Серия «Математика»
2019. Т. 28. С. 123—137

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.95, 517.98
MSC 35R30, 35R11, 34G10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.123

Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова – Капуто в секториальном случае *

В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова
Челябинский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. Исследуется однозначная разрешимость класса линейных обратных задач с независящим от времени неизвестным коэффициентом в эволюционном уравнении в банаховом пространстве, разрешенном относительно дробной производной Герасимова – Капуто. Предполагается, что оператор из правой части уравнения порождает экспоненциально ограниченное аналитическое в секторе, содержащем положительную полуось, семейство разрешающих операторов соответствующего однородного уравнения. Показано, что для корректности обратной задачи в качестве пространства исходных данных необходимо выбирать область определения порождающего оператора, снабженную нормой его графика. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи. Полученные абстрактные результаты используются для нахождения условий разрешимости обратной задачи для одного класса уравнений в частных производных дробного порядка по времени. Рассмотренный пример, в частности, показывает, что при выборе в качестве пространства исходных данных не области определения порождающего оператора, а всего пространства обратная задача является некорректной.

Ключевые слова: обратная задача, дробная производная Герасимова – Капуто, эволюционное уравнение, разрешающее семейство операторов.

1. Введение

В прикладных исследованиях часто возникают обратные задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами [4; 6;

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, госзадание 1.6462.2017/БЧ, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант 19-41-450001.

7; 9; 11–14; 16–18; 20; 26; 27; 31], поэтому актуальным является развитие соответствующей теории. В последние десятилетия при математическом моделировании различных реальных процессов все чаще используются дифференциальные уравнения с дробными производными [3; 15; 25; 28; 30; 32]. Исследованию обратных задач для различных дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены работы многих авторов [2; 22; 28; 29].

В работах [23; 24] исследованы вопросы разрешимости линейных обратных задач для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u + y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.1}$$

Здесь D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L, M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — линейные замкнутые плотно определенные в $\mathcal{X}$ операторы, $\ker L \neq \{0\}$, оператор M (L,σ)-ограничен, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $y : [0,T] \to \mathcal{Y}$, $T > 0$. Для уравнения (1.1) задаются условия Коши

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

а условие переопределения при постоянном по t неизвестном элементе u имеет вид

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T.$$

При этом, в частности, необходимо исследовать аналогичную обратную задачу на подпространстве невырождения исходного пространства для эволюционного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

разрешенного относительно дробной производной, которая представляет и самостоятельный научный интерес. При условии сильной (L,σ)-ограниченности оператора M, используемом в [23; 24], уравнение (1.2) имеет ограниченный оператор A. Чтобы перейти к более общему случаю, когда $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, надо исследовать уравнение (1.2) с неограниченным оператором A класса $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Именно этому посвящена данная работа. Как уже замечено ранее для уравнения первого порядка [8], в этом случае для корректности обратной задачи в качестве пространства исходных данных необходимо выбирать область определения D_A неограниченного оператора A, снабженную нормой его графика. Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы на примере уравнения в частных производных. Пример, в частности, показывает, что при выборе в качестве пространства исходных данных не D_A, а всего пространства $\mathcal{Z}$ обратная задача является некорректной.

2. Обратная задача для уравнения в банаховом пространстве

Обозначим $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$, J_t^0 — тождественный оператор, $J_t^\delta h(t) := (g_\delta * h)(t) := \int\limits_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds$. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка m, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, т. е.

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\right).$$

Рассмотрим разрешенное относительно дробной производной уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

Здесь D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, A — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ с плотной областью определения D_A (сокращенно $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$), D_A — банахово пространство с нормой графика оператора $A, T > 0$, элемент u принадлежит банахову пространству $\mathcal{U}$, $B \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))$, где $\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{Z}$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$. Для уравнения (2.1) зададим условия Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.2}$$

и условие переопределения

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t) = z_T. \tag{2.3}$$

Скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$.

Рассмотрим сначала прямую задачу (2.1), (2.2), элемент $u \in \mathcal{U}$ при этом будем считать известным. Под решением задачи (2.1), (2.2) будем понимать вектор-функцию $z \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z}) \cap C([0,T];D_A)$, для которой $g_{m-\alpha} * \left(z - \sum\limits_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)g_{k+1}\right) \in C^m([0,T];\mathcal{Z})$ и выполняются равенства (2.1) и (2.2).

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$. Введем также обозначения $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество операторов $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется разрешающим семейством операторов для однородного уравнения (2.1), если выполняются следующие условия:

(i) отображение $Z(\cdot)$ сильно непрерывно на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $Z(0) = I$;

(ii) для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $Z(t)[D_A] \subset D_A$, $Z(t)Az_0 = AZ(t)z_0$ при любом $z_0 \in D_A$;

(iii) для каждого $z_0 \in D_A$ функция $Z(t)z_0$ является решением задачи Коши $z(0) = z_0$, $z^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для однородного уравнения (2.1).

В обозначениях работы [19] оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу операторов $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если существует разрешающее семейство операторов $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ для однородного уравнения (2.1), допускающее аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2, t \neq 0\}$ и для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдётся такая константа $C(\theta, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\theta$ $\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}t}$. Согласно теореме 2.14 [19] при $\alpha \in (0, 2)$ $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдётся такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|},$$

где $R_{\mu^\alpha}(A) = (\mu^\alpha I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A в точке μ^α, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A.

Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha > 0$ обозначим множество операторов, для которых выполняются условия (i) и (ii) из предыдущего абзаца. Таким образом, $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0) = \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 2)$. Известно, что если оператор принадлежит классу $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha > 2$, то он ограничен.

Лемма 1. [15] *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Gamma = \partial S_{a_1, \theta_1}$ для некоторых $a_1 > a_0$, $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0)$. Тогда семейства операторов*

$$\left\{ Z_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-\beta}(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+ \right\}, \ \beta \in \mathbb{R},$$

аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2, t \neq 0\}$. При этом для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что при всех $t \in \Sigma_\theta$

$$\|Z_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1} + a)^{1-\beta}, \quad \beta \leq 1, \tag{2.4}$$

$$\|Z_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a)e^{a\mathrm{Re}\tau}|\tau|^{\beta-1}, \quad \beta > 1. \tag{2.5}$$

Обозначим $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ при $\gamma \in (0, 1]$, если существует такое $C > 0$, что неравенство $\|f(t) - f(s)\|_\mathcal{Z} \leq C|t - s|^\gamma$ выполняется при всех $t, s \in [0, T]$. Точная нижняя грань множества таких констант C обозначается как $\|f\|_{C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $u \in \mathcal{U}$ *и выполняется хотя бы одно из условий:*

(i) $B \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};D_A))$, $f \in C([0,T];D_A)$;

(ii) $B \in C^\gamma([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$.

Тогда при любых $z_k \in D_A$, $k = 0,1,\dots,m-1$, *существует единственное решение задачи* (2.1), (2.2). *При этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha,k+1}(t)z_k + \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)(B(s)u + f(s))ds. \tag{2.6}$$

Утверждение данной теоремы с условием (i) доказано в [15], с условием (ii) — в [21].

Теперь будем рассматривать обратную задачу (2.1)–(2.3), считая элемент u в уравнении (2.1) неизвестным. Назовем элемент $u \in \mathcal{U}$ решением задачи (2.1)–(2.3), если соответствующее решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет условию переопределения (2.3).

В силу формулы (2.6) элемент u является решением задачи (2.1)–(2.3) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\chi(A)u = \psi(A), \tag{2.7}$$

где $\chi(A)$ и $\psi(A)$ определены формулами:

$$\chi(A) := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)B(s)ds,$$

$$\psi(A) := z_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha,k+1}(t)z_k d\mu(t) - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds.$$

Поскольку по определению решения z задачи (2.1), (2.2) выполняется $z \in C([0,T];D_A)$, то $\int_0^T z(t)d\mu(t) \in D_A$, а значит и вектор z_T из условия переопределения (2.3) должен лежать в D_A, чтобы обратная задача была разрешима. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha,k+1}(t)z_k + \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds$$

также является решением задачи (2.1), (2.2) при $u = 0$, то

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha,k+1}(t)z_k d\mu(t) + \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds \in D_A.$$

Следовательно, в уравнении (2.7) с необходимостью должно выполняться включение $\psi(A) \in D_A$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in D_A$, $B \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, *и функция* $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию. Тогда для однозначной разрешимости задачи* (2.1)–(2.3) *необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный обратный оператор* $\chi(A)^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi(A)^{-1}\psi(A)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{D_A} + \|z_T\|_{D_A} + \|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} \right). \tag{2.8}$$

Доказательство. По теореме 1 (ii) решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует при любых $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{U}$. При этом оно имеет вид (2.6). Подставим решение (2.6) в условие (2.3):

$$\int_0^T d\mu(t) \left(\sum_{k=0}^{m-1} t^k Z_{\alpha,k+1}(t) z_k + \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s)(B(s)u + f(s))ds \right) = z_T$$

Отсюда получим равносильное задаче (2.1)–(2.3) уравнение (2.7) с правой частью из D_A, как было показано выше. Его разрешимость при любом $\psi(A) \in D_A$ в точности означает существование обратного оператора $\chi(A)^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})$.

При выполнении условий данной теоремы в [21] было получено равенство

$$A \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s) f(s) ds = \int_0^t Z_{\alpha,0}(t-s)(f(s) - f(t))ds + (Z_{\alpha,1}(t) - I) f(t),$$

откуда с учетом неравенств (2.4), (2.5) следует, что

$$\left\| \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha,k+1}(t) z_k d\mu(t) + \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{\alpha,\alpha}(t-s) f(s) ds \right\|_{D_A} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{D_A} + C_2 \|f\|_{C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})}.$$

Поэтому в силу теоремы Банаха об обратном операторе для u справедлива оценка устойчивости (2.8). □

Аналогично, но с использованием теоремы 1 (i) доказывается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $z_T \in D_A$, $B \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; D_A))$, $f \in C([0,T]; D_A)$ и функция $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.3) необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный обратный оператор $\chi(A)^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})$. При этом решение имеет вид $u = \chi(A)^{-1}\psi(A)$ и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{D_A} + \|z_T\|_{D_A} + \|f\|_{C([0,T];D_A)} \right). \tag{2.9}$$

Отличие от предыдущего случая в условиях данной теоремы на функцию f очевидным образом влечет отличие в правой части оценки устойчивости (2.9) от ее аналога (2.8).

Замечание 1. Можно заметить, что получены результаты об однозначной разрешимости обратной задачи, которые можно назвать теоремами о ее корректности, если корректность задачи (2.1)–(2.3) определить как ее однозначную разрешимость при любых $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $z_T \in D_A$ и выполнение оценки устойчивости (2.8) или (2.9) соответственно.

Замечание 2. Если в качестве оператора $B(t)$ выступает оператор умножения на скалярную функцию $b(t)$, как в работах [8;24;26], то $\mathcal{U}$ — подпространство пространства $\mathcal{Z}$.

Замечание 3. В идеале вопрос о непрерывной обратимости оператора $\chi(A)$ хотелось бы связать с условием на спектр $\sigma(A)$ оператора A: $\chi(z) \neq 0$ при всех $z \in \sigma(A)$. В случае ограниченного оператора A для этого сразу можно применить теорему о спектральном отображении, однако для неограниченного оператора A этот вопрос гораздо более тонкий даже в случае $\alpha = 1$ (см. [8]). Мы оставим его на будущее.

3. Обратные задачи для уравнений в частных производных

Пусть $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$, $Q_p(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{p} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, p$, $c_n \neq 0$, $d_p \neq 0$, $n < p$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен [10], где

$$(\Lambda u)(s) = \sum_{|q| \leq 2r} a_q(s) D_s^q u(s), \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) = \sum_{|q|\le r_l} b_{lq}(s) D_s^q u(s), \;\; b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\, l = 1, 2, \ldots, r,$$

$D_s^q = D_{s_1}^{q_1} \ldots D_{s_d}^{q_d}$, $D_{s_i}^{q_i} = \partial^{q_i}/\partial s_i^{q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$.

Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [10] равенством $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Пусть оператор Λ_1 самосопряжен и имеет ограниченный справа спектр. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный, дискретный и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Пусть $\alpha \in (0, 2)$, рассмотрим обратную задачу

$$v(s, 0) = v_0(s), \;\; s \in \Omega, \quad \text{при}\, \alpha \in (1, 2) \; \frac{\partial v}{\partial t}(s, 0) = v_1(s), \;\; s \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$B_l \Lambda^k v(s, t) = 0, \; k = 0, 1, \ldots, p-1, \; l = 1, 2, \ldots, r, \; (s, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{3.2}$$

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda) v(s, t) = Q_p(\Lambda) v(s, t) + b(t) u(s), \;\; (s, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{3.3}$$

$$\int_0^T v(s, t) d\mu(t) = v_T(s), \;\; s \in \Omega, \tag{3.4}$$

где $v_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $v_T : \Omega \to \mathbb{R}$, $b : [0, T] \to \mathbb{R}$ и функция ограниченной вариации $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ заданы, функции $v : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ неизвестны.

Положим $\mathcal{Z} = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k w(x) = 0, \; k = 0, 1, \ldots, n-1, \; l = 1, 2, \ldots, r, \; x \in \partial\Omega\}$. При условии непрерывной обратимости оператора $P_n(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \to L_2(\Omega)$ определим на банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ оператор $Az = [P_n(\Lambda_1)]^{-1} Q_p(\Lambda) z$ с областью определения $D_A = \{v \in H^{2rp}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(x) = 0, k = 0, \ldots, p-1, \; l = 1, \ldots, r, \; x \in \partial\Omega\}$.

Нетрудно показать, что оператор $P_n(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \to L_2(\Omega)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда среди нулей многочлена $P_n(\lambda)$ нет точек спектра $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1.

Теорема 4. [15]. *Пусть $p > n$, $(-1)^{p-n}(d_p/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$. Тогда при $\alpha \in [1, 2)$ существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, что $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$. Если, кроме того, $\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\{Q_p(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\} < 1$, то $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 1)$. При этом для $\alpha \in (0, 2)$ $\sigma(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \; \mu = Q_p(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\}$.*

Теорема 5. *Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $p > n$, $(-1)^{p-n}(d_p/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$,*

$v_k \in D_A$ *при* $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $v_T \in D_A$, $b \in C^\gamma([0,T];\mathbb{R})$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда обратная задача* (3.1)–(3.4) *имеет единственное решение в том и только в том случае, когда существует такое* $c > 0$, *что при всех* $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\frac{(t-s)^\alpha Q_p(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) b(s)ds \right| \geq c|\lambda_k|^{n-p}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать теоремы 2 и 4, при этом $B(t) = b(t)[P_n(\Lambda_1)]^{-1}$. Для использования теоремы 2 выберем пространство $\mathcal{U} = L_2(\Omega)$. Тогда при $\mu_k = Q_p(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)$

$$Z_{\alpha,\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=1}^\infty \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k e^{\mu t}}{\mu^\alpha - \mu_k} d\mu = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{t\Gamma} \frac{t^{\alpha-1}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k e^\lambda}{\lambda^\alpha - t^\alpha\mu_k} d\lambda =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty t^{\alpha(n+1)-1}\mu_k^n\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k \frac{1}{2\pi i}\int_{t\Gamma} e^\lambda \lambda^{-\alpha(n+1)} d\lambda =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{\alpha(n+1)-1}\mu_k^n\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\Gamma(\alpha(n+1))} = \sum_{k=1}^\infty t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\mu_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$$

в силу формулы Ганкеля [1]. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Далее

$$\chi(A) = \sum_{k=1}^\infty \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha\mu_k)b(s)ds[P_n(\Lambda_1)]^{-1}.$$

Непрерывная обратимость этого оператора, действующего из $L_2(\Omega)$ в D_A равносильна условию (3.5). □

Возьмем в качестве μ функцию скачка в точке $t = T$, тогда условие переопределения примет вид

$$v(s,T) = v_T(s), \quad s \in \Omega. \quad (3.6)$$

Следствие 1. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $p > n$, $(-1)^{p-n}(d_p/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит нулей многочлена* $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ *при* $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $v_T \in D_A$, $b \in C^\gamma([0,T];\mathbb{R})$, $\gamma \in (0,1]$, $|b(t)| \geq b_0 > 0$ *при* $t \in [0,T]$. *Тогда обратная задача* (3.1)–(3.3), (3.6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. В данном случае

$$\chi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((T-s)^{\alpha}\mu_k)b(s)ds[P_n(\Lambda_1)]^{-1},$$

при этом

$$\left|\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((T-s)^{\alpha}\mu_k)b(s)ds\right|=$$

$$=\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((T-s)^{\alpha}\mu_k)|b(s)|ds\geq$$

$$\geq b_0\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((T-s)^{\alpha}\mu_k)ds=b_0T^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(T^{\alpha}\mu_k)\neq 0,$$

так как функции $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ и $E_{\alpha,\alpha+1}(\cdot)$ (в обозначениях работы [5] — функции $E_{1/\alpha}(\cdot;\alpha)$ и $E_{1/\alpha}(\cdot;\alpha+1)$) не имеют вещественных нулей при $\alpha\in(0,1)$ по теореме 4.1.1 [5]. При этом

$$E_{\alpha,\alpha+1}(T^{\alpha}\mu_k)\sim\frac{1}{T^{\alpha}\mu_k}\sim\frac{c_n}{T^{\alpha}d_p}|\lambda_k|^{n-p},\quad k\to\infty,$$

в силу асимптотических свойств функции $E_{\alpha,\alpha+1}(\cdot)$ на $-\infty$ [1] и того факта, что $\mu_k\to-\infty$ при $k\to\infty$. По теореме 5 получим требуемое. $\square$

Замечание 4. Из доказательства следствия 1 видно, что если рассматривать оператор $\chi(A)$, действующим в $\mathcal{U}$ не из D_A, а из $\mathcal{Z}$, то он не будет непрерывно обратимым.

В условиях данного параграфа при $n=0$, $P_0(\lambda)=1$, $p=1$, $Q_1(\lambda)=\lambda$ получаем обратную задачу для уравнения

$$D_t^{\alpha}v(s,t)=\Lambda v(s,t)+b(t)u(s),\quad (s,t)\in\Omega\times[0,T].\tag{3.7}$$

Если $r=1$, $\Lambda=\Delta=\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа и, например, $B_1=I$, то условия теоремы 4 при $\alpha\in(0,1)$ выполняются, так как $\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k<0$. Уравнение (3.7) при этом является уравнением субдиффузии при $\alpha\in(0,1)$ или супердиффузии при $\alpha\in(1,2)$.

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М. : Наука, 1967. 300 с.

2. Глушак А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка. // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 5. С. 684–693. https://doi.org/ 10.1134/S0001434610050056
3. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
4. Иванова Н. Д., Федоров В. Е., Комарова К. М. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2012. № 26 (280). Математика. Механика. Информатика. Вып. 15. С. 49–70.
5. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг – Леффлера // Соврем. математика. Фундамент. направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
6. Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1560–1571. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0323-y
7. Пятков С. Г., Самков М. Л. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177. https://doi.org/10.3103/s1055134412040050
8. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113. https://doi.org/10.1007/BF02110743
9. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг – Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644. https://doi.org/10.1023/A:1020262708594
10. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир., 1980. 663 с.
11. Уразаева А. В., Федоров В. Е. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 8. С. 1111–1119. https://doi.org/10.1134/S0012266108080120
12. Уразаева А. В., Федоров В. Е. О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. 2009. Т. 85, вып. 3. С. 440–450.
13. Фалалеев М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 126–132.
14. Федоров В. Е., Иванова Н. Д. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8 : Тр. Второй междунар. молодеж. шк.-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Ч. 1. С. 363–378.
15. Федоров В. Е., Романова Е. А. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2018. Т. 149. С. 103–112.
16. Федоров В. Е., Уразаева А. В. Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. С. 293–310.
17. Abasheeva N. L. Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12, N 4. P. 337–348. https://doi.org/10.1515/1569394042248265

18. Al Horani M., Favini A. Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces // Nonlinear Analysis. 2012. Vol. 75, N 1. P. 68–77.
19. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: University Press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001. 107 p.
20. Favini A., Lorenzi A. Differential Equations. Inverse and Direct Problems. New York : Chapman and Hall/CRC, 2006. 304 p.
21. Fedorov V. E. A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces // Integral Equations and Their Applications. Proceeding of University Network Seminar on the occasion of The Third Mongolia — Russia – Vietnam Workshop on NSIDE 2018. October 27-28, 2018, Hung Yen, Viet Nam. Hung Yen : Hanoi Mathematical Society, Hung Yen University of Technology and Education, 2018. P. 11–20.
22. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. 2016. Vol. 9, N 3. P. 687–696. https://doi.org/10.3934/dcdss.2016022
23. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. Vol. 20, N 3. P. 706–721. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0037
24. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with the Riemann – Liouville derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2019. Vol. 22, N 2. P. 271–286.
25. Fedorov V. E., Romanova E. A., Debbouche A. Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolutional equations // Journal of Mathematica Sciences. 2018. Vol. 228, N 4. P. 380–394. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3629-4
26. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev tType equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12, N 4. P. 387–395. https://doi.org/10.1163/1569394042248210
27. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999. 181 p.
28. Liu Y., Rundell W., Yamamoto M. Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19, N 4. P. 888–906.
29. Orlovsky D. G. Parameter determination in a differentia equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. С. 55–63.
30. Plekhanova M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. Vol. 40. P. 41–44.
31. Prilepko A. I., Orlovskii D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel : Marcel Dekker, Inc. 2000. 730 p.
32. Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel : Springer, 1993. 366 p.

Владимир Евгеньевич Федоров, доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет, Российская Федерация, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, тел.: (351)7997235 (e-mail: kar@csu.ru)

Анна Викторовна Нагуманова, кандидат физико-математических наук, Челябинский государственный университет, Российская Федерация, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129,
тел.: (351)7997235 (e-mail: urazaeva_anna@mail.ru)

Поступила в редакцию 02.05.19

Inverse Problem for Evolutionary Equation with the Gerasimov - Caputo Fractional Derivative in the Sectorial Case

V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. We investigates the unique solvability of a class of linear inverse problems with a time-independent unknown coefficient in an evolution equation in Banach space, which is resolved with respect to the fractional Gerasimov – Caputo derivative. We assume that the operator in the right-hand side of the equation generates a family of resolving operators of the corresponding homogeneous equation, which is exponentially bounded and analytic in a sector containing the positive semiaxis. It is shown that for the well-posedness of the inverse problem it is necessary to choose as the space of initial data the definition domain of the generating operator endowed with its graph norm. Sufficient conditions for the unique solvability of the inverse problem are found. The obtained abstract results are applied to the unique solvability study of an inverse problem for a class of time-fractional order partial differential equations. The considered example, in particular, shows that when choosing as the source data space not the domain of definition of the generating operator, but the whole space, the inverse problem is ill-posed.

Keywords: inverse problem, fractional Gerasimov –Caputo derivative, evolution equation, resolving family of operators.

References

1. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 3. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953, 396 p.
2. Glushak A.V. On an inverse problem For an abstract differential equation of fractional order. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 87, no. 5, pp. 654-662. https://doi.org/ 10.1134/S0001434610050056
3. Gordievskikh D.M., Fedorov V.E. Solutions of initial-boundary value problems to some degenerate equations systems of fractional order with respect to the time. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series. Mathematics], 2015, vol. 12, pp. 12-22. (in Russian).
4. Ivanova N.D., Fedorov V.E., Komarova K.M. Nonlinear inverse problem for the Oskolkov system, linearized in a stationary solution neighborhood. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2012, no. 26 (280), pp. 49-70. (in Russian).
5. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *Journal of Mathematica Science*, 2008, vol. 190, no. 2, pp. 209-409.

6. Prilepko A.I. The semigroup method for inverse, nonlocal, and nonclassical problems. Prediction-control and prediction-observation for evolution equations: I. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 11, pp. 1635-1646. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0323-y
7. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic system of equations. *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 287–302. https://doi.org/10.3103/s1055134412040050
8. Tikhonov I.V., Eidelman Yu.S. Problems on correctness of ordinary and inverse problems for evolutionary equations of a special form. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, no. 2, pp.830–839. https://doi.org/10.1007/BF02110743
9. Tikhonov I.V., Eidelman Yu.S. An inverse problem for a differential equation in a Banach space and the distribution of zeros of an entire Mittag-Leffer function. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 669–677. https://doi.org/10.1023/A:1020262708594
10. Tribel H. *Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators.* Amsterdam, New York, Oxford, North Holland Publ., 1978. 527 p.
11. Urazaeva A.V., Fedorov V.E. Prediction-control problem for some systems of equations of fluid dynamics. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1147-1156. https://doi.org/10.1134/S0012266108080120
12. Urazaeva A.V., Fedorov V.E. On the well-posedness of the prediction-control problem for certain systems of equations. *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, no. 3–4, pp.426-436. https://doi.org/10.1134/S0001434609030134
13. Falaleev M.V. Degenerate Abstract Problem of Prediction-Control in Banach Spaces. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika.* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series. Mathematics], 2010, vol. 3, no. 1, pp. 126–132. (in Russian).
14. Fedorov V.E., Ivanova N.D. Nelineynaya evolyutsionnaya obratnaya zadacha dlya nekotorykh uravneniy sobolevskogo tipa [Nonlinear evolution inverse problem for some Sobolev type equations]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, vol. 8, Proceedings of the Second International Scientific School-Conference for Young Scientists «Theory and Numerical Methods for Solving Inverse and Ill-Posed Probems», part I, pp. 363-378. (in Russian).
15. Fedorov V.E., Romanova E.A. Neodnoronoye evolyutsionnoye uravneniye drobnogo poryadka v sektorial'nom sluchaye. [Inhomogeneous fractional order evolution equation in the sectorial case]. *Itogi nauki i tekhniki Seriya: Sovremennaya matematika i eyo prilozhaniya. Tematicheskiye obzory* [Science and technology results. Series: Contemporary mathematics and its applications. Thematic reviews], 2018, vol. 149, pp. 103-112. (in Russian).
16. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. Lineynaya evolyutsionnaya obratnaya zadacha dlya uravneniy sobolevskogo tipa. [Linear evolution inverse problem for Sobolev type equations]. *Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Non-classical equations of mathematical physics]. Novosibirsk, S.L. Sobolev Istitute of Mathematics of SB RAS, 2010. pp. 293-310. (in Russian).
17. Abasheeva N.L. Some inverse problems for Parabolic equations with changing time direction. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2004, vol. 12, no. 4, pp. 337-348. https://doi.org/10.1515/1569394042248265
18. Al Horani M., Favini A. Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces. *Nonlinear Analysis*, 2012, vol. 75, no. 1, pp. 68-77.
19. Bajlekova E.G. *Fractional Evolution Equations in Banach Shaces*. PhD thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001, 107 p.

Известия Иркутского государственного университета.
2019. Т. 27. Серия «Математика». С. 123–137

20. Favini A., Lorenzi A. *Differential Equations. Inverse and Direct Problems*. New York, Chapman and Hall/CRC, 2006, 304 p.
21. Fedorov V.E. A Class of fractional order semilinear evolution equations in Banach spaces. *Integral Equations and Their Applications*, Proceeding of University Network Seminar on the occasion of The Third Mongolia – Russia – Vietnam Workshop on NSIDE 2018, October 27-28, 2018, Hung Yen, Viet Nam. Hung Yen, Hanoi Mathematical Society, Hung Yen University of Technology and Education, 2018, pp. 11-20.
22. Fedorov V.E., Ivanova N.D. Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 687-696. https://doi.org/10.3934/dcdss.2016022
23. Fedorov V.E., Ivanova N.D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 706-721. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0037
24. Fedorov V.E., Nazhimov R.R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with the Riemann – Liouville derivative. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 271-286.
25. Fedorov V.E., Romanova E.A., Debbouche A. Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolutional equations. *Journal of Mathematica Sciences*, 2018, vol. 228, no. 4, pp. 380-394. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3629-4
26. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2004, vol. 12, no. 4, pp. 387–395. https://doi.org/10.1163/1569394042248210
27. Kozhanov A.I. *Composite Type Equations and Inverse Problems*. Utrecht, VSP, 1999, 181 p.
28. Liu Y., Rundell W., Yamamoto M. Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 888–906.
29. Orlovsky D.G. Parameter determination in a differentia equation of fractional order with Riemann – Liouville fractional derivative in a Hilbert space. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 55-63.
30. Plekhanova M.V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 40, pp. 41–44. https://doi.org/10.1002/mma.3830
31. Prilepko A.I., Orlovskii D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York, Basel, Marcel Dekker, Inc. 2000, 730 p.
32. Prüss J. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Basel, Springer, 1993, 366 p.

Vladimir Fedorov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chelyabinsk State University, 129, Bratiev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russian Federation, tel.: (351)7997235
(e-mail: kar@csu.ru)

Anna Nagumanova, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Chelyabinsk State University, 129, Bratiev Kashirinykh ST., Chelyabinsk, 454001, Russian Federation, tel.: (351)7997235
(e-mail: urazaeva_anna@mail.ru)

Received 02.05.19