КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Серия «Математика»
2018. Т. 26. С. 121—127

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.64+512.55+519.1
MSC 15A15, 15A16
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.121

Детерминанты как комбинаторные формулы суммирования над алгеброй с единственной n-арной операцией

Г. П. Егорычев

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. С конца 1980-х гг. автор опубликовал серию результатов по матричным функциям, полученным с помощью производящих функций, смешанных дискриминантов (смешанных объёмов в $\mathtt{R}^n$), и известной теоремы поляризации (ее формулировка в наибольшей общности приведена в журнале «Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика» в 2017 г.). Эта теорема позволяет получать для полиаддитивной и симметрической функции множество вычислительных формул (полиномиальных тождеств), содержащих семейство свободных переменных. В 1979–1980 гг. автор получил первое полиномиальное тождество для перманентов над коммутативным кольцом, а в 2013 г. полиномиальное тождество нового типа для детеминантов над некоммутативным кольцом с ассоциативными степенями.

В заметке дано общее определение функции детерминанта, названного автором e-детерминантом над алгеброй с единственной n-арной f-операцией. Это определение отлично от хорошо известного определения некоммутативного детерминанта Гельфанда. Показано, что при естественных ограничениях на f-операцию e-детерминант сохраняет основные свойства классического детерминанта над полем $\mathtt{R}$. Получено семейство полиномиальных тождеств для e-детерминантов. В заключении автор выражает уверенность, что представляет интерес получение подобных полиномиальных тождеств для функций Шура, смешанных дискриминантов, результантов и других матричных функций над различными алгебраическими системами. Особенно интересен, по его мнению, ответ на следующий вопрос: *для каких n-арных f-операций возможно быстрое вычисление e-детерминантов с помощью квантовых компьютеров?*

Ключевые слова: детерминанты и перманенты, некоммутативные и мультиоператорные алгебры, теоремы поляризации и включения-исключения, квантовый компьютер.

1. Введение

Понятие определителя матрицы с действительными либо комплексными членами связано с именами Г. Лейбница, Г. Крамера, О. Коши, А. Кэли, Т. Мюира и многих других известных математиков [16]. Наиболее часто используется следующее определение детерминанта над коммутативным кольцом K (полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.) Детерминант $Det(A)$ (определитель) квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ над коммутативным кольцом K определяется следующей суммой:

$$Det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)},$$

где S_n — множество всех перестановок $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ n-множества $\{1, \ldots, n\}$, и $\gamma(\sigma)$ – число инверсий в σ. Другими словами,

$$Det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} a_{\tau(1)\sigma(1)} \times \ldots \times a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} Sym\{a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)}\}, \qquad (1.1)$$

где $Sym\{a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)}\} = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} a_{\tau(1)\sigma(1)} \times \ldots \times a_{\tau(n)\sigma(n)}$.

Пусть Ψ аддитивная коммутативная полугруппа, G абелева группа с делением на целые числа, $\Psi^{(n)} = \Psi \times \Psi \times \ldots \times \Psi$; Φ — алгебра с единственной n-арной операцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \Psi^{(n)} \to G$.

Определение 1. *е-Детерминант $eDet(A, f)$ квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ над алгеброй Φ определяется следующей суммой:*

$$eDet(A, f) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} f(a_{\tau(1)\sigma(1)}, \ldots, a_{\tau(n)\sigma(n)}) \qquad (1.2)$$

Другими словами,

$$eDet(A, f) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} Sym\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)})\}, \qquad (1.3)$$

где оператор симметризации

$$Sym\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n\} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right),$$

и $Sym\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *если операция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *симметрична.*

Если операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *симметрична, то*

$$eDet(A, f) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}).$$

2. Результаты

Основные (характеристические) свойства e-детерминанта $eDet(A, f)$ как функции строк и столбцов матрицы A непосредственно зависят от свойств общего члена сумм (1.2)–(1.3), т. е. от свойств *n-арной операции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \Psi^{(n)} \to G$. Справедливо следующее простое утверждение, которое понадобится нам при доказательстве основного результата теоремы 1.

Лемма 1. (a) $eDet(A, f) = eDet(A^T, f)$.

(b) $eDet(A, f)$ *— кососимметрическая функция строк (столбцов) матрицы* A.

(c) *Если n-арная операция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\Psi^{(n)} \to G$ *полиаддитивна, то* $eDet(A, f)$ *полиаддитивная функция строк (столбцов) матрицы* A.

В общем случае формулы Лапласа для $eDet(A, f)$ *несправедливы.*

Доказательство. Справедливость утверждений (a)–(c), используя определения (1.2) и (1.3) для $eDet(A, f)$ и допущений на n-арную операцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \Psi^{(n)} \to G$, проводится здесь по стандартной и хорошо изученной схеме доказательства аналогичных утверждений для детерминанта над коммутативным кольцом K (ср. [3; 4; 6]). $\square$

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матрица с элементами из кольца K, и пусть $S_n^{(e)}$ и $S_n^{(o)}$, соответственно, подмножества чётных и нечётных перестановок из S_n. Последовательность элементов $a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ назовём диагональю $l(\sigma)$ матрицы A, а последовательность элементов $a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_k\sigma(i_k)}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$,–поддиагональю l длины k этой матрицы. Через $L_k^{(e)}$ $\left(L_k^{(o)}\right)$ мы обозначим множество всех поддиагоналей длины k для множества чётных (нечётных) диагоналей $S_n^{(e)}$ $\left(S_n^{(o)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$. Функция $su(l)$ для поддиагонали (диагонали)

$$l = diag(a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_k\sigma(i_k)})$$

есть сумма её элементов, т. е. $su(l) := \sum_{s=1}^{k} a_{i_s\sigma(s)}$. Положим, для краткости, $F(x) = f(x, ..., x) : \Psi \to G$.

Теорема 1. *Если n-арная операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $\Psi^n \to G$ полиаддитивна, то справедлива следующая формула для $eDet(A, f)$ над алгеброй Φ:*

$$eDet(A,f) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l\in L_n^{(e)}} F(\gamma + su(l)) - \sum_{l\in L_n^{(o)}} F(\gamma + su(l))]-$$

$$-[\sum_{l\in L_{n-1}^{(e)}} F(\gamma + su(l)) - \sum_{l\in L_{n-1}^{(o)}} F(\gamma + su(l))]\},\ \gamma \in \Psi. \qquad (2.1)$$

В частности, при $\gamma = 0$

$$eDet(A,f) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l\in L_n^{(e)}} F(u(l)) - \sum_{l\in L_n^{(o)}} F(su(l))]-$$

$$-[\sum_{l\in L_{n-1}^{(e)}} F(su(l)) - \sum_{l\in L_{n-1}^{(o)}} F(su(l))]\}.$$

Доказательство. В силу предположений теоремы общий член

$Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}\right\}$ суммы (1.3) для $eDet(A, f)$ симметричен и полиаддитивен относительно своих переменных. Если применить к каждому из этих $n!$ членов известную формулу поляризации [4], и заменить в каждой из $n!$ полученных формул свободный элемент γ_σ на $\gamma \in \Psi$, то с учётом очевидного равенства $Sym\{f(x, x, \ldots, x)\} = F(x)$ мы получим следующее равенство

$$Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}\right\} = \frac{(-1)^n}{n!}\{F(\gamma) - \sum_{i=1}^{n} F\left(\gamma + a_{i\sigma(i)}\right) +$$

$$+\sum_{1\le i<j\le n}^{n} F\left(\gamma + a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(j)}\right) + \ldots + (-1)^n F(\gamma + \sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)})\},\ \sigma \in S_n.$$

Если теперь подставить последнее выражение для

$$Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}\right\}$$

в сумму (1.3), то после приведения (сокращения) подобных членов точно по той же схеме, что и в [3], мы получим формулу (2.1). □

3. Заключение

Если ввести понятие е-перманента $ePer(A, f)$ квадратной матрицы A, положив $ePer(A, f) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} Sym\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots a_{n\sigma(n)})\}$, то под это определение при соответствующих ограничениях на операцию f попадает ряд матричных функций, возникших ранее в работах различных авторов (см., например, матричные функции Мура, Барвинка [9; 10]). Представляет интерес получение с помощью теоремы поляризации полиномиальных тождеств (см. [1; 3; 4]) для функций Шура, смешанных дискриминантов, результантов и других матричных функций (плоской и пространственных матриц, [4]) над различными алгебраическими системами, возникших при решении трудных комбинаторных, алгебраических и геометрических проблем [2–12; 14; 17], и мн. др. Особенно интересен, на мой взгляд, ответ на следующий вопрос: *для каких n-арных операций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*: $\Psi^n \to G$ и *одноарных операций $F(x) := f(x, x, \ldots, x) : \Psi \to G$ возможны вычисления $ePer(A, f)$ и $eDet(A, f)$ с помощью квантовых компьютеров ?* (см., например, [6; 12]).

Автор выражает признательность моим добрым коллегам Л. В. Knауб, С. Г. Колесникову, В. М. Копытову, А. И. Созутову, В. П. Кривоколеско за помощь при работе над этой статьёй.

Список литературы

1. Егорычев Г. П. Новые формулы для перманента // Докл. АН СССР. 1980. Т. 265, № 4. С. 784–787.
2. Егорычев Г. П. Дискретная математика. Перманенты. Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2007. 272 с.
3. Егорычев Г. П. Новые полиномиальные тождества для детерминантов над коммутативными кольцами // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 4. С. 16–20.
4. Егорычев Г. П. Теорема поляризации и полиномиальные тождества для матричных функций // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21, № 4. С. 77–88. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.77
5. Кочергин В. В. О сложности вычислений одночленов и степеней // Дискретный анализ. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1994. С. 94–107. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики ; т. 27).
6. Курош А. Г. Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, вып. 1(145). С. 3–15.
7. Пожидаев А. П. Простые фактор-алгебры и подалгебры алгебр якобианов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 593–599.
8. Филиппов В. Т. Об n-лиевой алгебре якобианов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669. https://doi.org/10.1007/BF02673915
9. Arvind V. On the hardness of noncommutative determinant // Electronic Colloquium on Computational Complexity. 2009. Report № 103. P. 1–18.
10. Barvinok A. I. New permanent estimators via non-commutative determinants // Preprint arXiv: math./0007153. 2000. P. 1–13.
11. Burago Yu. D., Zalgaller V. A. Geometric Inequalities. N. Y. : Springer Verlag, 1988. 334 p.
12. Chakhmakhchyan L., Cerf N. J., Garcia-Patron R. Guantum-inspired algorithm for estimating the permanent of positive semidefinite matrices // Preprint arXiv: quant-ph./ 1609.02416. 2017. P. 1–9.

13. Gelfand I. M., Retakh V. S. Determinants of matrices over noncommutative rings // Funct. Anal. Appl. 1991. Vol. 25, N 2. P. 91–102.
14. Krattenthaler C. Advanced determinant calculus: A complement // Linear Algebra and Its Applications. 2005. Vol. 411. P. 68–166. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.06.042
15. Krob D., Leclerc B. Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants// Commun. Math. Phys. 1995. Vol. 169. P. 1–23.
16. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. Vol. 1, part 1. London, 1890.
17. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture // arXiv: math./9407211v, 1994. P. 1–84.

Георгий Петрович Егорычев, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, Российская Федерация, тел.: +7(391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)

Поступила в редакцию 10.11.18

Determinants as Combinatorial Summation Formulas over an Algebra with a Unique n-ary Operation

G. P. Egorychev

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. Since the late 1980s the author has published a number of results on matrix functions, which were obtained using the generating functions, mixed discriminants (mixed volumes in R^n), and the well-known polarization theorem (the most general version of this theorem is published in "The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics" in 2017). The polarization theorem allows us to obtain a set of computational formulas (polynomial identities) containing a family of free variables for polyadditive and symmetric functions. In 1979-1980, the author has found the first polynomial identity for permanents over a commutative ring, and, in 2013, the polynomial identity of a new type for determinants over a noncommutative ring with associative powers.

In this paper we give a general definition for determinant (the e-determinant) over an algebra with a unique n-ary f-operation. This definition is different from the well-known definition of the noncommutative Gelfand determinant. It is shown that under natural restrictions on the f-operation the e-determinant keeps the basic properties of classical determinants over the field R. A family of polynomial identities for the e-determinants is obtained. We are convinced that the task of obtaining similar polynomial identities for Schur functions, the mixed determinants, resultants and other matrix functions over various algebraic systems is quite interesting. And an answer to the following question is especially interesting: *for which n-ary f-operations a fast quantum computers based calculation of e-determinants is possible?*

Keywords: determinants and permanents, noncommutative and multioperator algebras, polarization and inclusion-conclusion theorems, quantum computers.

References

1. Egorychev G.P. New formulas for the permanent. *Dokl. Acad. Nauk USSR,* 1980, vol. 265, no. 4, pp. 784–787. (in Russian)
2. Egorychev G.P. Discrete mathematics. Permanents. Krasnoyarsk, Siberian Federal Univ., 2007, 272 p. (in Russian)
3. Egorychev G.P. New polynomial identities for determinants over commutative rings. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 16–20. (in Russian)
4. Egorychev G.P. The polarization theorem and polynomial Identities for matrix functions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 16–20. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.77
5. Kochergin V.V. About complexity of computation one-terms and powers. *Discrete Analysis,* Novosibirsk, Sobolev Institute of mathematics SB RAS Publ., 1994, vol. 27, pp. 94–107. (in Russian)
6. Kurosh A.G. Multioperator rings and algebras. *Uspechi Math. Nauk,* 1969, vol. 24, issue 1(145), pp. 3–15. (in Russian)
7. Pozhidaev A.P. A simple factor-algebras and subalgebras of Jacobians algebras. *Sibirsk. Math. Zh.,* 1998, vol. 39, no. 3, pp. 593–599. (in Russian)
8. Filippov V.T. On the n-Lie algebras of Jacobians. *Sibirsk. Math. Zh.,* 1998, vol. 39, no. 3, pp. 660–669.(in Russian) https://doi.org/10.1007/BF02673915
9. Arvind V., Srinivasan S. On the hardness of noncommutative determinants. Electronic Colloquium on Computational Complexity. Report no. 103, 2009, pp. 1–18.
10. Barvinok A.I. New permanent estimators via non-commutative determinants. Preprint arXiv: math. /0007153, 2000, pp. 1–13.
11. Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Geometric Inequalities. N.Y., Springer Verlag, 1988, 334 p.
12. Chakhmakhchyan L., Cerf N.J., Garcia-Patron R. Guantum inspired algorithm for estimating the permanent of positive semidefinite matrices. Preprint arXiv: quant-ph./1609.02416, 2017, pp. 1–9.
13. Gelfand I.M., Retakh V.S. Determinants of matrices over noncommutative rings. *Funct. Anal. Appl.,* 1991, vol. 25, no. 2, pp.91–102.
14. Krattenthaler C. Advanced determinant calculus: A complement. *Linear Algebra and Its Applications,* 2005, vol. 411, pp. 68–166. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.06.042
15. Krob D., Leclerc B. Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants. *Commun. Math. Phys.* 1995, vol. 169, pp. 1–23.
16. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. Vol. 1, part 1. London, 1890.
17. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture. arXiv: math./ 9407211v, 1994, pp. 1–84.

Georgy Egorychev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Siberian Federal University, 79 Svobodny pr., 660041, Krasnoyarsk, Russian Federation, tel.: +7(391)2461609
(e-mail: `gegorych@mail.ru`)

Received 10.11.18