Серия «Математика»
2018. Т. 25. С. 93—108

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.956
MSC 65N06
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.93

Об устойчивости сплайн-коллокационной разностной схемы для полулинейной дифференциально-алгебраической системы индекса (1,0)*

С. В. Свинина
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается полулинейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных индекса (1,0) с прямоугольной областью определения и согласованными начально-краевыми условиями. Предполагается, что пучок матриц, построенный по коэффициентам дифференциально-алгебраической системы, гладко подобен специальной канонической форме. Для численного решения системы строится равномерная сетка в прямоугольной области определения. На сетке выделяется прямоугольная элементарная подобласть с фиксированным количеством узлов по каждому направлению. В каждой такой подобласти решение системы ищется в виде полинома Ньютона. Значения полинома на линиях стыка элементарных подобластей должны совпадать. Дифференциально-алгебраическая система записывается во внутренних узлах элементарной подобласти. Производные, входящие в систему, в каждом узле элементарной подобласти аппроксимируются соответствующими производными полинома Ньютона. В итоге записывается нелинейная сплайн-коллокационная разностная схема, порядок аппроксимации которой совпадает с порядком сплайна по каждой независимой переменной. С помощью преобразования матричного пучка системы и свойств интерполяционного сплайна, сплайн-коллокационная разностная схема преобразуется к матрично-разностному уравнению. В работе показано, что матрично-разностное уравнение можно записать в нормальной форме. Такая форма записи разностной схемы позволяет применить к ней метод простых итераций. С помощью метода простых итераций записывается итерационный процесс и доказывается, что соответствующий оператор перехода является оператором сжатия и отображает сеточное пространство в себя. Попутно доказывается, что разностная схема имеет единственное решение и является устой-

* Работа выполнена в рамках проекта СО РАН Качественная теория и численный анализ дифференциально-алгебраических уравнений № 0348-216-0009.

чивой в сеточном пространстве. Для обоснования последнего утверждения используются результаты предшествующих работ автора. В итоге в работе обосновывается существование и устойчивость единственного решения сплайн-коллокационной разностной схемы с произвольным порядком аппроксимации. Устойчивость разностной схемы в настоящей работе понимается в смысле определения А. А. Самарского. Результаты численного решения полулинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных демонстрируются на тестовом примере.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, индекс, полулинейная система, разностная схема, сплайн.

1. Введение

При описании поведения сплошной среды (газ, жидкость, твердое тело) возникают различные модели, которые приводят, как правило, к нелинейным системам уравнений в частных производных, к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными или к нелинейным дифференциально-алгебраическим системам уравнений в частных производных [6; 10; 11]. В настоящей работе мы рассматриваем частный случай нелинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных, а именно полулинейную систему вида

$$A(x,t)\partial_t u + B(x,t)\partial_x u + F(x,t,u) = 0, \tag{1.1}$$

$$\det A(x,t) = 0 \quad \text{и} \quad \det B(x,t) = 0 \quad \forall\, x,t,$$

в которой $A(x,t)$ и $B(x,t)$ — заданные квадратные матрицы порядка n, $F(x,t,u)$ — известная n-мерная вектор-функция; $u \equiv u(x,t)$ — искомая n-мерная вектор-функция. Предполагается, что элементы матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$ принадлежат пространству $C^1(U)$, где $U = \{(x,t)|\ x \in [x_0; X],\ \ t \in [t_0; T]\}$, а элементы вектора $F(x,t,u)$ принадлежат пространству $C^1(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U} = \{(x,t,u)|\ \ (x,t) \in U,\ \ \|u(x,t)\|_{C(U)} < \mathcal{Q}\}$, $\mathcal{Q}$ — некоторая постоянная величина.

Зададим для системы (1.1) начально-краевые условия

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x), \tag{1.2}$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — известные n-мерные вектор-функции. Предполагаем, что функции $\psi(t)$ и $\phi(x)$ согласованы в точке (x_0,t_0) вместе со своими производными, т. е. выполнены следующие равенства:

$$\psi(t_0) = \phi(x_0), \qquad \left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

$$A(x_0,t_0)\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + B(x_0,t_0)\left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = F(x_0,t_0,\psi(t_0)).$$

В работе [3] получена теорема об s-гладком подобии матричного пучка $\det(A(x) + \lambda B(x))$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \bar{U}$, $\bar{U}$ — замыкание некоторой области, содержащейся в $\mathbb{R}^m$, канонической форме

$$\mathrm{diag}\{E_d, M(x), E_p\} + \lambda \ \mathrm{diag}\{J(x), E_l, N(x)\}, \qquad (1.3)$$

где E_d — единичная матрица порядка d; $M(x)$ и $N(x)$ – верхние (правые) треугольные блоки с нулевыми диагоналями порядков l и p, соответственно; $J(x) = \mathrm{diag}\{J_1(x), J_2(x), \dots, J_{\tilde{s}}(x)\}$ — блочно-диагональная матрица порядка d и $d + l + p = n$. Блоки $M(x)$ и $N(x)$ в (1.3) являются нильпотентными матрицами в области определения $\bar{U}$. Пусть $\mathrm{ind}\ M(x) = k_1$ и $\mathrm{ind}\ N(x) = k_2$ в области $\bar{U}$, т. е. $k_1 = \min\{\bar{k} : M(x)^{\bar{k}} = 0,\ \ \forall x \in \bar{U}\}$. Аналогично определяется k_2. Пучок $\mathcal{P}(\lambda, x, t) = A(x, t) + \lambda\ B(x, t)$, для которого выполняются все условия теоремы об s- гладком подобии из [3], имеет индекс $(k, 0)$, где $k = \max\{k_1, k_2\}$ и, соответственно, система (1.1) имеет индекс $(k, 0)$. В настоящей работе мы предполагаем, что для пучка $\mathcal{P}(\lambda, x, t)$ выполнены все условия теоремы об s-гладком подобии из работы [3] и степени элементарных делителей пучка $\mathcal{P}(\lambda, x, t)$, построенного по коэффициентам системы (1.1) , не превосходят единицы. В этом случае система (1.1) имеет индекс $(1, 0)$ и для пучка $\mathcal{P}(\lambda, x, t)$ найдутся невырожденные в области определения U матрицы $P(x, t)$ и $Q(x, t)$, обладающие той же гладкостью, что и элементы пучка $\mathcal{P}(\lambda, x, t)$, которые выполняют следующее преобразование

$$P(x,t)\mathcal{P}(\lambda, x, t)Q(x, t) = \mathrm{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\} + \lambda\ \mathrm{diag}\{J(x, t), E_l, \mathcal{O}_p\}, \quad (1.4)$$

где $J(x, t) = \mathrm{diag}\{k_1(x, t), k_2(x, t), \dots, k_d(x, t)\}$ – диагональная матрица, $\mathcal{O}_l$ — нулевой квадратный блок порядка l.

Цель работы состоит в построении и исследовании нелинейной разностной схемы высокой точности для задачи (1.1), (1.2) индекса $(1, 0)$. Для этого мы применяем аппроксимацию функции $u(x, t)$ сплайном $\mathcal{S}^{m_1, m_2}(x, t)$ без дефекта и получаем нелинейную разностную схему. Доказываем её устойчивость.

Отметим, что настоящая статья является непосредственным продолжением работы [2]. Сплайн-коллокационный метод численного решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных индекса $(1, 0)$ разработанный и исследованный в работе [2] в настоящей работе применяется к численному решению полулинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных индекса $(1, 0)$. Сплайн-коллокационный метод также применялся автором настоящей статьи для решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных индекса $(k, 0)$. Результаты исследования отражены в работах [4; 5].

Перейдем к построению разностной схемы.

2. Разностная схема

Построим в прямоугольной области U равномерную сетку U_Δ с шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным

$$U_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau,\ \ i = \overline{0, n_1},\ j = \overline{0, n_2}\}.$$

Тогда в области $\mathcal{U}$ будем иметь соответствующее сеточное пространство

$$\mathcal{U}_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau,\ u_{i,j} = u(x_i, t_j),\ \ i = \overline{0, n_1},\ j = \overline{0, n_2}\}.$$

В каждом прямоугольнике $U_{i,j}^{m_1,m_2} = [x_i, x_i + m_1 h] \times [t_j, t_j + m_2\tau] \subseteq U_\Delta$ сетки U_Δ, содержащем $(m_1 + 1)(m_2 + 1)$ узлов, где $m_1 \le n_1$, $m_2 \le n_2$, будем искать решение задачи (1.2), (1.3) в виде полинома Ньютона $L_{i,j}^{m_1,m_2}(x, t)$, значения которого в узловых точках (x_i, t_j) области $U_{i,j}^{m_1,m_2}$, по предположению, совпадают со значениями искомой функции $u(x, t)$ в этих точках. Для того, чтобы приближение на всей сетке U_Δ было непрерывным, на горизонтальных и вертикальных слоях $x = x_i$ и $t = t_j$ требуем, чтобы полиномы $L_{i,j}^{m_1,m_2}(x, t)$ принимали одинаковые значения. Для аппроксимации производных $\partial_t u(x, t)$ и $\partial_x u(x, t)$ на слоях $x = x_i$ и $t = t_j$ воспользуемся безразностными формулами численного дифференцирования для равноотстоящих узлов ([1], с. 161). Записывая систему (1.2) в узловых точках $(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau)$, $l_1 = \overline{1, m_1}$, $l_2 = \overline{1, m_2}$ области $U_{i,j}^{m_1,m_2}$, подставляя в неё значения искомой функции $u(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau)$ и аппроксимации её производных в этих точках, получим разностную схему

$$A_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}v_{i+l_1,j+l_3} + B_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l_3}v_{i+l_3,j+l_2} + F_{i+l_1,j+l_2} = 0,$$
$$v_{0,j} = \psi_j,\quad v_{i,0} = \phi_i,\quad i = \overline{0, n_1 - 1},\ j = \overline{0, n_2 - 1}, \tag{2.1}$$

где

$$A_{i+l_1,j+l_2} = A(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau),\quad B_{i+l_1,j+l_2} = B(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau)$$
$$F_{i+l_1,j+l_2} = F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, v_{i+l_1,j+l_2}),$$
$$\phi_i = \phi(x_i),\quad \psi_j = \psi(t_j).$$

Разностная схема (2.1) в каждом узле (x_i, t_j) сетки U_Δ представляет собой систему нелинейных уравнений порядка $\tilde{n} = m_1 m_2 n$ с искомым вектором

$$\bar{v}_{i+1,j+1} = (v_{i+1,j+1}, \ldots, v_{i+1,j+m_2}, \ldots, v_{i+m_1,j+1}, \ldots, v_{i+m_1,j+m_2})^\top.$$

Разностная схема (2.1) называется нелинейной сплайн-коллокационной разностной схемой. Как и в линейном случае из работы [2], система (2.1) представляет собой целый набор нелинейных разностных схем, порядки аппроксимации которых определяются порядками сплайнов и составляют величину, равную $O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2})$.

Итак, нам необходимо исследовать разностную схему (2.1), то есть доказать существование её единственного решения и его равномерную ограниченность в сеточном пространстве U_Δ [12].

В сеточном пространстве $C(U_\Delta)$ n-мерных вектор-функций используем равномерную норму

$$||u_{i,j}||_{C(U_\Delta)} = \max_{i,j} ||u_{i,j}||,$$

где $||u_{i,j}|| = \max_{s=1,2,\ldots,n} |u^s_{i,j}|$, $u_{i,j} = (u^1_{i,j},\ u^2_{i,j}, \ldots, u^n_{i,j})^\top$, согласованную с нормой n-мерной вектор-функции $u(x,t) \in C(U)$:

$$||u(x,t)||_{C(U)} = \max\{||u(x,t)||\ \forall (x,t) \in U\}.$$

В следующем разделе запишем разностную схему (2.1) в виде матричного уравнения.

3. Матричная форма разностной схемы

Преобразуем разностную схему (2.1) к удобному виду, используя идею представления функции $F_{i+l_1,j+l_2}$, например из [9]. Принимая за o нулевой вектор размера n, запишем

$$F_{i+l_1,j+l_2} = F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, v_{i+l_1,j+l_2}) - F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, o) + \\ + F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, o) =$$

$$= \int_0^1 \partial F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, \xi v_{i+l_1,j+l_2})/\partial\xi d\xi + F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, o) =$$

$$= \int_0^1 \partial F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, \xi v_{i+l_1,j+l_2})/\partial v d\xi v_{i+l_1,j+l_2} + F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, o),$$

где $\partial F/\partial v = \left(\frac{\partial F_{s_1}}{\partial v^{s_2}}\right)$ – матрица Якоби, $s_1, s_2 = \overline{1,n}$. Обозначим

$$C_{i+l_1,j+l_2} = \int_0^1 \partial F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, \xi v_{i+l_1,j+l_2})/\partial v d\xi,$$

$$f_{i+l_1,j+l_2} = -F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, o), \tag{3.1}$$

тогда будем иметь

$$F_{i+l_1,j+l_2} = C_{i+l_1,j+l_2} v_{i+l_1,j+l_2} - f_{i+l_1,j+l_2}.$$

Отметим, что в силу сделанного выше предположения относительно исходных данных системы (1.2), элементы матрицы $C(x,t,u)$ являются ограниченными в области $\mathcal{U}$. Таким образом, систему (2.1) запишем в следующем виде

$$A_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=1}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}v_{i+l_1,j+l_3}+B_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=1}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l_3}v_{i+l_3,j+l_2}+$$

$$+C_{i+l_1,j+l_2}v_{i+l_1,j+l_2}=f_{i+l_1,j+l_2}-\frac{1}{\tau}A_{i+l_1,j+l_2}\gamma_{l_2,0}v_{i+l_1,j}- \tag{3.2}$$

$$-\frac{1}{h}B_{i+l_1,j+l_2}\bar{\gamma}_{l_1,0}v_{i,j+l_2},$$

$$v_{0,j}=\psi_j,\quad v_{i,0}=\phi_i,\ \ l_1=\overline{1,m_1},\ \ l_2=\overline{1,m_2},\ \ i=\overline{0,n_1-1},\ j=\overline{0,n_2-1},$$

где матрица $C_{i+l_1,j+l_2}$ и вектор $f_{i+l_1,j+l_2}$ определены в (3.1).

Систему (3.2), в силу сделанных выше предположений, можно записать в матричной форме, как это выполнено в работе [2]. Для этого мы должны проделать над системой (3.2) аналогичные преобразования, которые выполнены в разделе "Преобразование разностной схемы" статьи [2] над линейной сплайн-коллокационной разностной схемой. Мы не будем повторять ранее проделанных рассуждений, а выпишем итоговый результат. Умножая систему (3.2) слева на матрицу

$$\tilde{P}=\mathrm{diag}\{P_{i+1,j+1},\dots,P_{i+1,j+m_2},\dots,P_{i+m_1,j+1},\dots,P_{i+m_1,j+m_2}\}$$

и используя замену переменной $v_{i+l_1,j+l_2}=Q_{i+l_1,j+l_2}w_{i+l_1,j+l_2}$, запишем разностную схему (3.2) в виде матричного уравнения, аналогичного уравнению (43) из работы [2]

$$(L+\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau))\mathcal{V}=G(\mathcal{V}), \tag{3.3}$$

где $\mathcal{V}=(\mathcal{V}^1,\ \mathcal{V}^2,\ \mathcal{V}^3)^\top$ – искомый вектор размера $n_1n_2\tilde{n}$, блочные элементы которого имеют вид

$$\mathcal{V}^s=(\bar{w}^s_{1,1},\ \bar{w}^s_{1,2},\dots,\bar{w}^s_{1,n_2},\dots,\bar{w}^s_{n_1,1},\ \bar{w}^s_{n_1,2},\dots,\bar{w}^s_{n_1,n_2})^\top,$$

$$\bar{w}^s_{i+1,j+1}=(w^s_{i+1,j+1},\dots,w^s_{i+1,j+m_2},\dots,w^s_{i+m_1,j+1},\dots,w^s_{i+m_1,j+m_2})^\top,$$

$$w_{0,j}=Q^{-1}_{0,j}\psi_j,\quad w_{i,0}=Q^{-1}_{i,0}\phi_i,\quad s=1,2,3.$$

Подробно запишем матрицы L, $\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau)$ и вектор $G(\mathcal{V})$ из системы (3.3) (см. [2]). В системе (3.3) $L=\mathrm{diag}\{L^1,L^2,L^3\}$ — квадратная блочно-диагональная матрица порядка $n_1n_2\tilde{n}$. Каждый её блок L^1, L^2 и L^3 является блочно-двухдиагональной матрицей $L^1=(L^1_{i,j})$, $L^2=(L^2_{i,j})$ и $L^3=(L^3_{i,j})$, соответственно, $i=\overline{1,n_1}$, $j=\overline{1,n_1}$. Блоки $L^1_{i,j}$, $L^2_{i,j}$ и $L^3_{i,j}$, расположенные на главной диагонали ($i = j$), также имеют блочно-двухдиагональный вид

$$L^1_{i,i} = \begin{pmatrix} E_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{F}^1_{i,2} & E_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{F}^1_{i,3} & E_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & E_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{F}^1_{i,n_2} & E_s \end{pmatrix}, \quad s = dm_1m_2,$$

$$L^2_{i,i} = E_s, \quad s = lm_1m_2n_2,$$

$$L^3_{i,i} = \begin{pmatrix} E_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ E_s & E_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & E_s & E_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & E_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & E_s & E_s \end{pmatrix}, \quad s = pm_1m_2,$$

где $\mathcal{F}^1_{i,j} = \mathcal{T}^\top \tilde{\mathcal{D}}^1_{i,j} \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ – матрица перестановок (см. [2]),

$$\tilde{\mathcal{D}}^1_{i,j} = \mathcal{T}(R^{-1} \otimes E_{m_2d})\mathcal{D}^1_{i+1,j+1}(R \otimes E_{m_2d})\mathcal{T}^\top,$$

$$\mathcal{D}^1_{i,j} = \mathrm{diag}\{\exp(-r\xi^1_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j}), \exp(-2r\xi^1_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j}), \dots, \exp(-m_2r\xi^1_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j}),$$
$$\dots, \exp(-r\xi^{m_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j}), \exp(-2r\xi^{m_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j}), \dots, \exp(-m_2r\xi^{m_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}} J_{i,j})\},$$

где $J_{i,j} \equiv J(x_i, t_j, w_{i,j})$, R — квадратная матрица порядка m_1, преобразующая матрицу $\bar{\gamma}_{m_1}$ к нормальной жордановой форме. Блоки $L^1_{i,j}$, $L^2_{i,j}$ и $L^3_{i,j}$, расположенные под главной диагональю ($i = \overline{2, n_1},\ j = i - 1$), имеют вид

$$L^1_{i,j} = \mathrm{diag}\{\mathcal{K}^1_{i,1},\ \mathcal{K}^1_{i,2}, \dots, \mathcal{K}^1_{i,n_2}\}, \quad L^2_{i,j} = E_{s_1}, \quad L^3_{i,j} = \mathcal{O}_{s_1},$$

где $\mathcal{K}^1_{i,j} = \mathcal{D}^2_{i,j}$,

$$\mathcal{D}^2_{i,j} = \mathrm{diag}\left\{\exp(\frac{-\gamma_{m_2}}{r} \otimes J^{-1}_{i,j}), \exp(\frac{-2\gamma_{m_2}}{r} \otimes J^{-1}_{i,j}), \dots, \exp(\frac{-m_1\gamma_{m_2}}{r} \otimes J^{-1}_{i,j})\right\},$$

$s_1 = lm_1m_2n_2$. Все остальные блоки $L^1_{i,j}$, $L^2_{i,j}$ и $L^3_{i,j}$ являются нулевыми блоками подходящего размера. Матрица $\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)$ является блочной квадратной матрицей порядка $n_1n_2\tilde{n}$. Она состоит из блоков

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau) = \left(\mathcal{L}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h, \tau)\right), \quad \text{где} \quad \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 = 1, 2, 3.$$

Каждый блок $\mathcal{L}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h,\tau)$ имеет блочно-двухдиагональный вид. Блоки главной диагонали определяются следующим образом

$$\mathcal{L}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,i}(h,\tau)=\begin{pmatrix} \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \epsilon^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,2}(h,\tau) & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & \epsilon^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,3}(h,\tau) & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s \\ \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \mathcal{O}_s & \dots & \epsilon^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,n_2}(h,\tau) & \mathcal{O}_s \end{pmatrix},$$

где $s=dm_1m_2$, $i=\overline{1,n_1}$ и $\tilde{l}_1,\tilde{l}_2=1,2,3$. Блоки, расположенные ниже главной диагонали ($i=\overline{2,n_1},\ j=i-1$), имеют вид

$$\mathcal{L}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,i}(h,\tau)=\operatorname{diag}\left\{\hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,1}(h,\tau),\hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,2}(h,\tau),\dots,\hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,n_2}(h,\tau)\right\}.$$

Все остальные блоки $\mathcal{L}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,j}(h,\tau)$ являются нулевыми блоками подходящего размера.

Вектор $G(\mathcal{V})$ в системе (3.3) имеет следующий вид

$$G(\mathcal{V})=\bar{g}+(H+\mathcal{H}(\mathcal{V},h,\tau))w_0+(Q+\mathcal{Q}(\mathcal{V},h,\tau))w^0+O(h^{m_1})+O(\tau^{m_2}). \tag{3.4}$$

В (3.4) вектор $\bar{g}$ имеет порядок $n_1n_2\tilde{n}$ и состоит из блоков $\bar{g}=(g^1,g^2,g^3)^\top$ размеров n_1n_2d, n_1n_2l и n_1n_2p, соответственно, где

$$g^s=(\tilde{g}^1_{1,1},\ \tilde{g}^1_{1,2},\dots,\tilde{g}^1_{1,n_2},\dots,\tilde{g}^1_{n_1,1},\ \tilde{g}^1_{n_1,2},\dots,\tilde{g}^1_{n_1,n_2})^\top.$$

Каждая компонента $\tilde{g}^k_{i,j}$ определяется равенством $\tilde{g}^k_{i,j}=-\tau M^{-1}_{i,j}\Omega^{-1}_{i,j}Tg_{i,j}$, где $M^{-1}_{i,j}$, $\Omega^{-1}_{i,j}$ и T определены в [2],

$$g_{i,j}=(\tilde{f}_{i,j},\tilde{f}_{i,j+1},\dots,\tilde{f}_{i,j+m_1-1},\dots,\tilde{f}_{i+m_1-1,j},\tilde{f}_{i+m_1-1,j+1},\dots$$
$$\dots,\tilde{f}_{i+m_1-1,j+m_2-1})^\top.$$

Векторы w_0 и w^0 из (3.4) имеют порядок $n_1n_2\tilde{n}$ и определяются начально-краевыми условиями из (3.3)

$$w_0=(w^1_0,\ w^2_0,\ w^3_0)^\top,\ \text{ где }\ w^s_0=(e_{n_2}\otimes\bar{w}^s_{1,0},\ e_{n_2}\otimes\bar{w}^s_{2,0},\dots,e_{n_2}\otimes\bar{w}^s_{n_1,0})^\top,$$

$$w^0=(w^{0,1},\ w^{0,2},\ w^{0,3})^\top,\ \text{ где }\ w^{0,s}=e_{n_1}\otimes(\bar{w}^s_{0,1},\ \bar{w}^s_{0,2},\dots,\bar{w}^s_{0,n_2})^\top.$$

Далее в (3.4) H и Q — известные квадратные блочно-диагональные матрицы порядка $n_1n_2\tilde{n}$ с квадратными блоками порядков $n_1n_2m_1m_2d$, $n_1n_2m_1m_2l$ и $n_1n_2m_1m_2p$,

$$H=\operatorname{diag}\{H^1,\ H^2,\ H^3\}\ \text{ и }\ Q=\operatorname{diag}\{Q^1,\ Q^2,\ Q^3\},$$

где

$$H^1 = \mathrm{diag}\{H^1_{1,1},\ H^1_{2,2}, \dots, H^1_{n_1,n_1}\}, \quad H^1_{i,i} = \mathrm{diag}\{-\mathcal{F}^1_{i,1},\ \mathcal{O}\},$$

$\mathcal{O}$ — нулевой квадратный блок порядка $(n_2-1)m_1m_2d$,

$H^2 = \mathcal{O}_{\int\infty}$, $H^3 = \mathrm{diag}\{H^3_{1,1},\ H^3_{2,2}, \dots, H^3_{n_1,n_1}\}$, $H^3_{i,i} = \mathrm{diag}\{-E_{s_2},\ \mathcal{O}^{s_3}\}$,

$s_1 = n_1n_2m_1m_2l$, $s_2 = m_1m_2p$, $s_3 = (n_2-1)m_1m_2p$,

$$Q^1 = \mathrm{diag}\{Q^1_{1,1},\ \mathcal{O}\}, \quad Q^1_{1,1} = -\mathrm{diag}\{\mathcal{K}^1_{1,1},\ \mathcal{K}^1_{1,2}, \dots, \mathcal{K}^1_{1,n_2}\},$$

$\mathcal{O}$ — нулевой квадратный блок порядка $(n_1-1)n_2m_1m_2d$,

$$Q^2 = \mathrm{diag}\{E_{s_1},\ \mathcal{O}_{s_2}\}, \quad Q^3 = \mathcal{O}_{s_3},$$

$s_1 = n_2m_1m_2l$, $s_2 = (n_1-1)n_2m_1m_2l$ и $s_3 = n_1n_2m_1m_2p$.

Наконец, матрицы $\mathcal{H}(\mathcal{V}, h, \tau)$ и $\mathcal{Q}(\mathcal{V}, h, \tau)$ из (3.4) являются квадратными матрицами порядка $n_1n_2\tilde{n}$ и имеют следующий блочный вид

$$\mathcal{H}(\mathcal{V}, h, \tau) = \left(\mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h,\tau)\right), \quad \mathcal{Q}(\mathcal{V}, h, \tau) = \left(\mathcal{Q}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h,\tau)\right), \quad \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 = 1, 2, 3$$

их блоки определяются следующим образом:

$$\mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h,\tau) = \mathrm{diag}\{\mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,1}, \mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{2,2}, \dots, \mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{n_1,n_1}\},$$

$$\mathcal{H}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,i} = \mathrm{diag}\{-\bar{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{i,1}(h,\tau), \mathcal{O}^{\tilde{l}_1}\},$$

где $\mathcal{O}^{\tilde{l}_1}$ — нулевые квадратные блоки порядков $(n_2-1)m_1m_2d$, $(n_2-1)m_1m_2l$ и $(n_2-1)m_1m_2p$, соответственно $\tilde{l}_1$,

$$\mathcal{Q}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}(h,\tau) = \mathrm{diag}\{\mathcal{Q}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,1}, \mathcal{O}^{\tilde{l}_1}\},$$

$$\mathcal{Q}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,1} = -\mathrm{diag}\{\hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,1}(h,\tau), \hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,2}(h,\tau), \dots, \hat{\epsilon}^{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2}_{1,n_2}(h,\tau)\},$$

где $\mathcal{O}^{\tilde{l}_1}$ — нулевые квадратные блоки порядков $(n_1-1)n_2m_1m_2d$, $(n_1-1)n_2m_1m_2l$ и $(n_1-1)n_2m_1m_2p$, соответственно $\tilde{l}_1$.

Итак, все составляющие компоненты разностной схемы (3.3) выписаны. Матричное уравнение (3.3) представляет собой нелинейное уравнение относительно неизвестного вектора $\mathcal{V}$ и является матричной формой сплайн-коллокационной разностной схемы (2.1). Покажем, что уравнение (3.3) можно записать в нормальной форме. Для этого необходимо доказать существование матрицы $(L + \mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}$. Найдем L^{-1}. Диагональные блоки L^1, L^2 и L^3 матрицы L имеют блочно-диагональную структуру, поэтому нетрудно в явном виде выписать матрицы $(L^1)^{-1}$, $(L^2)^{-1}$ и $(L^3)^{-1}$.

Матрица $(L^1)^{-1} = (X_{\nu_1,\nu_2})$, где $\nu_1, \nu_2 = \overline{1, n_1}$, имеет блочную нижнюю (левую) треугольную форму. Её квадратные блоки X_{ν_1,ν_2} определяются равенством

$$X_{\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} \mathcal{O}_{s_1}, & \text{при} \;\; \nu_1 < \nu_2, \\ (-1)^{\nu_1-\nu_2} \left(\prod_{s=\nu_2}^{\nu_1-1} (L^1_{s+1,s+1})^{-1} L^1_{s+1,s} \right) (L^1_{\nu_2,\nu_2})^{-1}, & \text{при} \;\; \nu_1 \geq \nu_2 \end{cases}, \tag{3.5}$$

где выполняется левое произведение матриц, т. е. каждая следующая матрица умножается на предыдущую слева, $s_1 = n_2 m_1 m_2 d$. Матрицы $(L^1_{\nu_2,\nu_2})^{-1} = (Y^{\nu_2}_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2})$ из (3.5) имеют нижнюю (левую) треугольную форму, где $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 = \overline{1, n_2}$. Их блоки $Y^{\nu_2}_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2}$ определяются следующим образом:

$$Y^{\nu_2}_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2} = \begin{cases} \mathcal{O}_{s_2}, & \text{при} \;\; \tilde{\nu}_1 < \tilde{\nu}_2, \\ E_{s_2}, & \text{при} \;\; \tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2, \\ (-1)^{\tilde{\nu}_1-\tilde{\nu}_2} \prod_{s=\tilde{\nu}_2+1}^{\tilde{\nu}_1} \mathcal{F}^1_{\nu_2,s}, & \text{при} \;\; \tilde{\nu}_1 > \tilde{\nu}_2 \end{cases},$$

где $s_2 = m_1 m_2 d$.

В частности, матрица $(L^2)^{-1} = (X_{\nu_1,\nu_2})$, где $\nu_1, \nu_2 = \overline{1, n_1}$, определяется равенством

$$X_{\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} \mathcal{O}_{s_1}, & \text{при} \;\; \nu_1 < \nu_2, \\ (-1)^{\nu_1-\nu_2} E_{s_1}, & \text{при} \;\; \nu_1 \geq \nu_2 \end{cases},$$

где $s_1 = n_2 m_1 m_2 l$.

Наконец, запишем $(L^3)^{-1}$. Она имеет блочно-диагональную форму

$$(L^3)^{-1} = \operatorname{diag}\{X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}\},$$

каждый её блок X_{ν_1}, где $\nu_1 = \overline{1, n_1}$, является квадратной блочной нижней (левой) треугольной матрицей порядка $n_2 m_1 m_2 p$ и определяется равенствами

$$X_{\nu_1} = \left(Y^{\nu_1}_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2} \right), \quad Y^{\nu_2}_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2} = \begin{cases} \mathcal{O}_{s_2}, & \text{при} \;\; \tilde{\nu}_1 < \tilde{\nu}_2, \\ (-1)^{\tilde{\nu}_1-\tilde{\nu}_2} E_{s_2}, & \text{при} \;\; \tilde{\nu}_1 \geq \tilde{\nu}_2 \end{cases},$$

где $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 = 1, 2, \ldots, n_2$ и $s_2 = m_1 m_2 p$.

В силу ограниченности матрицы $(L^1)^{-1}$ на сетке U_Δ (см. [2]) и структуры матрицы $\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)$, которая также является ограниченной в области $\mathcal{U}$ в результате сделанных предположений о гладкости исходных данных системы (1.1), имеем, что $\|L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = c_1 h + c_2 \tau$, где c_ν – некоторые постоянные величины. Тогда (см., например, [8], с. 195, теорема 7.1.1) матрица $(E + L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}$ существует и определяется равенством

$$(E + L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[-L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau) \right]^{\nu} \tag{3.6}$$

и $\|(E+L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau))^{-1}\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 1+\tilde{c}_1 h+\tilde{c}_2\tau$, где $\tilde{c}_\nu$ – некоторые постоянные величины. Поскольку матрицу $(L+\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau))^{-1}$ мы можем представить в следующем виде $(L+\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau))^{-1} = (E+L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau))^{-1}L^{-1}$, то тем самым мы доказали её существование.

Учитывая (3.6), запишем матрично-разностное уравнение (3.3) в нормальной форме

$$\mathcal{V} = \Pi(\mathcal{V}), \tag{3.7}$$

в котором разностный оператор $\Pi(\mathcal{V})$ имеет следующий вид

$$\Pi(\mathcal{V}) = L^{-1}\bar{g} + L^{-1}Hw_0 + L^{-1}Qw^0 + \delta(\mathcal{V},h,\tau),$$

где

$$\delta(\mathcal{V},h,\tau) = L^{-1}\mathcal{H}(\mathcal{V},h,\tau)w_0 + L^{-1}\mathcal{Q}(\mathcal{V},h,\tau)w^0+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[-L^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau)\right]^{\nu} L^{-1}G(\mathcal{V}) + O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2}).$$

Перейдем к обоснованию устойчивости разностной схемы (3.7), используя определение из [12].

4. Устойчивость разностной схемы

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *собственные значения $\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}}$, $\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}}$ и $\xi^{s_3}_{J_{i,j}}$ матриц $\bar{\gamma}_{m_1}$, γ_{m_2} и $J_{i,j}$, соответственно, в каждом узле разностной сетки U_Δ удовлетворяют условию*

$$r\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}}\cdot\xi^{s_3}_{J_{i,j}} \neq -\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}} \quad \forall s_1, s_2, s_3,$$

где $s_1 = \overline{1,m_1}$, $s_2 = \overline{1,m_2}$, $s_3 = \overline{1,k}$;

2) *собственные значения $\xi^{s}_{J_{i,j}}$ положительные и сохраняют свою кратность в сеточном пространстве U_Δ;*

3) *отношение шагов разностной сетки $\tau/h = r$ является постоянной величиной.*

Тогда разностная схема (3.3) или (3.7) в сеточном пространстве U_Δ имеет единственное решение равномерно-ограниченное по начально-краевым условиям и по правой части, для которого справедлива оценка

$$\|\mathcal{V}\|_{C(U_\Delta)} \leq \mathcal{M}_1\|F_{i,j,0}\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_2\|\phi_i\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_3\|\psi_j\|_{C(U_\Delta)}, \tag{4.1}$$

где $\mathcal{M}_\nu - const$, $\nu = 1,2,3$, $i = 1,\ldots,n_1$, $j = 1,\ldots,n_2$.

Доказательство. Докажем сначала существование решения уравнения (3.7) при достаточно малых шагах h и τ. Применим к уравнению (3.7) метод простых итераций и запишем соответствующий итерационный процесс

$$\mathcal{V}_k = \bar{\Pi}(\mathcal{V}_{k-1}, h, \tau), \quad \bar{\Pi} = L^{-1}\bar{g} + L^{-1}Hw_0 + L^{-1}Qw^0 + \delta(\mathcal{V}_{k-1}, h, \tau). \quad (4.2)$$

Так как $\delta(\mathcal{V}_{k-1}, h, \tau)$ является проекцией некоторой функции, построенной по элементам матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$ и $C(x,t,u)$, из пространства $C^1(\mathcal{U})$ на сеточное пространство $C^1(\mathcal{U}_\Delta)$ и при этом

$$\|\delta(\mathcal{V}_{k-1}, h, \tau)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = c_1 h + c_2 \tau,$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные величины, то для любых $\mathcal{V}_{k+s}$ и $\mathcal{V}_k$ справедливо неравенство

$$\|\delta(\mathcal{V}_{k+s}, h, \tau) - \delta(\mathcal{V}_k, h, \tau)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \leq \vartheta(h,\tau)\|\mathcal{V}_{k+s} - \mathcal{V}_k\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \quad (4.3)$$

где $\vartheta(h,\tau) \to 0$ при $h, \tau \to 0$. Из (4.3) следует, что при достаточно малых h и τ отображение $\bar{\Pi}$ есть оператор сжатия. К тому же $\bar{\Pi}$ отображает сеточное пространство $C^1(\mathcal{U}_\Delta)$ в себя. Тогда по теореме из ([7], стр. 605) существует единственное решение $\mathcal{V}^*$ уравнения (3.7). Сеточная функция $\mathcal{V}^*$ является пределом равномерно-сходящейся последовательности $\{\mathcal{V}_k\}$. Докажем равномерную ограниченность сеточной функции $\mathcal{V}^*$. Так как сеточные функции $\mathcal{V}_k$ при каждом значении k являются решениями уравнения (4.2), которое при каждом значении k совпадает с уравнением (43) из работы [2], то $\mathcal{V}_k$ являются равномерно-ограниченными на сетке U_Δ и удовлетворяют неравенству (4.1). Поскольку последовательность $\{\mathcal{V}_k\}$ равномерно сходится к некоторой сеточной функции $\mathcal{V}^*$, то и для предельной функции $\mathcal{V}^*$ также будет справедлива оценка (4.1). $\square$

5. Численные эксперименты

Для демонстрации эффективности предложенного в работе метода рассмотрим тестовый пример начально-краевой задачи (1.1), (1.2) с известным решением.

Пример. Задана полулинейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных вида (1.1) с матричными коэффициентами

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \iota^2 + \chi^2 + 1 & xt + \sin(\iota) & \zeta \\ 0 & \exp(\iota) + x\chi & \zeta^2 + \iota + x\chi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} \chi & 0 & \iota + \exp(\chi) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x\chi) + u_1 + \zeta^2 \end{pmatrix}$$

и вектором $-F(x,t,u)$

$$\begin{pmatrix} xu_1(u_1^2 + u_2^2 + 1) + u_2(xt + sin(u_1) + u_3) + tu_1u_2 + 2x(u_1 + \exp(u_2)) \\ u_2(\exp(u_1) + xu_2) + u_3^2 + u_1 + xu_2 \\ 2x(\exp(xu_2) + u_1 + u_3^2) \end{pmatrix},$$

где $\iota = \exp(xt)$, $\chi = \exp(x+t)$, $\zeta = x^2 + t$. Точное решение системы имеет вид $u = (\iota, \chi, \zeta)^\top$. Пучок $A(x,t) + \lambda B(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы об s-гладком подобии из работы [3] и сделанным в первом разделе статьи предположениям во всех точках пространства R^2 и имеет индекс $(1,0)$. Все условия теоремы 1 выполнены, и мы можем для численного решения поставленной начально-краевой задачи применить сплайн-коллокационный метод. В качестве области решения будем рассматривать некоторый прямоугольник $U = [x_0, X] \times [t_0, T]$ в окрестности начала координат. За результат решения примем абсолютную погрешность $\Delta u = \max \|u(x_0 + ih, t_0 + j\tau) - v_{i,j}\| \ \ \forall i, j$. Результаты численного решения и его параметры приведены в таблице.

Таблица

№	h	τ	x_0	X	t_0	T	m_1	m_2	Δu
1	10^{-1}	10^{-1}	0	1	0	1	2	2	2.07×10^{-2}
2	10^{-2}	10^{-2}	0	1	0	1	2	2	1.96×10^{-4}
3	10^{-1}	10^{-1}	0	1	0	1	3	3	1.96×10^{-3}
4	10^{-1}	10^{-1}	0	1	0	1	4	4	1.91×10^{-4}
5	10^{-1}	10^{-1}	0	1	0	1	5	5	1.90×10^{-5}

Из последней колонки таблицы видно, что точность вычислений совпадает с порядком аппроксимации тестовой задачи.

6. Заключение

Из работы следует, что сплайн-коллокационный метод, предложенный в работе [2] для численного решения линейных дифференциально-алгебраических систем индекса (1,0), оказался эффективным и для полулинейных систем вида (1.1). Более того метод дает положительные результаты и при решении квазилинейных дифференциально-алгебраических систем.

Список литературы

1. Березин М. В., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М. : Наука, 1966. 632 с.
2. Гайдомак С. В. Об устойчивости неявной сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 9. С. 44-63.
3. Гайдомак С. В. О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 23-33.
4. Гайдомак С. В. Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 4, С. 608–618.
5. Гайдомак С.В. Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. 2015. Т. 55, № 9, С.1530–1544.
6. Демиденко Г. А., Успенский С. В. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998. 438 с.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Изд. 2-е. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 744 с.
8. Ланкастер П. Теория матриц : пер. с англ. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 272 с.
9. Олейник О. А., Вентцель Т. Д. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа // Мат. сб. 1957. Т. 41(83), № 1. С. 105-128.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1978. 668 с.
11. Рущинский В. М. Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов // Вопр. идентификации и моделирования. 1968. С. 8-15.
12. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Либроком, 2009. 384 с.

Светлана Валерьевна Свинина, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453034
(e-mail: svinina@icc.ru)

Поступила в редакцию 15.07.18

On the Stability of the Spline-Collocation Difference Scheme for a Semilinear Differential-Algebraic Index System (1,0)

S. V. Svinina

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

Abstract. In the paper, a semi-linear differential-algebraic system of partial differential equations of index $(1, 0)$ with a rectangular domain of definition and compatible initial-boundary conditions is considered. It is assumed that the matrix pencil constructed from the coefficients of a differential-algebraic system is smoothly similar to the special canonical form. A uniform grid, in the rectangular domain of definition, for a numerical solving of the system, is constructed. On the grid, a rectangular elementary sub-region is allocated with a fixed number of nodes in each direction. The solution of the system, in each such sub-domain, is sought in the form of the Newton polynomial. The values of polynomial on the joint lines of the elementary sub-regions must coincide. A differential-algebraic system is written in the inner nodes of an elementary sub-region. Derivatives entering the system at each node of the elementary sub-region are approximated by the corresponding derivatives of the Newton polynomial. As a result, a nonlinear spline-collocation difference scheme the order of approximation of which coincides with the order of the spline for each independent variable is written out. Using the transformation of the matrix pencil of the system and the properties of the interpolation spline, the spline-collocation difference scheme is transformed to a matrix-difference equation. It is shown, in the paper, that the matrix-difference equation can be written in normal form. This form of writing of the difference scheme makes it possible to apply the method of simple iterations to it. Using the simple iteration method, an iterative process is written and it is proved that the corresponding transition operator is a compression operator and maps the grid space into itself. Incidentally, it is proved that the difference scheme has a unique solution and is stable in the grid space. To justify the last statement, the results of the author's previous work are used. As a result, in the work, the existence and stability of a unique solution of a spline-collocation difference scheme with an arbitrary order of approximation are justified. The stability of the difference scheme in the present work is understood in the sense of the definition by A.A. Samarskii. The results of a numerical solving of a semi-linear differential-algebraic system of partial differential equations are demonstrated in the test example.

Keywords: differential-algebraic system, index, semilinear system, difference scheme, spline.

References

1. Berezin M.V., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* [Computing Methods]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1966, 632 p. (in Russian)
2. Gaidomak S.V. On the stability of an implicit spline collocation difference scheme for linear partial differential algebraic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 9, pp. 1272–1291. (in Russian) https://doi.org/10.7868/S004446691309007X
3. Gaidomak S.V. The canonical structure of a pencil of degenerate matrix functions. *Russian Math*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 19–28. (in Russian)
4. Gaidomak S.V. Boundary value problem for a first-order linear parabolic system. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 4, pp. 620–630. (in Russian) https://doi.org/10.7868/S0044466914040061
5. Gaidomak S.V. Numerical solution of linear differential-algebraic systems of partial differential equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 9, pp. 1501–1514. (in Russian) https://doi.org/10.7868/S0044466915060058
6. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Uravneniya i sistemy ne razreshennye otnositel'no starshej proizvodnoj* [Equations and systems unsolved for the highest derivative]. Novosibirsk, Nauchnaya Kniga Publ., 1998, 438 p. (in Russian)

7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyy analiz [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 744 p. (in Russian)
8. Lancaster P. *Teoriya matric* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 272 p. (in Russian)
9. Oleinik O.A., Venttsel' T.D. The first boundary problem and the Cauchy problem for quasi-linear equations of parabolic type. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1957, vol. 41(83), no. 1, pp. 105–128. (in Russian)
10. Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike* [Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 668 p. (in Russian)
11. Rushchinskii V.M. *Prostranstvennye linejnye i nelinejnye modeli kotlogeneratorov* [Space linear and nonlinear models of copper generators]. *Voprosy identifikatsii i modelirovaniya* [Problems of Identification and Modeling], 1968, pp. 8-15. (in Russian)
12. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Ustojchivost' raznostnyh skhem* [Stability of difference schemes]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2009, 384 p. (in Russian)

Svetlana Svinina, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Research Scientist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (3952)453034 (e-mail: svinina@icc.ru)

Received 15.07.18