Серия «Математика»
2018. Т. 25. С. 79—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.922, 517.977.1, 517.926.4
MSC 34A09, 93B05, 93B35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.79

Робастная управляемость нестационарных дифференциально-алгебраических уравнений

П. С. Петренко

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается нестационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции. Такие системы называют дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Мерой неразрешенности ДАУ относительно производных служит целочисленная величина, называемая индексом. Анализ проводится в предположении существования структурной формы с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. Эта структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений, а оператор, преобразующий систему ДАУ к данной структурной форме, обладает левым обратным. Построение структурной формы носит конструктивный характер и не использует замену переменных, при этом автоматически решается проблема согласования начальных данных. Данный подход использует понятие r-продолженной системы, где r — индекс неразрешенности системы. Необходимым и достаточным условием существования структурной формы является наличие в матрице, описывающей r-продолженную систему неособенного минора порядка $n(r+1)$, где n — размерность системы ДАУ. Исследуется робастная управляемость нестационарных ДАУ с возмущениями, заданными с помощью матричных норм (неструктурированная неопределенность), присутствующими в матрицах при искомой вектор-функции и вектор-функции управления. Задача робастной управляемости заключается в нахождении условий, при которых возмущенная система останется полностью или R-управляемой на некотором отрезке при наличии этого свойства у исходной системы. Построена структурная форма для возмущенной системы ДАУ, на основе анализа которой получены достаточные условия робастной полной и R-управляемости ДАУ индекса неразрешенности 1 и 2.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, дескрипторные системы, возмущенные системы, робастная управляемость.

1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы, $U(t)$ — заданная $(n \times l)$-матрица, $x(t)$ — искомая n-мерная функция состояния системы, $u(t)$ — l-мерная функция управления. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$. Системы такого рода в литературе называют дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ), сингулярными, дескрипторными системами и др. Мы остановимся на первом термине. Важнейшей характеристикой ДАУ служит целочисленная величина $r : 0 \leq r \leq n$, отражающая сложность внутренней структуры системы и называемая индексом (неразрешенности) [3; 4].

ДАУ моделируют процессы во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике, теплотехнике и др.

В настоящее время исследования робастных свойств ДАУ и, в частности, управляемости, находятся на начальной стадии. Работ по этой тематике мало. Основная трудность, возникающая при исследовании ДАУ, связана с тем, что при возмущении входных данных даже в случае индекса системы, равного 1, может измениться ее (системы) внутренняя структура.

В литературе имеются результаты по робастной управляемости для ДАУ с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком. В статье [8] получены достаточные условия регулярности и робастной управляемости (полной, импульсной и R-управляемости) с неструктурированными возмущениями в матрице при искомой вектор-функции. Результаты работы [5] являются обобщением результатов, полученных в [8], при этом получены достаточные условия регулярности и робастной управляемости (полной, импульсной и R-управляемости) с различного вида возмущениями в матрицах при искомой вектор-функции и управлении. В [9], [10] получены результаты по робастной управляемости на основе μ-анализа (анализа сингулярных чисел). В работе [6] получены необходимые и достаточные условия робастной управляемости (полной, импульсной, сильной и R-управляемости) на основе сингулярного разложения матриц.

Данная работа посвящена исследованию робастной управляемости нестационарных ДАУ с возмущениями, заданными с помощью матричных норм (неструктурированная неопределенность), присутствующими в матрицах при искомой вектор-функции и вектор-функции управления. Используемый автором подход заключается в преобразовании ДАУ к структурной форме с разделенными «дифференциальной» и «алгебраической» подсистемами. Данный подход делает доступным для анализа широкий класс систем, в том числе нестационарных и нелинейных, семейства решений которых не имеют особых точек, а также дает удобный способ нахождения многообразия решений и автоматически решает задачу о согласовании начальных данных (см. [12; 13; 16–18]).

2. Эквивалентная структурная форма

Для системы (1.1) определим матрицы

$$\mathrm{D}_{r,z}(t) = \begin{pmatrix} C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}_{r,y}(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) \\ C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t) \\ \vdots \\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & \begin{matrix} O \\ \\ \mathrm{D}_{r,z}(t) \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{B}(t) & \mathrm{D}_{r,y}(t) \end{pmatrix},$$

имеющие соответственно размеры $nr \times nr$, $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$. Здесь и далее $C_i^j = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ — биномиальные коэффициенты, O — нулевая матрица соответствующих размеров, $\bar{B}(t) = \operatorname{column}\big(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t)\big)$.

Предположим, что для некоторого r $(0 \le r \le n)$ выполняется условие $\operatorname{rank} \mathrm{D}_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}$ $\forall t \in I$, и в матрице $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ имеется неособенный для всех t минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя ρ столбцов матрицы $\mathrm{D}_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $\mathrm{D}_{r,y}(t)$. Такой минор назовем *разрешающим*.

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ входят в разрешающий минор. Вычеркнем $n-d$ столбцов матрицы $\bar{B}(t)$, которые не входят в упомянутый минор, где $d = nr - \rho$. После соответствующей перестановки столбцов из $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ получим матрицу

$$\Lambda_r(t) = \mathrm{D}_{r,x}(t) \ \operatorname{diag}\left(Q^{-1} \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, \ Q^{-1}, \dots, Q^{-1} \right), \tag{2.1}$$

где E_d — единичная матрица порядка d, Q — $(n \times n)$-матрица перестановок.

Матрица Q^{-1} строится следующим образом. Обозначим $i_1, i_2, \dots, i_d$ и $i_{d+1}, i_{d+2}, \dots, i_n$ номера столбцов матрицы $\bar{B}(t)$, которые соответственно входят и не входят в разрешающий минор. Будучи умноженной слева на $\bar{B}(t)$, матрица Q^{-1} переставляет в матрице $\bar{B}(t)$ каждый (i_{d+k})-ый столбец $(k = \overline{1, n-d})$ на k-е место, а каждый (i_j)-й столбец $(j = \overline{1, d})$

на место с номером $n-d+j$. Матрица Q^{-1} обратима и состоит из нулей и n единиц, причем единице равны элементы с индексами (i_{d+k},k) и $(i_j,n-d+j)$.

Лемма 1. *Пусть:*
1) $A(t),B(t),U(t),u(t)\in\mathbf{C}^{2r+1}(I)$*;*
2) $\operatorname{rank}\mathrm{D}_{r,z}(t)=\rho=\mathrm{const}\ \ \forall t\in I$*;*
3) в матрице $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ *имеется разрешающий минор;*
4) $\operatorname{rank}\mathrm{D}_{r+1,y}(t)=\operatorname{rank}\mathrm{D}_{r,y}(t)+n\ \forall t\in I$.

Тогда на I существует оператор

$$\mathcal{R}=R_0(t)+R_1(t)\frac{d}{dt}+\ldots+R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{2.2}$$

который преобразует ДАУ (1.1) к эквивалентной структурной форме

$$x_1'(t)+J_1(t)x_1(t)+\mathcal{H}(t)\overline{u}(t)=0, \tag{2.3}$$

$$x_2(t)+J_2(t)x_1(t)+\mathcal{G}(t)\overline{u}(t)=0, \tag{2.4}$$

где $\operatorname{column}(x_1(t),x_2(t))=Qx(t)$, $\overline{u}(t)=\operatorname{column}(u(t),u'(t),\ldots,u^{(r)}(t))$,

$$\begin{pmatrix}\mathcal{G}(t)\\ \mathcal{H}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_0(t) & G_1(t) & \ldots & G_r(t)\\ H_0(t) & H_1(t) & \ldots & H_r(t)\end{pmatrix}= \\ =(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \ldots\ \ R_r(t))\,\mathcal{P}_r[U(t)],$$

$$\mathcal{P}_r[U(t)]=\begin{pmatrix}C_0^0U(t) & O & \ldots & O\\ C_1^0U'(t) & C_1^1U(t) & \ldots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_r^0U^{(r)}(t) & C_r^1U^{(r-1)}(t) & \ldots & C_r^rU(t)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}J_2(t) & E_d\\ J_1(t) & O\end{pmatrix}=(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \ldots\ \ R_r(t))\,\bar{B}(t)Q^{-1}. \tag{2.5}$$

При этом оператор (2.2) обладает левым обратным на I, его коэффициенты $R_j(t)$ $(j=\overline{0,r})$ являются непрерывными на I и находятся единственным образом по формуле

$$(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \ldots\ \ R_r(t))=(E_n\ \ O\ \ \ldots\ \ O)\ \Lambda_r^\top(t)\ \left(\Lambda_r(t)\Lambda_r^\top(t)\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

а все решения ДАУ (1.1) являются решениями системы (2.3), (2.4) и наоборот.

Определение 1. *Решением системы (1.1) называется n-мерная вектор-функция $x(t)\in\mathbf{C}^1(I)$, обращающая уравнение (1.1) в тождество на I при подстановке.*

Определение 2. *Систему (2.3), (2.4) будем называть эквивалентной формой для ДАУ (1.1).*

Определим начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.7}$$

где $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор.

Лемма 1 позволяет получить критерий существования и единственности решения задачи (1.1), (2.7).

Следствие 1. *Пусть выполнены все предположения леммы 1. Для того чтобы задача* (1.1), (2.7) *имела решение, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$x_{2,0} + J_2(t_0)x_{1,0} + \mathcal{G}(t_0)\overline{u}(t_0) = 0, \tag{2.8}$$

где $\mathrm{column}(x_{1,0}, x_{2,0}) = Qx_0$. *При этом, если решение задачи* (1.1), (2.7) *существует, то оно единственно.*

Определение 3. *Начальные данные* (2.7), *удовлетворяющие условию* (2.8), *будем называть согласованными с системой* (1.1) *в точке* t_0.

Доказательства леммы 1 и следствия 1 приведены в [14].

Лемма 2. [2] *Пусть* $W(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $t \in T$. *Тогда, если* $||W(t)||$[1] < 1 $\forall t \in T$, *то* $\det(E_n \pm W(t)) \neq 0$ $\forall t \in T$.

Определение 4. *Пусть* $W(t) \in \mathbf{R}^{m\times n}$. *Матрица* $W^+(t) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ *называется правой (левой) обратной для матрицы* $W(t)$ *на отрезке* T, *если* $W(t)W^+(t) = E$, $(W^+(t)W(t) = E)$ $\forall t \in T$.

3. Управляемость

Приведем определения управляемости для систем ДАУ.

Определение 5. [7] *Система (1.1) называется полностью управляемой на отрезке* $T = [t_0, t_1]$, *если для любых векторов* $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ *найдется управление* $u(t)$ *такое, что соответствующее решение системы (1.1) удовлетворяет условиям:* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Определение 6. [7] *Система ДАУ (1.1) называется* R*-управляемой (управляемой в пределах множества достижимости), если для любого согласованного вектора начальных данных* x_0 *и любой точки* x_1 *из множества достижимости* M *найдется управление* $u(t)$ *такое, что соответствующее решение системы (1.1) удовлетворяет условиям:* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

[1] Запись $||W||$ означает произвольную матричную норму W, сохраняющую единицу (т.е. $||E|| = 1$), где E — единичная матрица соответствующего размера.

Вектор $x_1 \in \mathbf{R}^n$ называется достижимым в момент t_1 из вектора начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если существует достаточно гладкое управление $u(t)$ такое, что соответствующее решение системы (1.1) удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1$.

Множество $M(x_0) \subseteq \mathbf{R}^n$ называется множеством достижимости из вектора начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если оно состоит из векторов x_1, достижимых из точки x_0 в момент t_1. Множество достижимости M определяется как объединение всех множеств достижимости из всех возможных согласованных векторов начальных данных [7; 11].

4. Робастная управляемость

Пусть система (1.1) обладает свойством полной или R-управляемости на отрезке $T \subset I$. Задача робастной управляемости заключается в нахождении условий, при которых возмущенная система

$$A(t)x'(t) + (B(t) + \Delta_B(t))x(t) + (U(t) + \Delta_U(t))u(t) = 0 \tag{4.1}$$

останется по-прежнему полностью или R-управляемой на этом отрезке. Здесь $\Delta_B(t), \; \Delta_U(t), \; t \in I$ — неизвестные вещественные матрицы (матрицы возмущения) соответствующих размеров, которые удовлетворяют некоторым условиям малости на T.

Здесь и в дальнейшем зависимость от переменной t предполагается, но для упрощения записи будет опущена. Рассмотрим матрицы $R_0\Delta_B Q$, $R_1\Delta_B Q$, $R_1\Delta'_B Q$ и $\begin{pmatrix} R_0\Delta_U + R_1\Delta'_U & R_1\Delta_U \end{pmatrix}$, где R_0 и R_1 — первые коэффициенты оператора (2.2), преобразующего ДАУ (1.1) к виду (2.3), (2.4); Q — матрица перестановок из (2.1). Разобьем эти матрицы на блоки

$$R_0\Delta_B Q = \begin{pmatrix} \Delta_{0,3} & \Delta_{0,4} \\ \Delta_{0,1} & \Delta_{0,2} \end{pmatrix}, \;\; R_1\Delta_B Q = \begin{pmatrix} \Delta_{1,3} & \Delta_{1,4} \\ \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$R_1\Delta'_B Q = \begin{pmatrix} \overline{\Delta}_{1,3} & \overline{\Delta}_{1,4} \\ \overline{\Delta}_{1,1} & \overline{\Delta}_{1,2} \end{pmatrix}, \;\; \begin{pmatrix} R_0\Delta_U + R_1\Delta'_U & R_1\Delta_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{H}_1 \end{pmatrix},$$

где матрицы $\Delta_{0,1}, \; \Delta_{1,1}, \; \overline{\Delta}_{1,1}$ имеют размеры $(n-d)\times(n-d)$; $\Delta_{0,2}, \; \Delta_{1,2}, \; \overline{\Delta}_{1,2}$ — $(n-d)\times d$; $\Delta_{0,3}, \; \Delta_{1,3}, \; \overline{\Delta}_{1,3}$ — $d\times(n-d)$; $\Delta_{0,4}, \; \Delta_{1,4}, \; \overline{\Delta}_{1,4}$ — $d\times d$; $\mathcal{G}_1$ — $d \times rl$; $\mathcal{H}_1$ — $(n-d)\times rl$.

Рассмотрим ДАУ (1.1) индекса 1. Пусть для всех $t \in T$ справедливы оценки

$$||\Delta_{0,4} + \overline{\Delta}_{1,4}|| < 1, \;\; ||\Delta_{1,1} - (\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})(E + \Delta_{0,4} + \overline{\Delta}_{1,4})^{-1}\Delta_{1,3}|| < 1,$$

$$||\Delta_{1,1}|| < 1, \;\; ||\Delta_{0,4} + \overline{\Delta}_{1,4} - \Delta_{1,3}(E + \Delta_{1,1})^{-1}(\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})|| < 1. \tag{4.2}$$

Тогда, согласно лемме 2, матрицы

$$P_0 = (E + \Delta_{0,4} + \overline{\Delta}_{1,4})^{-1}, \;\; P_1 = (E + \Delta_{1,1})^{-1},$$

$$S_0 = \left(P_1^{-1} - (\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})P_0\Delta_{1,3}\right)^{-1},$$

$$S_1 = \left(P_0^{-1} - \Delta_{1,3}P_1(\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})\right)^{-1}$$

обратимы, а оценки (4.2) можно переписать в виде

$$||P_0^{-1} - E|| < 1, \;\; ||P_1^{-1} - E|| < 1, \;\; ||S_0^{-1} - E|| < 1, \;\; ||S_1^{-1} - E|| < 1. \quad (4.3)$$

Пусть $\mathcal{Q}(t) = (Q_0(t) \;\; Q_1(t) \;\; \ldots \; Q_{n-d-1}(t))$ — матрица управляемости системы (2.3), где $Q_0(t) = -\mathcal{H}(t), \;\; Q_i(t) = -J_1(t)Q_{i-1}(t) + Q'_{i-1}(t), \;\; i = \overline{1, n-d-1}$.

Обозначим

$$\tilde{J}_1 = S_0(J_1 + \Delta_{0,1} + \overline{\Delta}_{1,1} - (\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})P_0(J_2 + \Delta_{0,3} + \overline{\Delta}_{1,3})),$$

$$\tilde{J}_2 = S_1(J_2 + \Delta_{0,3} + \overline{\Delta}_{1,3} - \Delta_{1,3}P_1(J_1 + \Delta_{0,1} + \overline{\Delta}_{1,1})),$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = S_0(\mathcal{H} + \mathcal{H}_1 - \Delta_{0,2}P_0(\mathcal{G} + \mathcal{G}_1)), \;\; \tilde{\mathcal{G}} = S_1(\mathcal{G} + \mathcal{G}_1 - \Delta_{1,3}P_1(\mathcal{H} + \mathcal{H}_1)),$$

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}^\top \left(\mathcal{G}\,\mathcal{G}^\top\right)^{-1}, \;\; \mathcal{Q}^+ = \mathrm{colon}(Q_0^\top, Q_1^\top, \ldots, Q_{n-d-1}^\top)\left(\sum_{i=0}^{n-d-1} Q_i Q_i^\top\right)^{-1}, \quad (4.4)$$

при этом $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{Q}^+$ являются правыми обратными для матриц $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно.

Пусть

$$\tilde{\mathcal{Q}} = (\tilde{Q}_0, \; \tilde{Q}_1, \; \ldots \;, \tilde{Q}_{n-d-1}),$$

где $\tilde{Q}_0 = -\tilde{\mathcal{H}}, \;\; \tilde{Q}_i = -\tilde{J}_1\tilde{Q}_i + \tilde{Q}'_i, \;\; i = \overline{1, n-d-1}$.

Тогда

$$\Delta_{\mathcal{Q}} = \tilde{\mathcal{Q}} - \mathcal{Q}, \;\; \Delta_{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}} - \mathcal{G}\,. \quad (4.5)$$

Теорема 1. *Пусть:*
1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^3(T)$*;*
2) $\mathrm{rank}\,\mathrm{D}_{1,z}(t) = \rho = \mathrm{const} \;\; \forall t \in T$*;*
3) в матрице $\mathrm{D}_{1,x}(t)$ *имеется разрешающий минор;*
4) $\mathrm{rank}\,\mathrm{D}_{2,y}(t) = \mathrm{rank}\,\mathrm{D}_{1,y}(t) + n \;\forall t \in T$*;*
5) $\Delta_{1,2}(t) = \Delta_{1,4}(t) \equiv 0$ *на* T*;*
6) выполнены оценки (4.3) $\forall t \in T$*;*
7) $\mathrm{rank}\,\mathcal{G}(t) = d, \;\; \mathrm{rank}\,\mathcal{Q}(t) = n - d \;\; \forall t \in T$.

Система ДАУ (1.1) *робастно полностью управляема на отрезке* $T \subset I$*, если выполняются условия:*
а) $||\Delta_{\mathcal{G}}(t)\,\mathcal{G}^+(t)|| < 1 \;\; \forall t \in T$*;*
б) $||\Delta_{\mathcal{Q}}(t)\,\mathcal{Q}^+(t)|| < 1 \;\; \forall t \in T$.

Доказательство. Рассмотрим возмущенную систему ДАУ (4.1). В силу условий 1–4 теоремы выполнены все предположения леммы 1 при $r = 1$. Таким образом, оператор (2.2) является оператором первого порядка:

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt}. \tag{4.6}$$

Тогда эквивалентная форма для ДАУ (4.1) имеет вид

$$\begin{gathered} x_1' + J_1 x_1 + \Delta_{0,1} x_1 + \Delta_{0,2} x_2 + \Delta_{1,1} x_1' + \Delta_{1,2} x_2' + \\ + \overline{\Delta}_{1,1} x_1 + \overline{\Delta}_{1,2} x_2 + (\mathcal{H} + \mathcal{H}_1)\overline{u} = 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} x_2 + J_2 x_1 + \Delta_{0,3} x_1 + \Delta_{0,4} x_2 + \Delta_{1,3} x_1' + \Delta_{1,4} x_2' + \\ + \overline{\Delta}_{1,3} x_1 + \overline{\Delta}_{1,4} x_2 + (\mathcal{G} + \mathcal{G}_1)\overline{u} = 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

В силу условий 5, 6 теоремы от (4.7), (4.8) перейдем к уравнениям

$$x_1' = -P_1[(J_1 + \Delta_{0,1} + \overline{\Delta}_{1,1})x_1 + (\Delta_{0,2} + \overline{\Delta}_{1,2})x_2 + (\mathcal{H} + \mathcal{H}_1)\overline{u}],$$

$$x_2 = -P_0[\Delta_{1,3} x_1' + (J_2 + \Delta_{0,3} + \overline{\Delta}_{1,3})x_1 + (\mathcal{G} + \mathcal{G}_1)\overline{u}],$$

откуда получим систему

$$x_1' + \tilde{J}_1 x_1 + \tilde{\mathcal{H}}\overline{u} = 0, \tag{4.9}$$

$$x_2 + \tilde{J}_2 x_1 + \tilde{\mathcal{G}}\overline{u} = 0, \tag{4.10}$$

при этом $\overline{u} = \mathrm{column}(u(t), u'(t))$; $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$ и $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{G}}$ определяются из (4.4).

Согласно предположению 7 теоремы матрицы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$ имеют полные ранги на T и, тем самым, обладают на этом отрезке правыми обратными матрицами $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{Q}^+$ соответственно. Тогда $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ представляют собой возмущенные аналоги матриц $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$ и определяется из формулы (4.5).

Умножим матрицу $\mathcal{G}$ на правую обратную к ней $\mathcal{G}^+$:

$$\tilde{\mathcal{G}}\,\mathcal{G}^+ = E + \Delta_{\mathcal{G}}\,\mathcal{G}^\top(\mathcal{G}\,\mathcal{G}^\top)^{-1} = E + \Delta_{\mathcal{G}}\,\mathcal{G}^+\,.$$

С учетом лемм 2, 3 и условия a) теоремы получим

$$\det \tilde{\mathcal{G}}\,\mathcal{G}^+ = \det(E + \Delta_{\mathcal{G}}\,\mathcal{G}^+) \neq 0. \tag{4.11}$$

Аналогично умножим матрицу $\tilde{\mathcal{Q}}$ на правую обратную к ней $\mathcal{Q}^+$:

$$\tilde{\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}^+ = \left(\sum_{i=0}^{n-d-1} Q_i Q_i^\top + \sum_{i=0}^{n-d-1} \Delta_{Q_i} Q_i^\top\right)\left(\sum_{i=0}^{n-d-1} Q_i Q_i^\top\right)^{-1} =$$

$$= E + \sum_{i=0}^{n-d-1} \Delta_{Q_i} Q_i^\top (Q_i Q_i^\top)^{-1} = E + \Delta_{\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}^+,$$

где $\Delta_{Q_i} = \tilde{Q}_i - Q_i$. С учетом лемм 2, 3 и условия б) теоремы получим

$$\det \tilde{\mathcal{Q}}\, \mathcal{Q}^+ = \det(E + \Delta_{\mathcal{Q}}\, \mathcal{Q}^+) \neq 0. \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.11), (4.12) следует полнота строчных рангов матриц $\tilde{\mathcal{G}}(t)$ и $\tilde{\mathcal{Q}}(t)$ для всех $t \in T$. Нетрудно убедиться, что в этом случае система (4.9), (4.10), а следовательно, и система (4.1), полностью управляемы на T. Это и означает робастную полную управляемость ДАУ (1.1) на отрезке $T \subset I$. Теорема доказана.

□

Замечание 1. . Матрицы управляемости $\mathcal{Q}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ для систем (2.3) и (4.9) соответственно можно записать в рекуррентном виде. Тогда

$$\mathcal{Q} = (Q_0,\, Q_1,\, \dots\, , Q_{n-d-1}), \;\; \tilde{\mathcal{Q}} = (\tilde{Q}_0,\, \tilde{Q}_1,\, \dots\, , \tilde{Q}_{n-d-1}),$$

$$Q_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j+1} C_i^j a_j\, \mathcal{H}^{(i-j)}, \tilde{Q}_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j+1} C_i^j \tilde{a}_j \tilde{\mathcal{H}}^{(i-j)},\; i = \overline{0, n-d-1},$$

где $a_0 = \tilde{a}_0 = E$, $a_j = J_1 a_{j-1} - a'_{j-1}$, $\tilde{a}_j = \tilde{J}_1 \tilde{a}_{j-1} - \tilde{a}'_{j-1}$, $j = \overline{1, n-d-1}$; C_i^j — биномиальные коэффициенты.

Следствие 2. *Пусть:*
1) выполнены предположения 1–6 теоремы 1;
2) $\operatorname{rank} \mathcal{Q}(t) = n - d \;\; \forall t \in T$.

Система ДАУ (1.1) *робастно R-управляема на отрезке $T \subset I$, если выполняется условие б) теоремы 1.*

Доказательство. В условиях леммы 1 при $r = 1$ (предположения 1–4 теоремы 1) системы (1.1) и (2.3), (2.4) эквивалентны в смысле решений на T. Из определения 6 следует, что любая система ДАУ вида (1.1), в эквивалентной форме которой отсутствует невырожденная составляющая (2.3), всегда R-управляема. Если же подсистема (2.3) присутствует ($d < n$), то под R-управляемостью ДАУ (1.1) можно понимать полную управляемость системы (2.3). Предположение 2 следствия при этом обеспечивает полную управляемость системы (2.3), а условия 5, 6 теоремы 1 — существование для возмущенного уравнения (4.1) эквивалентной формы (4.9), (4.10). Таким образом, если выполнено условие б) теоремы 1, то матрица $\mathcal{Q}$ имеет полный ранг на T, а следовательно, система (4.11) полностью управляема на этом отрезке. Это и означает робастную R-управляемость ДАУ (1.1). Следствие доказано. □

Можно получить условия робастной управляемости и для систем ДАУ индекса 2.

Пусть

$$\Theta_{r-1}(t) = (E_{nr}\; O)\Lambda_r(t) \begin{pmatrix} O \\ E_{nr+d} \end{pmatrix}$$

— матрица, полученная вычеркиванием из $\Lambda_r(t)$ (матрица из (2.1)) последних n строк и первых n столбцов.

Теорема 2. *Пусть:*
1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^5(T)$*;*
2) $\operatorname{rank} \mathrm{D}_{2,z}(t) = \rho = \mathrm{const} \ \ \forall t \in T$*;*
3) в матрице $\mathrm{D}_{2,x}(t)$ *имеется разрешающий минор;*
4) $\operatorname{rank} \Theta_1(t) = n \ \ \forall t \in T$*;*
5) выполнены предположения 5–7 теоремы 1.

Система ДАУ (1.1) *робастно полностью управляема на отрезке* $T \subset I$*, если выполняются условия а), б) теоремы 1.*

Доказательство. В работе [15] показано, что в предположениях 1–4 теоремы для ДАУ индекса $r = 2$ оператор, преобразующий уравнение (1.1) к эквивалентной форме (2.3), (2.4), имеет первый порядок, т. е. имеет вид (4.6), причем эти системы имеют одно и то же множество решений.

Дальнейшие рассуждения повторяют собой доказательство теоремы 1. □

Следствие 3. *Пусть:*
1) выполнены предположения 1–4 теоремы 2;
2) выполнены предположения 5, 6 теоремы 1;
3) выполнено предположение 2 следствия 2.

Система ДАУ (1.1) *робастно* R*-управляема на отрезке* $T \subset I$*, если выполняется условие б) теоремы 1.*

Доказательство. Рассуждения повторяют собой доказательство теоремы 2 и следствия 2. □

5. Заключение

Для исследования робастной управляемости ДАУ использовалась структурная форма, называемая эквивалентной, в которой разделены «алгебраическая» и «дифференциальная» подсистемы. Преимущества такого подхода обусловлены тем, что данная структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений, автоматически решает задачу о согласовании начальных данных и при ее построении не используется замена переменных. Кроме того, в линейном случае построение эквивалентной формы отличается конструктивностью. Следует подчеркнуть, что для исследования ДАУ ненулевого индекса невозможно прямое перенесение известных результатов для систем в форме Коши с одним входом, поскольку даже в том случае, когда исходная система (1.1) имеет скалярное управление, эквивалентная форма включает в себя не только управление $u(t)$, но и его производные до порядка r включительно, где r $(0 < r \leq n)$ — индекс неразрешенности системы. Эта специфика обусловливает не только необходимость поиска принципиально новых теоретических подходов, но и переосмысления многих базовых понятий классической теории ОДУ, таких как управляемость, устойчивость и т. д. В рамках данной работы получены достаточные условия робастной управляемости (полной и R-управляемости) систем ДАУ с переменными коэффициентами индекса неразрешенности 1 и 2.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 548 с.
2. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 496 с.
3. Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. SIAM, 1996. 269 p.
4. Campbell S. L., Griepentrog E. Solvability of general differential algebraic equations // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1995. N 16. P. 257–270. https://doi.org/10.1137/0916017
5. Chou J. H., Chen S. H., Fung R. F. Sufficient conditions for the controllability of linear descriptor systems with both time-varying structured and unstructured parameter uncertainties // IMA J. Math. Control Inform. 2001. Vol. 18, N 4. P. 469–477. https://doi.org/10.1093/imamci/18.4.469
6. Chou J. H., Chen S. H., Zhang Q.-L. Robust controllability for linear uncertain descriptor systems // Linear Algebra Appl. 2006. Vol. 414, N 2–3. P. 632–651. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.11.005
7. Dai L. Singular control system // Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag, 1989. Vol. 118.
8. Lin C., Wang J. L., Soh C.-B. Necessary and sufficient conditions for the controllability of linear interval descriptor systems // Automatica. 1998. Vol. 34, N 3. P. 363–367. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00204-5
9. Lin C., Wang J. L. Soh C.-B. Robust C-controllability and/or C-observability for uncertain descriptor systems with interval perturbation in all matrices // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44, N 9. P. 1768–1773. https://doi.org/10.1109/9.788550
10. Robust controllability and robust closed-loop stability with static output feedback for a class of uncertain descriptor systems / C. Lin, J. L. Wang, C.-B. Soh, G. H. Yang // Linear Algebra Appl.1999. Vol. 297, N 1–3. P. 133–155. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(99)00150-0
11. Mehrmann V., Stykel T. Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control // Automatisierungstechnik. 2006. Vol. 54, N 8. P. 405–415. https://doi.org/10.1524/auto.2006.54.8.405
12. Petrenko P. S. Differential controllability of linear systems of differential-algebraic equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. Vol. 10, N 3. P. 320–329. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-3-320-329
13. Petrenko P. S. Local R-observability of differential-algebraic equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016. Vol. 9, N 3. P. 353–363. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-3-353-363.

14. Shcheglova A. A. Controllability of nonlinear algebraic differential systems // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, N 10. P. 1700–1722. https://doi.org/10.1134/s0005117908100068
15. Shcheglova A. A. The solvability of the initial problem for a degenerate linear hybrid system with variable coefficients // Russian Mathematics. 2010. Vol. 54, N 9. P. 49–61. https://doi.org/10.3103/S1066369X10090057
16. Shcheglova A. A., Petrenko P. S. Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 196, N 4. P. 596–615. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1679-4
17. Shcheglova A. A., Petrenko P. S. Stabilization of solutions for nonlinear differential-algebraic equations // Automation and remote control. 2015. Vol. 76, N 4. P. 573–588. https://doi.org/10.1134/s0005117915040037
18. Shcheglova A. A., Petrenko P. S. The R-observability and R-controllability of linear differential-algebraic systems // Russian Mathematics. 2012. Vol. 56, N 3. P. 66–82. https://doi.org/10.3103/s1066369x12030097

Павел Сергеевич Петренко, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453107
(e-mail: `petrenko_p@mail.ru`)

Поступила в редакцию 10.08.18

Robust Controllability of Non-Stationary Differential-Algebraic Equations

P. S. Petrenko

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

Abstract. We consider linear time-varying system of first order ordinary differential equations with identically degenerate matrix of the derivative of the unknown function. Such systems are called differential-algebraic equations (DAE). The unsolvability measure with respect to the derivatives for some DAE is an integer that is called the index of the DAE. The analysis is carried out under the assumption of the existence of a structural form with separated differential and algebraic subsystems. This structural form is equivalent to the initial system in the sense of solution, and the operator which transformes the DAE into the structural form possesses the left inverse operator. The finding of the structural form is constructive and do not use a change of variables. In addition the problem of consistency of the initial data is solved automatically. The approach uses the concept of r-derivative array equations, where r is the unsolvability index of the DAE. The existence of a nonsingular minor of order $n(r+1)$ in the matrix describing derivative array equations is a necessary and sufficient condition for the existence of this structural form (n is the dimension of DAE system). We investigate robust controllability of non-stationary DAE with perturbations given by matrix norms (unstructured uncertainty), which are present in matrices with the unknown function and control function. The problem of the robust controllability is to find the conditions under which the perturbed system will remain completely or R-controllable on some interval in the presence of this property of the initial DAE system. It is constructed a structural form for the perturbed DAE system and based on it's analysis sufficient conditions for robust complete and R-controllability of the DAE of the indeces 1 and 2 are obtained.

Keywords: differential-algebraic equations, descriptor systems, perturbed systems, robust controllability.

References

1. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 548 p. (in Russian).
2. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980 (in Russian).
3. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*. SIAM, 1996, 251 p.
4. Campbell S.L., Griepentrog E. Solvability of general differential algebraic equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1995, no. 16, pp. 257-270. https://doi.org/10.1137/0916017
5. Chou J.H., Chen S.H., Fung R.F. Sufficient conditions for the controllability of linear descriptor systems with both time-varying structured and unstructured parameter uncertainties. *IMA J. Math. Control Inform.*, 2001, vol. 18, no. 4, pp. 469-477. https://doi.org/10.1093/imamci/18.4.469
6. Chou J.H., Chen S.H., Zhang Q.-L. Robust controllability for linear uncertain descriptor systems. *Linear Algebra Appl.*, 2006, vol. 414, no. 2-3, pp. 632-651. https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.11.005
7. Dai L. Singular control system. *Lecture notes in control and information sciences.* Springer-Verlag, 1989, vol. 118.
8. Lin C., Wang J.L., Soh C.-B. Necessary and sufficient conditions for the controllability of linear interval descriptor systems. *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 363-367. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00204-5
9. Lin C., Wang J.L., Soh C.-B. Robust C-controllability and/or C-observability for uncertain descriptor systems with interval perturbation in all matrices. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1768-1773. https://doi.org/10.1109/9.788550
10. Lin C., Wang J.L., Soh C.-B., Yang G.H. Robust controllability and robust closed-loop stability with static output feedback for a class of uncertain descriptor systems. *Linear Algebra Appl.*, 1999, vol. 297, no. 1-3, pp. 133-155. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(99)00150-0
11. Mehrmann V., Stykel T. Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control. *Automatisierungstechnik*, 2006, vol. 8, pp. 405-415. https://doi.org/10.1524/auto.2006.54.8.405
12. Petrenko P.S. Differential controllability of linear systems of differential-algebraic equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 320-329. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-3-320-329
13. Petrenko P.S. Local R-observability of differential-algebraic equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 353-363. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-3-353-363.
14. Shcheglova A.A. Controllability of nonlinear algebraic differential systems. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 10, pp. 1700-1722. https://doi.org/10.1134/s0005117908100068

15. Shcheglova A.A. The solvability of the initial problem for a degenerate linear hybrid system with variable coefficients. *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 9, pp. 49-61. https://doi.org/10.3103/S1066369X10090057
16. Shcheglova A.A., Petrenko P.S. Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 196, no. 4, pp. 596-615. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1679-4
17. Shcheglova A.A., Petrenko P.S. Stabilization of solutions for nonlinear differential-algebraic equations. *Automation and remote control*, 2015, vol. 76, no. 4, pp. 573-588. https://doi.org/10.1134/s0005117915040037
18. Shcheglova A.A., Petrenko P.S. The R-observability and R-controllability of linear differential-algebraic systems. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 66-82. https://doi.org/10.3103/s1066369x12030097

Pavel Petrenko, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Research Scientist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation (e-mail: petrenko_p@mail.ru)

Received 10.08.18