 600–611.
6. Жилиев И. В. Редуцированные модели гидродинамики и массопереноса в русловых потоках : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2018. 196 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб. : Гидрометеоздат, 1992. 694 с.
9. Надолин К. А. Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 2. С. 14–28.
10. Надолин К. А., Жилиев И. В. Редуцированная 3D модель гидродинамики мелкого протяженного и слабо искривленного водотока // Водные ресурсы. 2017. Т. 44, № 2. С. 158–167.
11. Knight D. W. River hydraulics — a view from midstream // J. Hydr. Res. 2013. Vol. 51, N 1. P. 2–18. <https://doi.org/10.1080/00221686.2012.749431>
12. Stansby P. K. Coastal hydrodynamics — present and future // J. Hydr. Res. 2013. Vol. 51, N 4. P. 341–350. <https://doi.org/10.1080/00221686.2013.821678>

Константин Аркадьевич Надолин, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, Российская Федерация, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А, тел.: (863)2975285, e-mail: kanadolin@sfedu.ru, ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-8108-9611>.

Поступила в редакцию 28.10.2019

On a Family of Mathematical Models of Adequate Complexity, Describing Passive Mass Transfer in Calm Streambed Flowes

K. A. Nadolin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Abstract. The problems of modeling calm and shallow streambed flows of low turbidity within elongated and weakly curved sections are discussed. A technique based on the small parameter method of obtaining simplified mathematical models that adequately take into account the spatial nature of the flow is presented. In contrast to the widespread averaged models, the equations of mathematical models described in the article take into account the spatial structure of the flow, which allows us to study the influence of the shape of the bottom and coastline of the channel, as well as some external factors (for

example, the wind) on the characteristics of mixing and distribution of matter in the stream.

Keywords: mathematical model, streambed flow, turbulence, free surface, small parameter technique, passive admixture.

References

1. Arguchintsev V.K., Arguchintseva A.V. Numeric modeling of flows and admixture transfer in stratified lakes. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 42-51. (in Russian)
2. Babayan A.V., Nadolin K.A. Modeling of Substance Spreading in Two-Dimensional Flow of Viscous Fluid. *Water Resources*, 2000, vol. 27, no. 2, pp. 161-168.
3. Babayan A.V., Nadolin K.A. On modeling Taylor dispersion in a pipe of variable cross section. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region, Series Natural Sciences*, 2001, no. 3, pp. 27-29. (in Russian)
4. Babayan A.V., Nadolin K.A. Modeling of scattering of matter in a three-dimensional open stationary flow of a viscous fluid. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region, Series Natural Sciences, 2001, Special Issue, Mathematical Modeling*, pp. 23-25. (in Russian)
5. Vasil'ev O.F. Mathematical modeling of hydraulic and hydrological processes in water bodies and streams (a review of the work performed in the Siberian branch of the Russian Academy of Sciences). *Vodnie Resursy*, 1999, vol. 26, no. 5, pp. 600-611. (in Russian)
6. Zhilyaev I.V. *Reduced models of hydrodynamics and mass transfer in channel flows. Cand. Sci. [Phys.-Math.] Diss.*. Rostov-on-Don, 2018, 196 p. (in Russian)
7. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Pergamon Press Publ., 1966, 802 p. <https://doi.org/10.1017/S0001924000056645>
8. Monin, A.S., Yaglom, A.M. *Statistical fluid mechanics*. Cambridge, MIT Press Publ., 1979.
9. Nadolin K.A. On the Approach to Modelling of the Mass Transfer in River-bed Stream. *Mat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 2, pp. 14-28. (in Russian)
10. Nadolin K.A., Zhilyaev, I.V. A Reduced 3D Hydrodynamic Model of a Shallow, Long, and Weakly Curved Stream. *Water Res*, 2017, vol. 44, no.2, pp. 237-245. <https://doi.org/10.1134/S0097807817020087>
11. Knight D.W. River hydraulics — a view from midstream. *J. Hydr. Res*, 2013, vol. 51, no. 1, pp. 2-18. <https://doi.org/10.1080/00221686.2012.749431>
12. Stansby P.K. Coastal hydrodynamics — present and future. *J. Hydr. Res*, 2013, vol. 51, no. 4, pp. 341-350. <https://doi.org/10.1080/00221686.2013.821678>

Konstantin Nadolin, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Southern Federal University, 8-A, Milchakova st., Rostov-on-Don, 344090, Russian Federation, tel.: (863)2975285, e-mail: kanadolinr@sfnu.ru, ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-8108-9611>.

Received 28.10.2019