Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 105—116

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 510.67

Расширенная гипотеза близнецов и теория натуральных чисел с выделенными простыми числами

В. И. Мартьянов
Иркутский государственный технический университет

Аннотация. Доказана разрешимость расширенной теории натуральных чисел в предположении выполнимости варианта гипотезы близнецов.

Ключевые слова: Терия моделей, разрешимость элементарных теорий

Рассматривается элементарная теория натуральных чисел в сигнатуре $\langle <, P \rangle$, где $<$ — отношение порядка, P — предикат, выделяющий простые числа. Язык данной теории достаточно богат и, в частности, позволяет записать знаменитую гипотезу близнецов. Выполнимость гипотезы близнецов адекватна истинности на модели $\langle Z; <, P \rangle$ формулы

$$\forall x \exists y \exists z \exists u (x < y \,\&\, P(y) \,\&\, H(y, z) \,\&\, H(z, u) \,\&\, P(u)),$$

где $H(a, b)$ — отношение непосредственного следования, формульное в данной сигнатуре. Действительно,

$$H(a, b) \rightleftharpoons \forall x (a < b \,\&\, \neg(a < x \,\&\, x < b)).$$

В настоящей работе доказывается разрешимость элементарной теории натуральных чисел с порядком и предикатом, выделяющим простые числа в предположении выполнимости расширенной гипотезы близнецов (РГБ), формулируемой следующим образом.

Пусть дана некоторая совокупность многочленов

$$f_1(x) = x + a_1; \ldots; f_n(x) = x + a_n, \tag{1.1}$$

где a_j, $j = 1, \ldots, n$, образуют возрастающую последовательность неотрицательных чисел. Предположим, что для некоторого a значения многочленов $f_1(a); \ldots; f_n(a)$ обратимые в кольце вычетов целых чисел по модулю $(2n)!$ (в дальнейшем такие совокупности многочленов (1.1) будем называть удовлетворяющими условиям РГБ). Тогда существует сколь угодно большое число β такое, что значения многочленов $f_1(\beta); \ldots; f_n(\beta)$ — простые числа, а остальные целые числа, в интервале $(f_1(\beta), f_n(\beta))$ — составные.

Все необходимые для понимания работы сведения можно найти в [2, 3], обзор результатов, близких к данной тематике, приведен в [4]. Более сильный вариант РГБ использовался при рассмотрении [1] универсальной теории целых чисел со сложением, отношением делимости и предикатом, выделяющим простые числа.

Доказательство разрешимости теории $\langle N; <, P\rangle$ (в предположении выполнимости РГБ) будем вести следующим образом. Вначале определим рекурсивную систему аксиом Г, выполнимую на модели $\langle N; <, P\rangle$. Далее, построим расширение τ сигнатуры $\langle <, P\rangle$ такое, что теория Г модельно полна в расширенной сигнатуре τ. На заключительном этапе будет показано, что все модели теории Г универсально эквивалентны в сигнатуре τ. Тогда в силу известного признака полноты (модельно полная и универсально полная теория полна [2]) теория Г полна. Таким образом, Г — система аксиом модели $\langle N; <, P\rangle$, что доказывает разрешимость элементарной теории целых чисел с порядком и предикатом, выделяющим простые числа, в предположении выполнимости РГБ.

1°. *Система аксиом* Г состоит из пяти частей. Первая часть — аксиомы дискретного линейного порядка с минимальным элементом.

Вторая часть утверждает существование для каждой конечной совокупности элементов из $\langle N; <, P\rangle$ совокупности элементов в Г-модели с изоморфной диаграммой (т.е. $\langle N; <, P\rangle$ конечно изоморфно вложима в любую Г-модель).

Третья часть соответствует явному перечислению всех совокупностей многочленов, для которых утверждается РГБ. В частности, в эту группу аксиом будет включена формула, эквивалентная гипотезе близнецов.

Четвертая часть утверждает, что если элементы $a + b_1, \ldots, a + b_k$ простые, (по определению $b = a + 1$, если $H(a, b)$), то многочлены $x + b_1; \ldots; x + b_k$ удовлетворяют условиям РГБ.

Пятая часть утверждает, что любой отрезок, имеющий более $(2n)!$ элементов, содержит отрезок из n непростых (составных) элементов.

В дальнейшем при рассмотрении произвольных Г-моделей будет использоваться следующая терминология.

Отрезком будем называть последовательность элементов Г-модели, где рядом стоящие элементы связаны отношением непосредственного следования.

Элементы a и b из Г-модели назовем бесконечно отстоящими, если они не могут быть элементами никакого конечного отрезка.

Сформулируем ряд утверждений о свойствах Г-моделей, которые будут весьма полезны при дальнейших рассмотрениях.

Лемма 1. *Пусть*

$$a + b_1, \ldots, a + b_k;\ \ c + d_1, \ldots, c + d_m\ \ -$$

простые числа, образующие возрастающую последовательность, и $a + b_1 > 2(k + m)$. *Тогда существует число* t *такое, что многочлены*

$$x + b_1;\ \ldots;\ x + b_k;\ x + (t + d_1);\ \ldots;\ x + (t + d_m)$$

удовлетворяют условиям РГБ, и, следовательно, в предположении выполнимости РГБ, существует число w *такое, что*

$$w + b_1, \ldots, w + b_k, w + (t + d_1);\ \ldots;\ w + (t + d_m)$$

простые числа.

Доказательство. Так как числа

$$a + b_1,\ \ldots,\ a + b_k;\ \ c + d_1,\ \ldots,\ c + d_m$$

обратимые по модулю числа $(2(2k + m))!$, то в качестве t можно взять число $c - a$, а числом α (из определения РГБ) будет a. Тогда существование требуемого w — непосредственное следствие РГБ. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть последовательность* $a_1, \ldots, a_n$ *является отрезком некоторой* Г*-модели. Тогда данная последовательность изоморфно вложима в сигнатуре* $\langle <, P, H\rangle$ *в множество целых чисел.*

Доказательство непосредственно следует из четвертой части системы аксиом Г и предположения выполнимости РГБ.

Лемма 3. *Пусть последовательности* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_m$ *расположены в порядке возрастания и являются отрезками некоторой* Г*-модели и* b_1 *бесконечно отстоит от элемента* a_n. *Тогда для любого наперед заданного натурального* k *данные последовательности изоморфно вложимы в сигнатуре* $\langle <, P, H\rangle$ *в возрастающие последовательности целых чисел* $c_1, \ldots, c_n$ *и* $d_1, \ldots, d_m$, *причем* $k < d_1 - c_n$, *и все числа, лежащие в интервале от* c_n *до* d_1, *составные.*

Доказательство. В силу леммы 2 последовательности $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ изоморфно вложимы в сигнатуре $\langle <, P, H\rangle$ в последовательности целых чисел $t_1, \ldots, t_n$ и $u_1, \ldots, n_m$. Если воспользоваться РГБ, то последовательность $u_1, \ldots, u_m$ можно разместить дальше последовательности $t_1, \ldots, t_n$. Далее, пусть $p_1, \ldots, p_s$ и $q_1, \ldots, q_v$ все простые числа из последовательностей $t_1, \ldots, t_n$ и $u_1, \ldots, u_m$, соответсвенно. Тогда совокупность многочленов

$$x + p_1, \ldots, x + p_s, x + k(2(s+v))! + q_1, \ldots, x + k(2(s+v))! + q_v$$

удовлетворяет условиям РГБ и применение РГБ для данной совокупности многочленов доказывает лемму. $\square$

2°. *Построение расширенной сигнатуры* τ. Начальное расширение сигнатуры σ получается включением отношения непосредственного следования $H(x, y)$, определенного выше. Предикаты формульного расширения будут строиться рекурсивным образом по следующей схеме.

Определим индукцией по числу n совокупности кортежей F_n.

<u>Основание индукции</u>.

$$F_0 = \{\langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle : \alpha_i = P \text{ или } \alpha_i = \neg P;\ \beta_i = H \text{ или } \beta_i = \neg H\}.$$

<u>Индукционный шаг</u>.

$$F_m = \{\langle \alpha_0, \overline{\beta_1}, \ldots, \overline{\beta_n}, \alpha_n \rangle : \alpha_i = P \text{ или } \alpha_i = \neg;\ \overline{\beta_i} = H, \text{ или}$$
$$\overline{\beta_i} = \neg H, \text{ или } \overline{\beta_i} = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle, \text{ где } \gamma_i = H, \text{ или } \gamma_i = \neg H,$$
$$\text{или } \gamma_i \in F_0 \cup \ldots \cup F_{m-1}\}.$$

Положим $\overline{F} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i$. Каждому кортежу θ из $\overline{F}$ сопоставим формульные предикаты $v_\theta(a, b)$ и $w_\theta(a)$. Определение формульных предикатов будет дано индукцией по рангу соответствующих кортежей (ранг жортежа из F_i равен i).

<u>Основание индукции</u>. Пусть кортеж $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle$ из множества F_0. Тогда

$$\begin{gathered} v_\theta(a, b) = \exists x_1 \ldots x_{n-1}(a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b \mathbin{\&} \\ \alpha_0(a) \mathbin{\&} \alpha_1(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \alpha_{n-1}(x_{n-1}) \mathbin{\&} \alpha_n(b) \mathbin{\&} \\ \beta_1(a, x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \beta_n(x_{n-1}, b)), \qquad (1.2) \\ w_\theta(a) = \exists x_1 \ldots x_n(a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \mathbin{\&} \alpha_0(a) \mathbin{\&} \\ \alpha_1(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \alpha_n(x_n) \mathbin{\&} \beta_1(a, x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \beta_n(x_{n-1}, x_n)). \end{gathered}$$

<u>Индукционный шаг</u>. Пусть кортеж $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle$ из множества F_m, где $m > 0$. Тогда

$$v_\theta(a, b) = \exists x_1 \ldots x_{n-1}(a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b \mathbin{\&} \alpha_0 \mathbin{\&}$$
$$\alpha_1(x_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \alpha_{n-1}(x_{n-1}) \mathbin{\&} \alpha_n(b) \mathbin{\&} \overline{\beta_1}(a, x_1) \mathbin{\&}$$

$$\& \ldots \& \overline{\beta_n}(x_{n-1}, b)), \tag{1.3}$$

$$w_\theta(a) = \exists x_1 \ldots x_n(a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \,\&\, \alpha_0(a) \,\&$$

$$\alpha_1(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_n(x_n) \,\&\, \overline{\beta_1}(a, x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\beta_n}(x_{n-1}, x_n)),$$

где $\overline{\beta_i} = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle$,

$$\overline{\beta_i}(x_i, x_{i+1}) = \widetilde{\gamma}_1(x_i, x_{i+1}) \,\&\, \ldots \,\&\, \widetilde{\gamma}_k(x_i, x_{i+1}),$$

причем $\widetilde{\gamma}_j(x_i, x_{i+1}) = \gamma_j(x_i, x_{i+1})$, если $\gamma_j = H$ или $\gamma_j = \neg H$ и $\widetilde{\gamma}_j(x_i, x_{i+1}) = \neg\gamma_j(x_i, x_{i+1})$, если $\gamma_j \in F_0 \cup \ldots \cup F_{m-1}$.

Отметим, что формульные предикаты $v_\theta(a, b)$ и $w_\theta(a)$ имеют одинаковый содержательный смысл и эту связь наиболее точно выражает следующее тождество:

$$w_\theta(a) = \exists x_n(v_\theta(a, x_n)). \tag{1.4}$$

Всю совокупность формульных предикатов будем обозначать

$$\Omega = \Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_n \cup \ldots,$$

где Ω_n — совокупность формульных предикатов ранга n, соответствующих кортежам из множества F_n.

Сигнатура τ получается включением всех вышеуказанных формульных предикатов. При доказательстве модельной полноты теории Γ в сигнатуре τ будет использоваться следующая

Лемма 4. *Пусть модель $\mathcal{M} = \langle M; \tau \rangle$ такая, что $\langle M; < \rangle$ — дискретное линейно упорядоченное множество и элементы a, b, c, a_1, b_1, $c_1 \in M$, причем $a < b < c$; $a_1 < b_1 < c_1$. Предположим, что для любых формульных предикатов $v_1(x, y)$, $v_2(x, y) \in \Omega$, выполняется*

$$\mathcal{M} \models v_1(a, b), v_2(b, c) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models v_1(a_1, b_1), v_2(b_1, c).$$

Тогда для любого формульного предиката $v(x, y) \in \Omega$

$$\mathcal{M} \models v(a, c) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models v(a_1, c_1).$$

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по рангу предиката $v(x, y)$.

<u>Основание индукции</u>. Пусть формульный предикат $v(x, y)$ определяется кортежем $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle \in \Omega_0$ и $\mathcal{M} \models v_\theta(a, c)$. Необходимо доказать, что $\mathcal{M} \models v_\theta(a_1, c_1)$. Действительно, по определению формульных предикатов существуют элементы $d_1 < d_2 < \cdots < d_{n-1} \in M$, лежащие в интервале (a, c) и удовлетворяющие формуле (1.2). Возможны следующие два случая.

1. $b = d_i$. Тогда $\mathcal{M} \models v_\delta(a, b), v_\rho(b, c)$, где

$$\delta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \alpha_i \rangle; \quad \rho = \langle \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle.$$

По условию леммы $\mathcal{M} \models v_\delta(a_1, b_1), v_\rho(b_1, c_1)$ и, следовательно, из вида кортежей δ и ρ имеем

$$\mathcal{M} \models v_\theta(a_1, c_1).$$

2. $d_i < b < d_{i+1}$. В этом случае $\beta_{i+1} = \neg H$. Положим $\alpha^\circ = P$, если b простое, и $\alpha^\circ = \neg P$ — в противном случае, $\beta^\circ = H$, если $H(x_i, b)$ и $\beta^\circ = \neg H$, если $\neg H(d_i, b)$. Аналогично, $\beta^{\circ\circ} = H$, если $H(b, d_{i+1})$ и $\beta^{\circ\circ} = \neg H$, если $\neg H(b, d_{i+1})$.

Положим кортежи

$$\delta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \alpha_i, \beta^\circ, \alpha^\circ \rangle; \quad \rho = \langle \alpha^\circ, \beta^{\circ\circ}, \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle.$$

Тогда $\mathcal{M} \models v_\delta(a, b), v_\rho(b, c)$. По условию леммы $\mathcal{M} \models v_\delta(a_1, b_1), v_\rho(b_1, c_1)$ и, следовательно, из вида кортежей δ и ρ получаем

$$\mathcal{M} \models v_\theta(a_1, c_1).$$

Индукционный шаг. Предположим по индукции, что для всех формульных предикатов $v(x, y)$ ранга меньшего m $(m > 0)$ выполняется

$$\mathcal{M} \models v(a, c) \ \Leftrightarrow \ \mathcal{M} \models v(a_1, c_1).$$

и кортеж $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle$ имеет ранг m.

По определению формульных предикатов существуют элементы $d_1 < d_2 < \ldots < d_{n-1} \in M$, лежащие в интервале (a, c) такие, что на данных элементах истинна формула (1.3).

Также, как при доказательстве основания индукции, возможны следующие два случая.

1. $b = d_i$. Тогда $\mathcal{M} \models v_\delta(a, b), v_\rho(b, c)$, где

$$\delta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \alpha_i \rangle; \quad \rho = \langle \alpha_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n, \alpha_n \rangle.$$

По условию леммы $\mathcal{M} \models v_\delta(a_1, b_1), v_\rho(b_1, c_1)$ и, следовательно, из вида кортежей δ и ρ имеем

$$\mathcal{M} \models v_\theta(a_1, c_1).$$

2. $d_i < b < d_{i+1}$. В этом случае нам будет удобно пользоваться индукционным предположением в следующей форме. Для любого формульного предиката $v_\lambda(x, y)$, ранга меньшего m, существуют формульные предикаты

$$v_{\eta_1}(x, y), \ldots, v_{\eta_k}(x, y); \quad v_{\nu_1}(x, y), \ldots, v_{\nu_l}(x, y) \tag{1.5}$$

такие, что из

$$\mathcal{M} \models v_{\eta_1}(a, b), \ldots, v_{\eta_k}(a, b); \quad \mathcal{M} \models v_{\nu_1}(b, c), \ldots, v_{\nu_l}(b, c).$$

следует $\mathcal{M} \models v_\lambda(a,c)$. Кроме того, нам будет необходимо данное индукционное предположение для отрицаний предиката $\neg v_\lambda(x,y)$. В этом случае утверждается существование формульных предикатов

$$v_{\eta_1}(x,y),\dots,v_{\eta_k}(x,y); \quad v_{\nu_1}(x,y),\dots,v_{\nu_l}(x,y)$$

таких, что из

$$\mathcal{M} \models \neg v_{\eta_1}(a,b),\dots,\neg v_{\eta_k}(a,b); \quad \mathcal{M} \models \neg v_{\nu_1}(b,c),\dots,\neg v_{\nu_l}(b,c).$$

следует $\mathcal{M} \models \neg v_\lambda(a,c)$.

Данная форма индукционного предположения для предикатов без отрицаний имеет доказанное основание индукции в выше приведенном доказательстве основания индукции для случая 1. (Действительно, в качестве формульных предикатов (1.5) можно взять $v_\delta(x,y)$, $v_\rho(x,y)$). Проверим выполнимость основания индукции для отрицания предиката. Пусть $\mathcal{M} \models \neg v_\lambda(a,c)$, где $\lambda = \langle \tau_0, \chi_1, \dots, \tau_h, \chi_h \rangle$, $\lambda \in F_0$ и i (соответственно j) минимальное (максимальное) число такое, что формульный предикат $v_\eta(x,y)$ (соответственно $v_\rho(x,y)$), где $\eta = \langle \tau_0, \chi_1, \dots, \tau_i, \chi_i, \widetilde{\chi}, \widetilde{\tau} \rangle$, (соответственно, $\langle \widetilde{\tau}, \widetilde{\widetilde{\chi}}, \tau_j, \chi_{j+1}, \dots, \chi_h, \tau_h \rangle$), ложен на модели $\mathcal{M}$ при $x = a$, $y = b$ (соответственно, $x = b$, $y = c$). В этом случае для любых элементов a_1, b_1, $c_1 \in \mathcal{M}$, $a_1 < b_1 < c_1$ будет выполнено, если

$$\mathcal{M} \models \neg v_\eta(a_1,b_1), v_\rho(b_1,c_1),$$

то $\mathcal{M} \models \neg v_\lambda(a_1,c_1)$, что доказывает выполнимость основания индукции.

Положим кортежи

$$\delta = \langle \alpha_0, \overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_i, \alpha_i, \overline{\beta}^\circ, \alpha^\circ \rangle; \quad \rho = \langle \alpha^\circ, \overline{\beta}^{\circ\circ}, \alpha_{i+1}, \overline{\beta}_{i+2}, \dots, \overline{\beta}_n, \alpha_n \rangle;$$

$$\overline{\beta}_{i+1} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_u \rangle,$$

где $\alpha^\circ = P$, если b простое, и $\alpha^\circ = P$ — в противном случае, кортежи

$$\overline{\beta}^\circ = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle, \quad \overline{\beta}^{\circ\circ} = \langle \psi_1, \dots, \psi_s \rangle,$$

такие, что

$$\mathcal{M} \models \neg v_{\sigma_1}(a,b),\dots,\neg v_{\sigma_k}(a,b); \quad \mathcal{M} \models \neg v_{\psi_1}(b,c),\dots,\neg v_{\psi_s}(b,c)$$

и для любых элементов $g < h < w$ из выполнимости

$$\mathcal{M} \models \neg v_{\sigma_1}(g,h),\dots,\neg v_{\sigma_k}(g,h); \quad \mathcal{M} \models \neg v_{\psi_1}(h,w),\dots,\neg v_{\psi_s}(h,w)$$

следует $\mathcal{M} \models \neg v_{\sigma_1}(g,w),\dots,\neg v_{\psi_s}(h,w)$. Существование кортежей $\overline{\beta}^\circ$, $\overline{\beta}^{\circ\circ}$ следует из второй формы индукционного предположения.

Пусть $\mathcal{M} \models v_\sigma(a,b), v_\rho(b,c)$. Тогда по условию леммы $\mathcal{M} \models v_\delta(a_1,b_1), v_\rho(b_1,c_1)$ и, следовательно, из вида кортежей δ и ρ получаем $\mathcal{M} \models v_\theta(a_1,c_1)$, что доказывает рассматриваемый вариант индукционного предположения и вместе с ним данную лемму. $\square$

При доказательстве модельной полноты нам также будет необходим следующий аналог леммы 4.

Лемма 5. *Пусть модель* $\mathcal{M} = \langle M; \tau \rangle$ *такая, что* $\langle M; < \rangle$ *— дискретное линейно упорядоченное множество и элементы* a, b, a_1, $b_1 \in M$, *причем* $a < b$; $a_1 < b_1$. *Предположим, что для любых формульных предикатов* $v(x,y)$, $w(x) \in \Omega$ *выполняется*

$$\mathcal{M} \models v(a,b), w(b) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v(a_1,b_1), w(b).$$

Тогда для любого формульного предиката $\overline{w}(x) \in \Omega$ *выполняется* $\mathcal{M} \models \overline{w}(a) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models \overline{w}(a_1)$.

Доказательство. Пусть формульный предикат $\overline{w}(x)$ соответствует кортежу θ и формульный предикат $v_\theta(x,y)$ связан с $\overline{w}(x)$ тождеством (1.4). Если применить к лемме 4 принцип локальности (или внимательно просмотреть ее доказательство), то можно заметить, что для любого формульного предиката $v_\theta(x,y)$ существуют предикаты

$$v_{\eta_1}(x,y), \ldots, v_{\eta_k}(x,y); \quad v_{\nu_1}(x,y), \ldots, v_{\nu_l}(x,y)$$

такие, что для любых элементов a, b, c, a_1, b_1, $c_1 \in M$ ($a < b < c$; $a_1 < b_1 < c_1$) из выполнимости эквивалентностей

$$\mathcal{M} \models v_{\eta_i}(a,b) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v_{\eta_i}(a_1,b_1), \quad \mathcal{M} \models v_{\nu_j}(b,c) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v_{\nu_j}(b_1,c_1),$$

где $1 \le i \le k$; $1 \le j \le l$ следует выполнимость эквивалентности

$$\mathcal{M} \models v_\theta(a,c) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v_\theta(a_1,c_1). \tag{1.6}$$

Рассмотрим совокупность формульных предикатов $w_{\nu_1}(x), \ldots, w_{\nu_l}(x)$, связанных с предикатами $v_{\nu_1}(x,y), \ldots, v_{\nu_l}(x,y)$ тождеством (1.4). По условию леммы данные предикаты удовлетворяет эквивалентностям

$$\mathcal{M} \models w_{\nu_i}(b) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models w_{\nu_i}(b).$$

Следовательно, существуют элементы $d_1, \ldots, d_l$; $d_1^1, \ldots, d_l^1$ такие, что для всех i выполнены эквивалентности

$$\mathcal{M} \models v_{\nu_i}(b,d_i) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v_{\nu_i}(b,d_j^1) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models w_{\nu_i}(b).$$

Положим $c = \max\{d_1, \ldots, d_l\}$; $c_1 = \max\{d_1^1, \ldots, d_l^1\}$. Тогда выполнены эквивалентности

$$\mathcal{M} \models v_{\nu_i}(b,c) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models v_{\nu_i}(b_1,c_1),$$

и, учитывая тождество (1.6), имеем $\mathcal{M} \models \overline{w}(a) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models \overline{w}(a_1)$, что доказывает лемму. □

При доказательстве модельной полноты теории будем использовать следующий вариант критерия Робинсона [2].

Лемма A. *Теория* Γ *сигнатуры* τ *модельно полна тогда и только тогда, когда для любого конечного объединения* σ *сигнатуры* τ *и любой конечной подмодели* $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *произвольной* Γ*-модели* $\mathcal{M}'$*, являющейся расширением* Γ*-модели* $\mathcal{M}$*,* $X \cap \mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_k\}$*, то существуют элементы* $a'_{k+1}, \ldots, a'_n \in \mathcal{M}$ *такие, что диаграмма подмодели* X *совпадает с диаграммой подмодели*

$$\{a_1, \ldots, a_k, a'_{k+1}, \ldots, a'_n\}$$

в сигнатуре σ *при соответствии, задаваемом одинаковыми индексами элементов.*

Лемма 6. *Теория* Γ*-сигнатуры* τ*-модельно полна.*

Доказательство. Будем использовать приведенный выше критерий Робинсона. Пусть σ — некоторое конечное обеднение сигнатуры τ и $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — некоторая конечная подмодель произвольной Γ-модели $\mathcal{M}'$, являющейся расширением Γ-модели $\mathcal{M}$, $X \cap M = \{a_1, \ldots, a_k\}$. При построении подмодели $\{a_1, \ldots, a_k, a'_{k+1}, \ldots, a'_n\}$, удовлетворяющей условиям критерия Робинсона (лемма A), будем использовать леммы 4 и 5, позволяющие доказывать не совпадение диаграмм конечных подмоделей, а только их отдельных частей. А именно, оставить только часть диаграммы, где формульные предикаты связывают рядом стоящие (в смысле порядка) элементы конечной подмодели (не разделенные в смысле порядка другими элементами данной конечной подмодели). Данная возможность вытекает из содержательного смысла лемм 4 и 5, которые утвеждают по сути дела следующее: если между элементами a и c есть элемент b, то истинность формульных предикатов на элементах a и c однозначно определяется истинностью формульных предикатов на a и b, b и c. Кроме того, используя методологию расширения конечной подмодели, можно оставить только негативную часть диаграммы (добавляя элементы, на которых истинны формульные предикаты).

Предположим, что элементы $a_1, \ldots, a_k$ имеют нумерацию, соответствующую порядку на модели $\mathcal{M}$, а элементы $a_s, \ldots, a_{s+m}$ из расширения $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ также имеют нумерацию, согласованную с порядком на модели $\mathcal{N}$. Проведем доказательство только для случая расширения одним элементом a_s, так как по этой же схеме можно действовать и в общем случае, опираясь на результаты лемм 4 и 5.

Пусть элемент a_s лежит между a_1 и a_2, атомные формулы

$$v_\beta(a_1, a_s), v_\gamma(a_1, a_s), v_\rho(a_s, a_2), v_\eta(a_s, a_2) \tag{1.7}$$

ложны на модели $\mathcal{N}$ и входят в рассматриваемую диаграмму. Положим кортеж $\theta = \langle \alpha_1, \{\beta, \gamma\}, \alpha_s, \{\rho, \eta\}, \alpha_2 \rangle$, где $\alpha_i = P$, если a_i — простой элемент, и $\alpha_i = \neg P$ — в противном случае. Так как а.ф. (1.7) ложны на модели $\mathcal{N}$, то а.ф. $v_\theta(a_1, a_2)$ истинна на модели $\mathcal{N}$. Тогда по определению расширения моделей а.ф. $v_\theta(a_1, a_2)$ истинна и на модели $\mathcal{M}$, а это означает существование элемента $a'_s \in \mathcal{M}$ такого, что а.ф. (1.7) ложны на модели $\mathcal{M}$. Таким образом, элемент a_s "перекинут" в меньшую модель. Аналогично можно действовать, когда элементы $a_s, \ldots, a_{s+t}$ также лежат в интервале (a_1, a_2). Если элементы $a_s, \ldots, a_{s+t}$ меньше (больше) элемента a_1 (соответветственно, a_k), то необходимо работать по данной схеме с формульными предикатами вида $w(x)$. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Теория* Γ*-сигнатуры* τ*-универсально полна.*

Доказательство. Доказательство будем вести перекидыванием конечной подмодели $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из произвольной Γ-модели $\mathcal{M}$ в модель $\langle Z; <, P\rangle$. Обратная задача очевидно выполнима по второй группе аксиом теории Γ. Диаграмма подмодели X будет рассматриваться в сигнатуре σ, являющейся некоторым конечным обеднением сигнатуры τ. В силу стандартных соображений достаточно рассмотреть только негативную часть диаграммы. Дальнейшее упрощение можно получить, опираясь на результаты лемм 4 и 5, а именно, если элементы подмодели $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ расположены в порядке возрастания, то достаточно рассмотреть случай, когда формульные предикаты v_θ связывают только рядом стоящие элементы подмодели X, а формульные предикаты $w_\theta(x)$ — первый и последний элемент.

Проведем вначале доказательство для случая, когда диаграмма подмодели X имеет только формульные предикаты вида v_θ. Доказательство будем вести перекидыванием отрезков подмодели $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ на основании леммы 3. Во избежание нудного "всеобщего случая" будем считать, что подмодель $X = \{a_s, \ldots, a_n\}$ состоит из двух отрезков $a_1, \ldots, a_i$ и $a_{i+1}, \ldots, a_n$. Перекинем эти отрезки в отрезки целых чисел $b_1, \ldots, b_i$ и $b_{i+1}, \ldots, b_n$ соответственно с сохранением всех условий леммы 3.

Пусть $\mathcal{M} \models \neg v_\theta(a_i, a_{i+1})$. Покажем, что $\mathcal{Z} \models \neg v_\theta(b_i, b_{i+1})$. Доказательство будем вести индукцией по рангу предиката $v_\theta(x, y)$. Рассмотрим основание индукции при $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_h, \alpha_h\rangle$. Тогда из $\mathcal{M} \models \neg v_\theta(a_i, a_{i+1})$ имеем, что хотя бы одно α_i, где $0 < i < h$, является предикатом P (напомним, что в интервале от a_i до a_{i+1} могут быть сколь угодно большие отрезки непростых элементов в силу пятой части системы аксиом Γ), но в этом случае обязательно $\mathcal{Z} \models \neg v_\theta(b_i, b_{i+1})$, так как все числа в интервале от b_i до b_{i+1} непростые. Основание индукции доказано.

Предположим по индукции, что для всех формульных предикатов ранга, меньшего k, рассматриваемое утверждение имеет место, а для некоторого формульного предиката $v_\theta(x, y)$ ранга k не выполняется. Тогда $\mathcal{M} \models \neg v_\theta(a_i, a_{i+1})$ и $\mathcal{Z} \models v_\theta(b_i, b_{i+1})$, где $\theta = \langle \alpha_0, \beta_1, \dots, \beta_h, \alpha_h \rangle \in F_k$. В этом случае все α_i являются отрицанием предиката P (см. доказательство основания индукции).

Пусть предикат $v_\theta(b_i, b_{i+1})$ реализуется на числах $c_1, \dots, c_{h-1}$, т.е.

$$\alpha_1(c_1) \,\&\, \dots \,\&\, \alpha_1(c_{h-1}) \,\&\, \beta_1(b_i, c_1) \,\&\, \dots \,\&\, \beta_h(c_{h-1}, b_{i+1}).$$

Так как возрастающая последовательность чисел $c_1, \dots, c_{h-1}$ может быть изоморфно вложена в последовательность элементов $d_1, \dots, d_{h-1}$, лежащую между элементами a_i и a_{i+1}, то это дает необходимое противоречие (при проверке реализуемости предиката $v_\theta(a_i, a_{i+1})$ на элементах $d_1, \dots, d_{h-1}$ некоторые трудности может представлять рассмотрение а.ф. $\beta_1(a_i, d_i), \dots, \beta_h(d_{h-1}, a_{i+1})$, но здесь надо воспользоваться индукционным предположением для предикатов $\beta_1, \dots, \beta_h$, а также тем, что после (перед) элемента a_i (соответственно a_{i+1}) может быть сколь угодно большая последовательность непростых элементов). Индукционное предположение доказано.

Оставшийся случай с формульными предикатами $w_\theta(x)$, связывающими первый и последний элемент, легко доказывается от противного. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. *Элементарная теория натуральных чисел с порядком и предикатом, выделяющим простые числа, разрешима в предположении выполнимости РГБ.*

В силу лемм 6 и 7 теория Г модельно и универсально полна, следовательно, в силу известного признака полноты [2] теория Г полна. В предположения РГБ система аксиом Г рекурсивна и, следовательно, теория Г разрешима.

Список литературы

1. Беляков Э. Б. Универсальные теории целых чисел и расширенная гипотеза близнецов / Э. Б. Беляков, В. И. Мартьянов // Алгебра и логика. — 1983. — № 1. — С. 26–34.
2. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. — М.: Наука, 1967. — 267с. Т. 20, No 4. — С. 37–108.
3. Ершов Ю. Л. Элементарные теории / Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин // Успехи математических наук. — 1965. — Т. 20, No 4. — С. 37–108.
4. Кокорин А. И. Вопросы разрешимости расширенных теорий / А. И. Кокорин, А. Г. Пинус // Успехи математических наук. — 1978. — Т. 33, No 2. — С. 49–84.

V.I. Martyanov

An Extended Twin Hypothesis and the Theory of Natural Numbers with Distinguished Primary Numbers

Abstract. The decidability of the extended theory of natural numbers is proven with the supposition that a variant of the twin hypothesis holds.
Keywords: model theory, elementary theories decidability

Мартьянов Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор

Иркутский государственный технический университет 664047, Иркутск, ул. Лермонтова, 83 (ad@istu.edu)

Vladimir Martyanov, Irkutsk State Technical University, 83, Lermontov St., Irkutsk, 664047 (ad@istu.edu)