Серия «Математика»
2019. Т. 29. С. 98—106

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 512.56
MSC 08A99,03C15, 03C30, 03C50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.98

О представлении решеток алгебраических множеств универсальных алгебр

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация

Посвящается памяти Али Ивановича Кокорина

Аннотация. Понятие алгебраического множества относится к основным понятиям классической алгебраической геометрии над полями. Это понятие наряду с понятием решетки алгебраических множеств лежит в основе так называемой алгебраической геометрии универсальных алгебр. При этом традиционно существуют два подхода к определению алгебраических множеств: один из них, являющийся непосредственным обобщением классической ситуации с понятием алгебраического множества над полем, связан с гомоморфизмами свободных алгебр в рассматриваемую, другой формулируется в рамках традиционной теории моделей.

В настоящей работе предложен еще один подход к характеризации алгебраических множеств, основанный на понятии внутренних гомоморфизмов расширений изучаемой алгебры. На основе этого подхода предложено еще одно из возможных представлений решеток алгебраических множеств универсальных алгебр, а также критерий, в терминах внутренних гомоморфизмов, совпадения совокупностей алгебраических множеств универсальных алгебр с идентичными основными множествами.

Ключевые слова: алгебраическое множество, решетка, внутренний гомоморфизм.

1. Введение

В исследованиях Б. И. Плоткина и его соавторов [11; 12] разработана обобщающая подходы классической алгебраической геометрии (см., к примеру, [13; 14]) система понятий так называемой алгебраической геометрии над универсальными алгебрами произвольных многообразий. Иной подход к алгебраической геометрии универсальных алгебр, основанный на традиционной теории моделей, разрабатывался В. Н. Ремесленниковым и его группой [1]. В обоих случаях одними из основных понятий являются понятия алгебраического множества универсальной алгебры и решетки этих самых алгебраических множеств. В настоящей работе на основе ряда публикаций автора [2–6] предложен и систематизирован еще один подход к этим понятиям, основанный на понятии внутреннего гомоморфизма универсальной алгебры, введенном в работе, [7] и предложены описание решеток алгебраических множеств как факторов некоторых частичных порядков естественным образом связанных с универсальными алгебрами, а также условия совпадения алгебраических множеств универсальных алгебр с идентичными основными множествами.

2. Алгебраические множества и их решётки

Прежде всего напомним ряд основных понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр согласно Б. И. Плоткину и В. Н. Ремесленникову. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое фиксированное многообразие универсальных алгебр сигнатуры σ. Для любого множества X через $F_{\mathfrak{M}}(X)$ обозначим $\mathfrak{M}$ — свободно порожденную множеством X алгебру. Для любых алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >\in \mathfrak{M}$ и $F_{\mathfrak{M}}(X)$, где X — конечное множество, через $\mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех гомоморфизмов μ из $F_{\mathfrak{M}}(X)$ в $\mathfrak{A}$, рассматриваемую (при естественном отождествлении гомоморфизма μ с кортежем $\mu(X)$) как афинное пространство над множеством A, состоящее из точек (гомоморфизмов $\mu : F_{\mathfrak{M}}(X) \to \mathfrak{A}$) $\mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A}) = A^n$, где $n = |X|$.

Для любой системы уравнений

$$T = \{s_i(\overline{x}_i) = t_i(\overline{y}_i)|i \in I\}.$$

(Здесь $\overline{x}_i, \overline{y}_i \subseteq X$, $s_i(\overline{x}_i)$, $t_i(\overline{y}_i)$ σ-термы от переменных $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_i$ соответственно (элементы алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$)), рассматриваемой как бинарное отношение $T \subseteq F_{\mathfrak{M}}(X) \times F_{\mathfrak{M}}(X)$ на $F_{\mathfrak{M}}(X)$, точка (гомоморфизм)μ : $F_{\mathfrak{M}}(X) \to \mathfrak{A}$ является решением системы T если $\mu(s_i(\overline{x}_i)) = s_i^{\mathfrak{A}}(\mu(\overline{x}_i)) = t_i^{\mathfrak{A}}(\mu(\overline{y}_i)) = \mu(t_i(\overline{y}_i))$ для каждого уравнения $s_i(\overline{x}_i) = t_i(\overline{y}_i)$ из T. Здесь $s_i^{\mathfrak{A}}(\mu(\overline{x}_i)$ — значение терма s_i на элементах $\mu(\overline{x}_i)$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Таким образом, точка μ является решением системы уравнений T тогда и только тогда, когда $T \subseteq Ker\mu$.

Тем самым, сопоставляя каждой совокупности точек

$$B \subseteq \mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A})$$

бинарное отношение B' на $F_{\mathfrak{M}}(X)$ и каждому бинарному отношению $T \subseteq F_{\mathfrak{M}}(X) \times F_{\mathfrak{M}}(X)$ на $F_{\mathfrak{M}}(X)$ совокупность точек $T'_{\mathfrak{A}}$ пространства $\mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A})$ следующим образом:

$$T \to T'_{\mathfrak{A}} = \{\mu : (F_{\mathfrak{M}}(X) \to \mathfrak{A} \mid T \subseteq Ker\mu\},$$

$$B \to B' = \bigcap_{\mu \in B} Ker\mu,$$

получаем соответствие Галуа между бинарными отношениями (системами уравнений) T на алгебре $F_{\mathfrak{M}}(X)$ и множествами точек B пространства $\mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A}) = A^n$. *Конгруэнция* T алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$ называется $\mathfrak{A}$-*замкнутой*, если $T = B'$ для некоторой совокупности точек $B \subseteq \mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A})$. *Совокупность точек* $B \subseteq \mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathfrak{A}) = A^n$ называется $\mathfrak{A}$-*замкнутой* или *алгебраическим множеством алгебры* $\mathfrak{A}$, если $B = T'_{\mathfrak{A}}$ для некоторого бинарного отношения T на $F_{\mathfrak{M}}(X)$, т. е. если она суть совокупность решений в алгебре $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы термальных уравнений сигнатуры σ.

Непосредственно замечается, что совокупность алгебраических множеств $B \subseteq A^n$ пространства A^n для алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ образует полную решетку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. Обозначим последнюю в дальнейшем как $Alg_n\mathfrak{A}$. .

Естественным образом представляет интерес описание этих решеток как в различных алгебраических терминах, так или иначе связанных с алгеброй, так и самих по себе с точностью до изоморфизма. По поводу последнего укажем, в частности, на работы [8; 9], где доказано, что любая полная решетка изоморфна решетке вида $Alg_1\mathfrak{A}$ для подходящей универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ и отмечен ряд открытых вопросов, связанных с описанием с точностью до изоморфизма решеток вида $Alg_n\mathfrak{A}$ для $n \geq 2$.

Через $Con_{\mathfrak{A}}F_{\mathfrak{M}}(n)$ обозначим решетку $\mathfrak{A}$-замкнутых конгруэнций алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$, где $n = |X|$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ — многообразие, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$. Указанное выше Галуа-соответствие между $\mathfrak{A}$-замкнутыми конгруэнциями алгебры $\mathfrak{A}$ и алгебраическими множествами для алгебры $\mathfrak{A}$ влечет двойственность решеток $Con_{\mathfrak{A}}F_{\mathfrak{M}}(n)$ и $Alg_n\mathfrak{A}$.

Напомним, что *внутренним гомоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ (см. [7]) называется любой гомоморфизм между подалгебрами этой алгебры. Через $Ihm\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность (полугруппу относительно суперпозиции частичных отображений множества A в себя) всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$.

Для любого кортежа $\overline{a} =< a_1, \ldots, a_n >$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ через $D^+_{\overline{a},\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим позитивную диаграмму кортежа $\overline{a}$ в алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. совокупность всех термальных уравнений сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ истинных в $\mathfrak{A}$ на кортеже $\overline{a}$

$D^+_{\overline{a},\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{s(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n) | t$ и s термы сигнатуры σ, т.е. элементы алгебры $F_{\mathfrak{M}}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ и $\mathfrak{A} \models s(a_1, \ldots, a_n) = t(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Таким образом для кортежа $\overline{b} =< b_1, \ldots, b_n >\in A^n$ $\mathfrak{A} \models D^+_{\overline{a},\mathfrak{A}}(\overline{b})$ тогда и только тогда, когда отображение $\varphi(a_i) = b_i$, для $i = 1, \ldots, n$ продолжимо до гомоморфизма подалгебры $< \overline{a} >$ порожденной в алгебре $\mathfrak{A}$ элементами $\{a_1, \ldots, a_n\}$ на подалгебру $< \overline{b} >$.

На кортежах $\overline{a} =< a_1, \ldots, a_n >\in A^n$ (отождествляемых с точками $\mu_{\overline{a}}$ пространства $\mathfrak{M}(F_{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}(\{x_1, \ldots, x_n\}), \mathfrak{A})$ — гомоморфизмами алгебры $F_{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ в алгебру $\mathfrak{A}$ такими, что $\mu_{\overline{a}}(x_i) = a_i$) введем отношение квазипорядка $\leq_{Ihm_n\mathfrak{A}}$ следующим образом: $\overline{b} \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}} \overline{a}$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in Ihm\mathfrak{A}$, такой, что $\varphi(a_i) = b_i$, т. е. когда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} & & \mathfrak{A} \arrow[ll, dashed, "\varphi"] \\ & F_{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \arrow[ul, "\mu_{\overline{b}}"] \arrow[ur, "\mu_{\overline{a}}"'] & \end{tikzcd}$$

или иначе, как замечено выше, когда $\mathfrak{A} \models D^+_{\overline{a},\mathfrak{A}}(\overline{b})$.

Квазиупорядоченное множество $< C; \leq >$ назовем *квазирешеткой*, если решеткой является его фактор-множество $< C/ \backsim; \leq >$ по естественной эквивалентности $\backsim$ определенной квазипорядком $\leq$: $c_1 \backsim c_2 \Leftrightarrow c_1 \leq c_2$ и $c_2 \leq c_1$. Естественным образом перенесем на квазипорядок $< C; \leq >$ основные понятия, связанные с частичным порядком, имея в виду апелляцию к частично упорядоченному множеству $< C/ \backsim; \leq >$. В частности, будем говорить о супремумах в квазиупорядоченных множествах, а под квазирешеткой (полной квазирешеткой) будем понимать любой квазипорядок $< C; \leq >$, такой, что $< C/ \backsim; \leq >$ является решеткой (полной решеткой) при добавлении к $< C/ \backsim; \leq >$, при необходимости, внешнего наименьшего элемента.

Пусть $\mathfrak{A}' =< A'; \sigma >$ — некоторое расширение алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$. *Множество* $\overline{B} \subseteq A^n$ назовем [6]) *насыщенным в алгебре* $\mathfrak{A}$ *относительно кортежа* $\overline{c} =< c_1, \ldots, c_n >\in (A')^n$ если

$$B = \{\overline{a} \in A^n | \overline{a} \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} \overline{c}\}.$$

Таким образом любое насыщенное в алгебре $\mathfrak{A}$ относительно некоторого кортежа $\overline{c}$ элементов из некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ множество $B \subseteq A^n$ является алгебраическим множеством для алгебры $\mathfrak{A}$:

$$B = \{\overline{a} \in A^n | \mathfrak{A} \models D^+_{\overline{c},\mathfrak{A}'}(\overline{a})\}.$$

На самом деле верно и обратное. Пусть $B \subseteq A^n$ — некоторое алгебраическое для алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ множество и

$$B = \{\overline{b}^i =< b_1^i, \ldots, b_n^i > | i \in I\}.$$

Пусть $T(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap\limits_{i \in I} D^+_{\overline{b}^i, \mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$. Алгебраичность множества B означает, что

$$(*) B = \{< a_1, \ldots, a_n > \in A^n | \mathfrak{A} \models T(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Для алгебры $\mathfrak{A}^{A^n}$ отождествим элементы a алгебры $\mathfrak{A}$ с элементами $\widetilde{a}$ из $\mathfrak{A}^{A^n}$, такими, что $\widetilde{a}(j) = a$ для любого $j \in A^n$. Элементы $b_l \in \mathfrak{A}^{A^n}$ (для $l = 1, \ldots, n$) определим так, чтобы $\{< b_1(j), \ldots, b_n(j) > | j \in A^n\} = B$. Тогда $D^+_{<b_1,\ldots,b_n>, \mathfrak{A}^{A^n}}(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n)$. В частности B состоит из $Ihm_n \mathfrak{A}^{A^n}$-образов кортежа $< b_1, \ldots, b_n >$ в алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. B насыщенное в $\mathfrak{A}$ множество относительно кортежа $< b_1, \ldots, b_n >$ элементов из расширения $\mathfrak{A}^{A^n}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом имеет место

Теорема 1. ([6]) *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ множество $B \subseteq A^n$ является алгебраическим для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда для некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ и для некоторого кортежа $< b_1, \ldots, b_n >$ элементов из $\mathfrak{A}'$ множество B является насыщенным в $\mathfrak{A}$ относительно кортежа $< b_1, \ldots, b_n >$.*

Алгебра $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ называется *n-алгебраически полной* (см. [4]), если для любого $\mathfrak{A}$ — алгебраического множества $B \subseteq A^n$ — существует $\overline{c} \in A^n$, такое, что $\overline{c}/\sim = sup\{\overline{b}/\sim | \overline{b} \in B\}$. Для n-алгебраически полной алгебры $\mathfrak{A}$ квазиупорядоченное множество $< A^n; \leq_{Ihm_n \mathfrak{A}}>$ является полной квазирешеткой. Расширение $\mathfrak{A}' =< A';\sigma >$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется *n-алгебраическим пополнением алгебры* $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}'$ n-алгебраически полно и для любого $\overline{c} \in (A')^n$ $\overline{c}/\sim = sup\{\overline{b}/\sim | \overline{b} \in B\}$ для некоторого алгебраического для $\mathfrak{A}$ множества $B \subseteq A^n$. Приведенное выше доказательство теоремы 1 фактически доказывает, что для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ алгебра $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{A^n}$ является n-алгебраическим пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. В работе [4] доказано также существование для любой универсальной алгебры не более чем счетной сигнатуры и имеющей мощность $\aleph \geq 2^{\aleph_0}$ ее n-алгебраического пополнения той же мощности $\aleph$. При этом ограничение $\aleph \geq 2^{\aleph_0}$ существенно.

Поскольку равенство $\overline{c}/\sim = sup\{\overline{b}/\sim | \overline{b} \in B\}$ для алгебраического для алгебры $\mathfrak{A}$ множества $B \subseteq A^n$ из приведенного выше определения n-алгебраического пополнения алгебры $\mathfrak{A}$, означает насыщенность в $\mathfrak{A}$ множества B относительно кортежа $\overline{c}$, то из утверждения теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любых универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ и некоторого ее n-алгебраического пополнения $\mathfrak{A}' =< A';\sigma >$ совокупность* *алгебраических для $\mathfrak{A}$ множеств $B \subseteq A^n$ совпадает с совокупностью пересечений множества A^n с главными идеалами квазиупорядоченного множества $< (A')^n; \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} >$.*

Для любых универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и некоторого ее n-алгебраического пополнения $\mathfrak{A}' =< A'; \sigma >$ на квазиупорядоченном множестве $< (A')^n, \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} >$ введем отношение эквивалентности $\sim_{\mathfrak{A}}$: для $\overline{c}, \overline{d} \in (A')^n$ положим $\overline{c} \sim_{\mathfrak{A}} \overline{d}$ если

$$\{\overline{a} \in A^n | \overline{a} \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} \overline{c}\} = \{\overline{a} \in A^n | \overline{a} \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} \overline{d}\}.$$

Непосредственно замечается, что отношение $\sim_{\mathfrak{A}} / \sim$ является конгруэнцией на решетке $< (A')^n / \sim; \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} >$ и из следствия 1 вытекает утверждение

Следствие 2. *Решетка алгебраических множеств $B \subseteq A^n$ для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ изоморфна решетке*

$$< (A')^n / \sim; \leq_{Ihm_n\mathfrak{A}'} >$$

для любого n-алгебраического пополнения $\mathfrak{A}' =< A'; \sigma >$ алгебры $\mathfrak{A}$.

3. Условия совпадения совокупностей алгебраических множеств для алгебр с идентичными основными множествами

Наконец, в терминах внутренних гомоморфизмов сформулируем условия совпадения совокупностей алгебраических множеств для универсальных алгебр с идентичными основными множествами.

Следствие 3. *Для любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 =< A; \sigma_1 >$ и $\mathfrak{A}_2 =< A; \sigma_2 >$ с одним и тем же основным множеством A и любого натурального n имеет место:*

1) совпадение совокупностей внутренних гомоморфизмов алгебр $\mathfrak{A}_1^{A^n}$ и $\mathfrak{A}_2^{A^n}$ между не более чем n-порожденными подалгебрами этих алгебр влечет совпадение алгебраических для алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ множеств — подмножеств множества A^n;

2) ([10]) равенства $Alg_n\mathfrak{A}_1 = Alg_n\mathfrak{A}_2$ для любого n и $Sub\mathfrak{A}_1 = Sub\mathfrak{A}_2$ влекут равенство $Ihm\mathfrak{A}_1 = Ihm\mathfrak{A}_2$.

Доказательство. Доказательство утверждения 1) вытекает из утверждения следствия 1, из определения отношения $\leq_{Ihm_n}$ и того, что алгебры $\mathfrak{A}_i^{A^n}$ являются n-алгебраическими пополнениями алгебр $\mathfrak{A}_i$.

Утверждение 2) — это утверждение леммы 1 из работы [10].

В связи с утверждениями 1) и 2) следствия 3 естественно возникает вопрос о взаимосвязи равенств $Ihm\mathfrak{A}_1 = Ihm\mathfrak{A}_2$ и $Ihm\mathfrak{A}_1^{A^n} = Ihm\mathfrak{A}_2^{A^n}$ (и даже $Ihm\mathfrak{A}_1^2 = Ihm\mathfrak{A}_2^2$).

При естественном отождествлении алгебры $\mathfrak{A}$ с диагональной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}^2$ равенство $Ihm\mathfrak{A}_1^2 = Ihm\mathfrak{A}_2^2$ очевидным образом влечет равенство $Ihm\mathfrak{A}_1 = Ihm\mathfrak{A}_2$. Но при этом обратная импликация ложна. Действительно, пусть $\mathfrak{A}_1$ — это трехэлементная группа, а $\mathfrak{A}_2$ — это группа $\mathfrak{A}_1$ обогащенная добавлением в ее сигнатуру дискриминаторной функции. Тогда в силу конгдуэнц-дистрибутивности многообразия порожденного алгеброй $\mathfrak{A}_2$ гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}_2^2$ в себя исчерпываются ее проектированиями, в то время как для группы $\mathfrak{A}_1^2$ это, как известно, не так. То есть условие $Ihm\mathfrak{A}_1^{A^n} = Ihm\mathfrak{A}_2^{A^n}$ сильнее условия $Ihm\mathfrak{A}_1 = Ihm\mathfrak{A}_2$. □

4. Заключение

Предложен еще один метод представления решеток алгебраических множеств на универсальных алгебрах.

Список литературы

1. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2016.
2. Пинус А. Г. Алгебраическая и логическая геометрии универсальных алгебр (унифицированный подход)// Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 1. С. 189–204.
3. Пинус А.Г. О квазипорядке, индуцированном внутренними гомоморфизмами, и об операторе алгебраического замыкания // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 3. С. 629–636. https://doi.org/10.1134/S0037446615030131
4. Пинус А. Г. n-Алгебраически полные алгебры, псевдопрямые произведения и оператор алгебраического замыкания на подмножествах универсальных алгебр // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 4. С. 97–102.
5. Пинус А. Г. Ihm-квазипорядки и производные структуры универсальных алгебр. 1-алгебраически полные алгебры // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2015. Т. 12, № 1. С. 72–78.
6. Пинус А. Г. Алгебраические множества и внутренние гомоморфизмы универсальных алгебр // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы Междунар. конф. Тула, 2019. С. 111–112.
7. Пинус А. Г. Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 158–173. https://doi.org/10.1023/A:1010208820824

8. Пинус А. Г. О решетках алгебраических подмножеств универсальных алгебр // Алгебра и теория моделей. 8. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. С. 67–72.
9. Пинус А. Г. О геометрически близких алгебрах // Алгебра и теория моделей. 7. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009.С. 85–95.
10. Пинус А. Г. Об алгебрах с идентичными алгебраическими Множествами // Алгебра и логика. 2016. Т. 54, № 4. С. 493–502. https://doi.org/10.1007/s10469-015-9351-8
11. Плоткин Б. И. Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 224–248.
12. Плоткин Б. И. Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 3. С. 181–197.
13. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М. : Мир, 1970.
14. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М. : МЦНМО, 2007.

Александр Георгиевич Пинус, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, Российская Федерация, 630072, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: (383)223-83-80 (e-mail: ag.pinus@gmail.com)

Поступила в редакцию 05.08.19

On the Representation of the Lattices of the Algebraic Sets of the Universal Algebras

A. G. Pinus

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. The concept of an algebraic set is a basic concept of the classical algebraic geometry over fields. This concept, along with the concept of an algebraic lattice of algebraic sets is the basic concept of so-called algebraic geometry of universal algebras. Moreover, there are traditionally two approaches to the definition of algebraic sets: the first is a direct generalization of the classical situation of the concept of the algebraic set over a field and connected with the homomorphisms of free algebras in the considered algebra, the second is formulated within the framework of the traditional model theory.

In this paper we propose another approach to the characterisation of algebraic sets based on the concept of the inner homomorphisms of some extensions of considered algebra. Based on this approach we introduce the other representation of the lattices of the algebraic sets of universal algebras. Also we propose the criterion, in terms of internal homomorphisms, of the coincidence of the families of the algebraic sets of universal algebras with identical basic sets.

Keywords: algebraic set, lattice, innere homomorphism.

References

1. Danijarova E.Ju., Mjasnikov A.G., Remeslennikov V.N. The Algebraic geometry over algebraic systems. Novosibirsk, SB RAN Publ., 2016. (in Russian)

2. Pinus A.G. Algebraic and logical geometry of universal algebras (unified approach). *Fundamental and applied mathematic*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 189-204. (in Russian)
3. Pinus A.G. On the quasiorder which induced by innere homomorphisms and on the algebraic closure operator. *Siberian mathematical Journal,* 2015, vol. 56, no. 3, pp. 629-636. (in Russian) https://doi.org/10.1134/S0037446615030131
4. Pinus A.G. n-Algebraic complete algebras, pseudodirect products and the algebraic closure operator on the subsets of universal algebras. *Siberian Journal of pure and applied matematic,* 2016, vol. 16, no. 4, pp. 97-102. (in Russian)
5. Pinus A.G. Ihm-quasiorders and derived structures of universal algebras. 1-algebraic complete algebras. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2015, vol. 12, no. 1, pp. 72-78. (in Russian)
6. Pinus A.G. Algebraic sets and innere homomorphisms of universal algebras. *Algebra, the numbers theory and discrete geometry and historical problems. The materials of the international conference.* Tula, 2019, pp. 111-112. (in Russian)
7. Pinus A.G. Innere homomorphisms and positive conditional terms. *Algebra and logic,* 2001, vol. 40, no. 2, pp. 158-173. (in Russian) https://doi.org/10.1023/A:1010208820824
8. Pinus A.G. On the lattices of the algebraic subsets of universal algebras. *Algebra and model theory. 8.* Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University Publ., 2011, pp. 67-72. (in Russian)
9. Pinus A.G. On the geometrically similar algebras. *Algebra and model theory. 7.* Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University Publ., 2009, pp. 85-95. (in Russian)
10. Pinus A.G. On the algebras with ihe identical algebraic sets. *Algebra and logic,* 2016, vol. 54, no. 4, pp. 493-502. (in Russian) https://doi.org/10.1007/s10469-015-9351-8
11. Plotkin B.I. Some concepts of algebraic geometry in universal algebra. *Algebra and analisis*, 1997, vol. 9, no. 4, pp. 224-248. (in Russian)
12. Plotkin B.I. Problems of algebra which are inspired by universal algebraic geometry. *Fundamental and applied mathematic,* 2004, vol. 10, no. 3, pp. 181-197.(in Russian)
13. Hartshorn R. Algebraic Geometry. Moscow, Mir Publ., 1970. (in Russian)
14. Shafarevich I.R. The basis of algebraic geometry. Moscow, MCNMO Publ., 2007. (in Russian)

Alexandr Pinus, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630072, Russian Federation, tel.: (383)223-83-80
(e-mail: `ag.pinus@gmail.com`)

Received 05.08.19