Серия «Математика»
2018. Т. 25. С. 109—125

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.929.4
MSC 34K20, 92D25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.109

Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием*

М. А. Скворцова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории. Система состоит из трех уравнений, при этом компоненты решения отвечают за численность популяции жертв, численность популяции взрослых хищников и численность популяции молодых хищников. Предполагается, что только взрослые хищники могут нападать на жертв и воспроизводить потомство. Параметр запаздывания предполагается постоянным и отвечает за время взросления хищников. Для рассматриваемой системы ставится начальная задача, для которой обсуждаются вопросы существования, единственности, неотрицательности, ограниченности решения. Также обсуждаются вопросы устойчивости стационарных решений (положений равновесия), соответствующих полному вымиранию популяций, вымиранию только популяции хищников и совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Основное внимание в работе уделяется получению оценок решений, характеризующих скорость сходимости к положению равновесия, соответствующему совместному сосуществованию популяций, и установлению оценок на множество притяжения, т. е. допустимых условий на начальные данные, при которых происходит сходимость. При получении результатов применяется метод функционалов Ляпунова – Красовского, который является аналогом метода функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом в работе существенно используется модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, предложенный Г. В. Демиденко и И. И. Матвеевой. Важно отметить, что этот функционал позволяет получать оценки решений систем с запаздывающим аргументом, являющиеся аналогами оценки Крейна для обыкновенных дифференциальных уравнений, а построение такого функционала сводится к решению хорошо обусловленных задач.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-31-00408.

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследования асимптотических свойств решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающей взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории. Система имеет вид [9], [10]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right) - px(t)y(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t), \\ \dfrac{d}{dt}z(t) = bpx(t)y(t) - bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - cz(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $z(t)$ — численность популяции молодых хищников. Предполагается, что только взрослые хищники могут нападать на жертв и воспроизводить потомство. Параметр запаздывания τ отвечает за время взросления хищников, r — коэффициент прироста популяции жертв, K — максимально допустимая численность популяции жертв, p — коэффициент взаимодействия жертв и взрослых хищников, b — параметр, отвечающий за рождаемость молодых хищников, c — коэффициент смертности молодых хищников, d — коэффициент смертности взрослых хищников. Все параметры системы предполагаются положительными.

Вместе с системой (1.1) рассмотрим начальные условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \quad \varphi \in C([-\tau, 0]), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau, 0]), \\ z(0) = \eta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что решение начальной задачи (1.1), (1.2) существует и единственно. Также легко показать, что если

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \tag{1.3}$$

то $x(t)$, $y(t)$ будут определены при всех $t \geq 0$, причем $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Более того, если при этом выполнено неравенство

$$\eta \geq \int_{-\tau}^{0} bpe^{c\xi}\varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi, \tag{1.4}$$

то $z(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$ (см., например, [6]). Также отметим, что при выполнении условий (1.3), (1.4) компоненты решения начальной задачи (1.1), (1.2) будут ограничены (см., например [9]).

Всюду далее будем предполагать, что начальные данные $\varphi(t)$, $\psi(t)$, η удовлетворяют условиям (1.3), (1.4).

Теперь рассмотрим положения равновесия системы (1.1):
1) при условии $bpe^{-c\tau}K \leq d$ в системе два положения равновесия: $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ и $(x(t), y(t), z(t)) = (K, 0, 0)$;
2) при условии $bpe^{-c\tau}K > d$ в системе три положения равновесия: $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$, $(x(t), y(t), z(t)) = (K, 0, 0)$ и $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)$, где

$$x_0 = \frac{d}{bpe^{-c\tau}}, \quad y_0 = \frac{r}{p}\left(1 - \frac{d}{bpe^{-c\tau}K}\right), \tag{1.5}$$

$$z_0 = \frac{d}{c}\frac{r}{p}\left(1 - \frac{d}{bpe^{-c\tau}K}\right)(e^{c\tau} - 1).$$

В работе [6] был получен следующий результат.

Теорема 1. *I) Пусть $bpe^{-c\tau}K < d$. Тогда $(0, 0, 0)$ неустойчиво, а $(K, 0, 0)$ асимптотически устойчиво.*
II) Пусть $d < bpe^{-c\tau}K \leq 3d$. Тогда $(0, 0, 0)$ и $(K, 0, 0)$ неустойчивы, а (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво.
III) Пусть $bpe^{-c\tau}K > 3d$. Тогда $(0, 0, 0)$ и $(K, 0, 0)$ неустойчивы и существует $\tau_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \tau < \tau_0$ положение равновесия (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво, а при $\tau > \tau_0$ положение равновесия (x_0, y_0, z_0) неустойчиво.

Замечание 1. Отметим, что в случае $bpe^{-c\tau}K < d$ справедливы более сильные результаты: в работах [9] и [10] была доказана глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $(K, 0, 0)$, в работе [6] были получены оценки решений, характеризующие скорость сходимости к положению равновесия $(K, 0, 0)$.

Цель настоящей работы — установить оценки решений, характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0), и получить оценки на множество притяжения.

2. Метод функционалов Ляпунова – Красовского

Одним из методов исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является метод функционалов Ляпунова – Красовского, предложенный Н. Н. Красовским [4]. Для линейной системы

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) + B\mathbf{y}(t - \tau) \tag{2.1}$$

с постоянными матрицами A и B функционал Ляпунова – Красовского может быть построен в виде

$$V(t,\mathbf{y}) = \langle H\mathbf{y}(t),\mathbf{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q\mathbf{y}(s),\mathbf{y}(s)\rangle ds, \tag{2.2}$$

где $H = H^* > 0$ и $Q = Q^* > 0$ [4, гл. 7, § 34]. (Здесь и далее через H^* обозначается эрмитово-сопряженная к H матрица, неравенство $H > 0$ означает, что матрица H является положительно определенной.) Приведем результат об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1), полученный с помощью функционала (2.2).

Теорема 2. (Н. Н. Красовский). *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $Q = Q^* > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} HA + A^*H + Q & HB \\ B^*H & -Q \end{pmatrix} < 0.$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Отметим, что использование функционалов Ляпунова – Красовского позволяет проводить исследования устойчивости решений, а также оценивать области притяжения асимптотически устойчивых решений и для нелинейных систем с запаздывающим аргументом. Однако с их помощью далеко не всегда удается получить оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Для получения таких оценок применяют различные модификации функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, [2; 3; 8; 11; 12]). В частности, в работе [2] был предложен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$V(t,\mathbf{y}) = \langle H\mathbf{y}(t),\mathbf{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q(t-s)\mathbf{y}(s),\mathbf{y}(s)\rangle ds, \tag{2.3}$$

где матрица $H = H^* > 0$ и матрица $Q(s) \in C^1([0,\tau])$ удовлетворяют условиям:

$$Q(s) = Q^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}Q(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{2.4}$$

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + Q(0) & HB \\ B^*H & -Q(\tau) \end{pmatrix} > 0. \tag{2.5}$$

Используя функционал (2.3), в работе [2] были получены оценки решений системы (2.1), являющиеся аналогами оценки М. Г. Крейна для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1, гл. 1, § 4]). Также были установлены оценки решений и найдены области притяжения нулевого решения для широкого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [2; 3; 5]).

Применим метод функционалов Ляпунова – Красовского для исследования асимптотических свойств решений системы (1.1). Вначале мы построим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского вида (2.3), а затем получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0), и оценки на множество притяжения.

Всюду далее будем предполагать, что выполнено условие $d < bpe^{-c\tau}K < 3d$. В этом случае по теореме 1 положение равновесия (x_0, y_0, z_0) является асимптотически устойчивым.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что в силу (1.5) условие $d < bpe^{-c\tau}K < 3d$ эквивалентно условию

$$0 < py_0 < \frac{2rx_0}{K}. \tag{2.6}$$

Пусть $(x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (1.1), (1.2). Сделаем замену переменных

$$u(t) = x(t) - x_0, \quad v(t) = y(t) - y_0, \quad w(t) = z(t) - z_0.$$

Тогда система (1.1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = (x_0 + u(t))\left(-\dfrac{r}{K}u(t) - pv(t)\right), \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = bpe^{-c\tau}y_0u(t-\tau) \\ \qquad\qquad +bpe^{-c\tau}(x_0 + u(t-\tau))v(t-\tau) - dv(t), \\ \dfrac{d}{dt}w(t) = bpy_0u(t) + bp(x_0 + u(t))v(t) - bpe^{-c\tau}y_0u(t-\tau) \\ \qquad\qquad -bpe^{-c\tau}(x_0 + u(t-\tau))v(t-\tau) - cw(t). \end{cases} \tag{2.7}$$

Начальные условия для системы (2.7) будут иметь вид

$$\begin{cases} u(t) = u_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad u(+0) = u_0(0), \quad u_0 \in C([-\tau, 0]), \\ v(t) = v_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad v(+0) = v_0(0), \quad v_0 \in C([-\tau, 0]), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где

$$u_0(t) = \varphi(t) - x_0, \quad v_0(t) = \psi(t) - y_0, \quad w_0 = \eta - z_0,$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, η — начальные данные для системы (1.1). Условия на начальные данные (1.3) и (1.4) перепишутся в виде

$$u_0(t) \geq -x_0, \quad v_0(t) \geq -y_0, \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2.9}$$

$$w_0 \geq -z_0 + \int\limits_{-\tau}^{0} bpe^{c\xi}(u_0(\xi) + x_0)(v_0(\xi) + y_0)d\xi. \tag{2.10}$$

Поскольку в системе (2.7) первые два уравнения не зависят от $w(t)$, вначале мы рассмотрим подсистему из первых двух уравнений. Начальная задача для этой подсистемы будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t) + B\mathbf{u}(t-\tau) + F(\mathbf{u}(t)) + G(\mathbf{u}(t-\tau)), \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0}(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{u}(+0) = \mathbf{u_0}(0), \quad \mathbf{u_0} \in C([-\tau, 0]), \end{cases} \tag{2.11}$$

где

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_0}(t) = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ v_0(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{rx_0}{K} & -px_0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bpe^{-c\tau}y_0 & bpe^{-c\tau}x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\dfrac{y_0}{x_0} & d \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$F(\mathbf{u}(t)) = -\begin{pmatrix} \dfrac{r}{K}u^2(t) + pu(t)v(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$G(\mathbf{u}(t-\tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ bpe^{-c\tau}u(t-\tau)v(t-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d}{x_0}u(t-\tau)v(t-\tau) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Теперь перейдем к построению модифицированного функционала Ляпунова – Красовского. Для этого подберем матрицы $H = H^* > 0$ и $Q(s) \in C^1([0, \tau])$, удовлетворяющие условиям (2.4) и (2.5), в которых матрицы A и B имеют вид (2.12). Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix},$$

$$Q(s) = e^{-ks}(B^*B + M), \quad M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad k, \mu_1, \mu_2 > 0.$$

Учитывая вид матрицы $Q(s)$, нетрудно понять, что условия (2.4) будут выполнены. Проверим условие (2.5). Вначале заметим, что имеет место равенство $B^*H = B^*\widetilde{H}$, где

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + B^*B + M & \widetilde{H}^*B \\ B^*\widetilde{H} & -e^{-k\tau}(B^*B + M) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\Big(HA + A^*H + B^*B + e^{k\tau}\widetilde{H}^*\widetilde{H}\Big) - M & 0 \\ 0 & e^{-k\tau}M \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{k\tau}\widetilde{H}^*\widetilde{H} & -\widetilde{H}^*B \\ -B^*\widetilde{H} & e^{-k\tau}B^*B \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} L - M & 0 \\ 0 & e^{-k\tau}M \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

где

$$L = -\Big(HA + A^*H + B^*B + M + e^{k\tau}\widetilde{H}^*\widetilde{H}\Big) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Если мы покажем, что матрица L является положительно определенной, то при условии $\max\{\mu_1, \mu_2\} < l_{\min}$ матрица C также будет положительно определена. (Здесь $l_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы L.) Имеем

$$\begin{cases} l_{11} = \dfrac{2rx_0}{K}h_{11} - d^2\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 - e^{k\tau}h_{12}^2, \\[2ex] l_{12} = px_0h_{11} + \left(d + \dfrac{rx_0}{K}\right)h_{12} - d^2\dfrac{y_0}{x_0} - e^{k\tau}h_{12}h_{22}, \\[2ex] l_{22} = 2px_0h_{12} + 2dh_{22} - d^2 - e^{k\tau}h_{22}^2. \end{cases}$$

Положим

$$h_{22} = de^{-k\tau}, \tag{2.17}$$

$$h_{11} = \frac{d^2}{py_0}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 - \frac{1}{px_0}\frac{rx_0}{K}h_{12}, \tag{2.18}$$

тогда $l_{12} = 0$,

$$\begin{cases} l_{11} = \dfrac{d^2}{py_0}\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2\left(\dfrac{2rx_0}{K} - py_0\right) - \dfrac{2}{px_0}\left(\dfrac{rx_0}{K}\right)^2 h_{12} - e^{k\tau}h_{12}^2, \\[2ex] l_{22} = 2px_0h_{12} - d^2(1 - e^{-k\tau}). \end{cases} \tag{2.19}$$

Положительная определенность матрицы L эквивалентна условиям $l_{11} > 0$, $l_{22} > 0$. Условие $l_{22} > 0$ эквивалентно неравенству

$$h_{12} > \frac{d^2(e^{k\tau} - 1)}{2px_0e^{k\tau}}. \tag{2.20}$$

В частности, отсюда следует, что $h_{12} > 0$. В этом случае условие $l_{11} > 0$ эквивалентно неравенству

$$h_{12} < \frac{1}{px_0e^{k\tau}}\left[\sqrt{d^2py_0\left(\frac{2rx_0}{K} - py_0\right)e^{k\tau} + \left(\frac{rx_0}{K}\right)^4} - \left(\frac{rx_0}{K}\right)^2\right]. \quad (2.21)$$

Из неравенств (2.20) и (2.21) вытекает условие на величину $k > 0$:

$$\frac{d^2}{2}(e^{k\tau} - 1) < \sqrt{d^2py_0\left(\frac{2rx_0}{K} - py_0\right)e^{k\tau} + \left(\frac{rx_0}{K}\right)^4} - \left(\frac{rx_0}{K}\right)^2. \quad (2.22)$$

Замечание 3. Поскольку изначально мы предположили, что выполнено условие (2.6), то такое k будет существовать.

Следовательно, величину h_{12} можно выбрать из условий (2.20) и (2.21).

Итак, мы получили, что $L > 0$. Заметим, что отсюда, в частности, следует, что $H > 0$. Действительно, поскольку все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ и $HA + A^*H \leq -L < 0$, то H является решением матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -D$, $D = D^* > 0$. Хорошо известно, что в этом случае матрица H является положительно определенной (см., например, [1, гл. 1, § 4]).

Итак, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского построен.

3. Оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0)

В этом параграфе мы получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0), и оценки на множество притяжения. При получении оценок мы будем использовать модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, построенный в предыдущем параграфе. Здесь мы также будем предполагать, что выполнено условие (2.6).

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, \mathbf{u}) = \langle H\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s)\rangle\, ds, \quad (3.1)$$

где элементы матрицы H определены в (2.17), (2.18), (2.20), (2.21), а матрица $Q_0(s)$ имеет вид

$$Q_0(s) = e^{-ks}(B^*B + M_0), \quad M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$k > 0$ определяется из условия (2.22), а величина $\mu > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\widetilde{l} = \min\{l_{11}, l_{22}\} - \mu \left(1 + \frac{h_{22}}{\sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2}}\right) > 0, \tag{3.3}$$

где $l_{11} > 0$ и $l_{22} > 0$ определены в (2.19). Введем обозначения:

$$\theta = \frac{x_0 \mu}{d e^{k\tau/2} \sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2}}, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\widetilde{l}}{\|H\|}, k\right\}, \tag{3.5}$$

$$q = \frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}} \left(\frac{r}{K} + \sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2 + p^2}\right), \tag{3.6}$$

где $\|H\|$ — спектральная норма матрицы H, $h_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (2.6)*. Тогда для решения* $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (2.11) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* (2.9) *и условиям*

$$\max_{t \in [-\tau, 0]} |u_0(t)| \le \theta, \tag{3.7}$$

$$\sqrt{V(0, \mathbf{u_0})} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0, \mathbf{u_0})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \mathbf{u_0})}\right)} \le \theta, \tag{3.8}$$

справедлива оценка

$$u^2(t) + v^2(t) \le \frac{1}{h_{\min}} \frac{V(0, \mathbf{u_0})}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \mathbf{u_0})}\right)^2} e^{-\varepsilon t}, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (3.1). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (2.11), будем иметь

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{u}) = \langle H(A\mathbf{u}(t) + B\mathbf{u}(t - \tau) + F(\mathbf{u}(t)) + G(\mathbf{u}(t - \tau))), \mathbf{u}(t)\rangle$$
$$+ \langle H\mathbf{u}(t), (A\mathbf{u}(t) + B\mathbf{u}(t - \tau) + F(\mathbf{u}(t)) + G(\mathbf{u}(t - \tau)))\rangle$$
$$+ \langle Q_0(0)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\rangle - \langle Q_0(\tau)\mathbf{u}(t - \tau), \mathbf{u}(t - \tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}Q_0(t-s)\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)\right\rangle ds$$

$$=\left\langle \begin{pmatrix} HA+A^*H+Q_0(0) & HB \\ B^*H & -Q_0(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{u}(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{u}(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+2\langle H\mathbf{u}(t),F(\mathbf{u}(t))\rangle+2\langle H\mathbf{u}(t),G(\mathbf{u}(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)\rangle\,ds.$$

Учитывая явный вид (3.2) матрицы $Q_0(s)$, по аналогии с (2.15) получим неравенство

$$\begin{pmatrix} HA+A^*H+Q_0(0) & HB \\ B^*H & -Q_0(\tau)\end{pmatrix}\le-\begin{pmatrix} L-M_0 & 0\\ 0 & e^{-k\tau}M_0\end{pmatrix},$$

где матрица L определена в (2.16). Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,\mathbf{u})\le-\langle (L-M_0)\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle-e^{-k\tau}\langle M_0\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\rangle$$

$$+2\langle H\mathbf{u}(t),F(\mathbf{u}(t))\rangle+2\langle H\mathbf{u}(t),G(\mathbf{u}(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)\rangle\,ds.$$

Поскольку матрица L — диагональная, то отсюда нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}V(t,\mathbf{u})\le-\min\{l_{11},l_{22}\}(u^2(t)+v^2(t))+2\langle H\mathbf{u}(t),F(\mathbf{u}(t))\rangle$$

$$+\langle M_0\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle-e^{-k\tau}\langle M_0\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\rangle+2\langle H\mathbf{u}(t),G(\mathbf{u}(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)\rangle\,ds. \tag{3.10}$$

где $l_{11}>0$ и $l_{22}>0$ определены в (2.19).

Теперь оценим $2\langle H\mathbf{u}(t),F(\mathbf{u}(t))\rangle$. Имеем

$$2\langle H\mathbf{u}(t),F(\mathbf{u}(t))\rangle=2\left\langle H^{1/2}\mathbf{u}(t),H^{1/2}F(\mathbf{u}(t))\right\rangle$$

$$\le 2\sqrt{\langle H\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle}\sqrt{\langle HF(\mathbf{u}(t)),F(\mathbf{u}(t))\rangle}$$

$$\le 2\,V^{1/2}(t,\mathbf{u})\sqrt{\langle HF(\mathbf{u}(t)),F(\mathbf{u}(t))\rangle}.$$

Учитывая явный вид (2.13) вектор-функции $F(\mathbf{u}(t))$, получим

$$2\langle H\mathbf{u}(t), F(\mathbf{u}(t))\rangle \le 2\,V^{1/2}(t,\mathbf{u})\sqrt{h_{11}}\left|\frac{r}{K}u^2(t)+pu(t)v(t)\right|$$

$$\le V^{1/2}(t,\mathbf{u})\sqrt{h_{11}}\left(\frac{r}{K}+\sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2+p^2}\right)(u^2(t)+v^2(t))$$

$$\le V^{1/2}(t,\mathbf{u})\frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}\left(\frac{r}{K}+\sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2+p^2}\right)\langle H\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle \le qV^{3/2}(t,\mathbf{u}),$$

где q определено в (3.6). Отсюда и из неравенства (3.10) получим

$$\frac{d}{dt}V(t,\mathbf{u}) \le -\min\{l_{11},l_{22}\}(u^2(t)+v^2(t))+qV^{3/2}(t,\mathbf{u})$$

$$+\langle M_0\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle - e^{-k\tau}\langle M_0\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\rangle + 2\langle H\mathbf{u}(t), G(\mathbf{u}(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int_{t-\tau}^{t}\langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)\rangle\,ds. \tag{3.11}$$

Теперь оценим

$$g(t) = \langle M_0\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\rangle - e^{-k\tau}\langle M_0\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\rangle$$

$$+2\langle H\mathbf{u}(t), G(\mathbf{u}(t-\tau))\rangle. \tag{3.12}$$

Учитывая явный вид (3.2) матрицы M_0 и явный вид (2.14) вектор-функции $G(\mathbf{u}(t-\tau))$, будем иметь

$$g(t) = \mu v^2(t) - \mu e^{-k\tau}v^2(t-\tau) + 2d\frac{u(t-\tau)}{x_0}v(t-\tau)(h_{12}u(t)+h_{22}v(t)).$$

Отсюда нетрудно получить

$$g(t) \le \mu v^2(t) + \frac{d^2e^{k\tau}}{\mu}\left(\frac{u(t-\tau)}{x_0}\right)^2(h_{12}u(t)+h_{22}v(t))^2. \tag{3.13}$$

Вначале предположим, что $t\in[0,\tau]$. В этом случае из условия (3.7) следует, что $|u(t-\tau)|\le\theta$. Тогда

$$g(t) \le \mu v^2(t) + \frac{d^2e^{k\tau}}{\mu}\left(\frac{\theta}{x_0}\right)^2(h_{12}u(t)+h_{22}v(t))^2. \tag{3.14}$$

Отсюда

$$g(t) \le \mu v^2(t) + \frac{d^2e^{k\tau}}{\mu}\left(\frac{\theta}{x_0}\right)^2(h_{12}u(t)+h_{22}v(t))^2$$

$$= \left\langle N \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\rangle \leq \|N\|(u^2(t) + v^2(t)), \tag{3.15}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\dfrac{\theta}{x_0}\right)^2 h_{12}^2 & \dfrac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\dfrac{\theta}{x_0}\right)^2 h_{12} h_{22} \\ \dfrac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\dfrac{\theta}{x_0}\right)^2 h_{12} h_{22} & \dfrac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\dfrac{\theta}{x_0}\right)^2 h_{22}^2 + \mu \end{pmatrix},$$

$\|N\|$ — спектральная норма матрицы N:

$$\|N\| = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\frac{\theta}{x_0}\right)^2 (h_{12}^2 + h_{22}^2) + \mu \right]$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{d^2 e^{k\tau}}{\mu} \left(\frac{\theta}{x_0}\right)^2 (h_{12}^2 + h_{22}^2) + \mu \right]^2 - d^2 e^{k\tau} \left(\frac{\theta}{x_0}\right)^2 h_{12}^2}.$$

В силу обозначения (3.4)

$$\mu = d e^{k\tau/2} \frac{\theta}{x_0} \sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2},$$

следовательно,

$$\|N\| = d e^{k\tau/2} \frac{\theta}{x_0} \left(\sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2} + h_{22} \right) = \mu \left(1 + \frac{h_{22}}{\sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2}} \right).$$

Тогда неравенство (3.15) принимает вид

$$g(t) \leq \mu \left(1 + \frac{h_{22}}{\sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2}} \right) (u^2(t) + v^2(t)). \tag{3.16}$$

Итак, учитывая обозначение (3.12) и используя неравенства (3.11) и (3.16), при $t \in [0, \tau]$ получим оценку

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{u}) \leq -\min\{l_{11}, l_{22}\}(u^2(t) + v^2(t)) + q V^{3/2}(t, \mathbf{u})$$

$$+\mu \left(1 + \frac{h_{22}}{\sqrt{h_{12}^2 + h_{22}^2}} \right) (u^2(t) + v^2(t)) - k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q_0(t-s)\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s) \rangle \, ds.$$

Отсюда, учитывая обозначения (3.3) и (3.5) и определение (3.1) функционала $V(t, \mathbf{u})$, будем иметь

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{u}) \leq -\varepsilon V(t, \mathbf{u}) + q V^{3/2}(t, \mathbf{u}).$$

Используя неравенство Гронуолла (см., например, [7, гл. 3, § 1–4]), отсюда нетрудно получить

$$u^2(t)+v^2(t) \le \frac{1}{h_{\min}} V(t,\mathbf{u}) \le \frac{1}{h_{\min}} \frac{V(0,\mathbf{u_0})}{\left(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}\right)^2} e^{-\varepsilon t},$$

и при $t\in[0,\tau]$ оценка (3.9) доказана.

Теперь рассмотрим случай $t\in[\tau,2\tau]$. В силу условий (3.8) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}}{\left(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}\right)} \le \theta,$$

а значит, учитывая оценку (3.9), получим неравенство $|u(t-\tau)|\le\theta$. Отсюда и из неравенства (3.13) следует (3.14). Далее, проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t\in[0,\tau]$, установим неравенство (3.9) при $t\in[\tau,2\tau]$.

Наконец, применяя метод математической индукции, нетрудно получить оценку (3.9) при $t\in[m\tau,(m+1)\tau]$, $m\in\mathbb{N}$.

Теорема доказана. □

Теперь получим оценки для $w(t)$ — третьей компоненты решения системы (2.7). Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (2.6). *Тогда для третьей компоненты решения* $w(t)$ *начальной задачи* (2.7), (2.8) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* (2.9), (2.10), (3.7), (3.8), *справедлива оценка*

$$|w(t)| \le |v_0(0)+w_0(0)|e^{-ct}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}}{\left(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}\right)} \left(e^{-\varepsilon t/2}+\beta e^{-ct}\int\limits_0^t e^{(c-(\varepsilon/2))s}ds\right), \quad (3.17)$$

где

$$\beta = bp(y_0+\theta)+|c-d+bpx_0|,$$

ε *определено в* (3.5), q *определено в* (3.6), *функционал* $V(t,\mathbf{u})$ *определен в* (3.1), θ *определено в* (3.4).

Доказательство. Пусть $(u(t),v(t),w(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (2.7), (2.8). Из второго и третьего уравнений системы (2.7) нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}(v(t)+w(t)) = bp(y_0+v(t))u(t)+(c-d+bpx_0)\,v(t)-c(v(t)+w(t)).$$

Отсюда вытекает равенство

$$v(t) + w(t) = (v_0(0) + w_0(0))e^{-ct}$$

$$+ \int\limits_0^t e^{-c(t-s)} \Big(bp(y_0 + v(s))u(s) + (c - d + bpx_0)\, v(s) \Big) ds.$$

По теореме 3 из неравенств (3.8) и (3.9) получим $|v(t)| \le \theta$,

$$\max\{|u(t)|, |v(t)|\} \le \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \; \frac{\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}}{\Big(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\, \sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}\Big)} e^{-\varepsilon t/2}. \tag{3.18}$$

Следовательно,

$$|v(t) + w(t)| \le |v_0(0) + w_0(0)|e^{-ct}$$

$$+ \Big(bp(y_0 + \theta) + |c - d + bpx_0| \Big) \int\limits_0^t e^{-c(t-s)} \max\{|u(s)|, |v(s)|\} ds$$

$$\le |v_0(0) + w_0(0)|e^{-ct} + \frac{\beta}{\sqrt{h_{\min}}} \; \frac{\sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}}{\Big(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\, \sqrt{V(0,\mathbf{u_0})}\Big)} \; e^{-ct} \int\limits_0^t e^{(c-(\varepsilon/2))s} ds.$$

Отсюда, используя неравенство $|w(t)| \le |v(t) + w(t)| + |v(t)|$ и неравенство (3.18), получим (3.17).

Теорема доказана. $\square$

4. Заключение

В работе рассматривалась система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории. Используя метод функционалов Ляпунова – Красовского, были проведены исследования асимптотической устойчивости положения равновесия, соответствующего совместному сосуществованию популяций. Установлены оценки решений, характеризующие приближение численностей популяций к асимптотически устойчивому положению равновесия, и получены оценки на начальные численности популяций, при которых имеет место сходимость к положению равновесия. Все величины, входящие в полученные оценки, указаны конструктивно.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

Список литературы

1. Демиденко Г. В. Матричные уравнения : учеб. пособие. Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. 203 с.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, No 3. С. 20–28.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, No 5. С. 1025–1040.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. 211 с.
5. Матвеева И. И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, No 3. С. 122–132.
6. Скворцова М. А. Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, No 2. С. 108–120.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
8. Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, No 8. С. 1137–1140.
9. Forde J. E. Delay differential equation models in mathematical biology. Ph. D. dissertation. University of Michigan, 2005. 104 p.
10. Gourley S. A., Kuang Y. A stage structured predator-prey model and its dependence on maturation delay and death rate // J. Math. Biol. 2004. Vol. 49, N 2. P. 188–200. https://doi.org/10.1007/s00285-004-0278-2
11. Kharitonov V. L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Syst. Control Lett. 2004. Vol. 53, N 5. P. 395–405. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.05.016
12. Mondié S., Kharitonov V. L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. Vol. 50, N 2. P. 268–273. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.841916

Мария Александровна Скворцова, кандидат физико-математических наук, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Российская Федерация, 630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, 4; Новосибирский государственный университет, Российская Федерация, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2; тел.: (383)3297534
(e-mail: `sm-18-nsu@yandex.ru`)

Поступила в редакцию 10.08.18

Estimates for Solutions in a Predator-Prey Model with Delay

M. A. Skvortsova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. In the paper we consider a system of delay differential equations describing the interaction between predator and prey populations living on the same territory. The system consists of three equations, herewith the components of solutions characterize the number of individuals of prey population, the number of adult predators, and the number of juvenile predators. It is assumed that only adult predators can attack the individuals of prey population and reproduce. The delay parameter is assumed to be constant and denotes the time that the predators need to become adult. For the system we consider the initial value problem, for which it is discussed the existence, uniqueness, nonnegativity, and boundedness of solutions. It is also discussed the stability of stationary solutions (equilibrium points) corresponding to complete extinction of populations, extinction of only predator populations and coexistence of predator and prey populations. The main attention in the paper is paid to obtaining estimates of solutions characterizing the rate of convergence to the equilibrium point corresponding to the coexistence of populations and the establishment of estimates for the attraction set, i.e. the admissible conditions for the initial data under which the convergence takes place. When obtaining the results, we use the method of Lyapunov–Krasovskii functionals, which is an analogue of the method of Lyapunov functions for ordinary differential equations. Herewith in the paper it is significantly used the modified Lyapunov–Krasovskii functional proposed by G.V. Demidenko and I.I. Matveeva. It is important to note that this functional allows to obtain estimates of solutions to delay systems, which are analogues of the Krein's estimate for ordinary differential equations, and the construction of such functional is reduced to solving well-conditioned problems.

Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, estimates for solutions, attraction set, modified Lyapunov – Krasovskii functional.

References

1. Demidenko G.V. *Matrichnye Uravneniya: Uchebnoe posobie.* [Matrix Equations. Textbook]. Novosibirsk, Publishing Office of the Novosibirsk State University, 2009, 203 p. (in Russian)
2. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 20–28. (in Russian)
3. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Sib. Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 824–836. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0084-3
4. Krasovskii N.N. *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford, Stanford University Press, 1963, 188 p.
5. Matveeva I.I. Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 557–566. https://doi.org/10.1134/S1990478913040108
6. Skvortsova M.A. Stability of solutions in the predator-prey model with delay. *Matematicheskie Zametki SVFU* [Mathematical Notes of North-Eastern Federal University], 2016, vol. 23, no. 2, pp. 108–120. (in Russian)

7. Hartman Ph. *Ordinary Differential Equations*. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons, 1964, 612 p.
8. Khusainov D.Ya., Ivanov A.F., Kozhametov A.T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 8, pp. 1196–1200. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0269-0
9. Forde J.E. *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. Ph.D. dissertation. University of Michigan, 2005, 104 p.
10. Gourley S.A., Kuang Y. A stage structured predator-prey model and its dependence on maturation delay and death rate. *J. Math. Biol.*, 2004, vol. 49, no. 2, pp. 188–200. https://doi.org/10.1007/s00285-004-0278-2
11. Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems. *Syst. Control Lett.*, 2004, vol. 53, no. 5, pp. 395–405. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.05.016
12. Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2005, vol. 50, no. 2, pp. 268–273. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.841916

Maria Skvortsova, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation; Novosibirsk State University, 2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation; tel.: (383)3297534
(e-mail: `sm-18-nsu@yandex.ru`)

Received 10.08.18