Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 117—125

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.7

Минимизация мультиопераций в классе стандартных форм *

Н. А. Перязев
Восточно-Сибирская государственная академия образования

И. А. Яковчук
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В статье представлен алгоритм минимизации мультиопераций в классе стандартных форм.

Ключевые слова: мультиоперация, стандартная форма, алгоритм, минимизация, пересечение.

1. Мультиоперации. Стандартная форма мультиопераций

Отображение из A^n в A — называется n-местной операцией на A (будем допускать случай $n = 0$). Множество всех n-местных опреращий на A обозначаем через P_A^n, если при этом A является k-элементным множеством, то используем обозначение P_k^n.

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A (используется также термин — частичная гипероперация [1]). Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение H_A^n, при $|A| = k$, соответственно, обозначаем так H_k^n. Используем также обозначения $H_A = \bigcup_{n\geq 0} H_A^n$ и $H_k = \bigcup_{n\geq 0} H_k^n$.

Суперпозиция мультиопераций определяется следующим образом

$$(f * (f_1, ..., f_n))(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f(b_1, ..., b_n).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 07–01–00240 и 09–01–00476.

Следуя [2] мультиоперацию $f \in H_A^n$ на множестве $A = \{1, 2\}$ можно представить как отображение

$$f : \{1, 2\}^n \to \{0, 1, 2, 3\},$$

получаемых из f при кодировке

$$\varnothing \to 0; \{1\} \to 1; \{2\} \to 2; \{1, 2\} \to 3.$$

При этом n-местную мультиоперацию f задаем векторной формой $(\alpha_1, ..., \alpha_{2^n})$, где $f(a_1, ..., a_n) = \alpha_i$ и $(a_1 - 1, ..., a_n - 1)$ есть представление i в двоичной системе счисления.

Введем постоянные обозначения для некоторых функций. Бинарная мультиоперация $\cap \in H_k^2$, определяется так $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$. Как принято будем в дальнейшем использовать суффиксную форму записи $\cap(a, b) = (a \cap b)$. Очевидно, что эта мультиоперация коммутативна и ассоциативна. Поэтому, как обычно, несущественные скобки будем опускать.

Мультиоперации $d_{i,\alpha}^n \in H_2^n$ определим через их векторное задание

$$d_{i,\alpha}^n = (3, ..., 3, \overset{i}{\alpha}, 3, ..., 3), \quad (1 \le i \le 2^n),$$

где $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. В частности $d_{1,\alpha}^0 = (\alpha)$.

Несложно заметить, что любую мультиоперацию $f \in H_2^n$ и $f \neq (3, ..., 3)$ можно представить следующим образом:

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_1, ..., x_n),$$

где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^n \ |\alpha \in \{1, 2\}\}$, причем для каждой f множество компонент разложения $\{d_j\}$ единственно.

Назовем такое каноническое представление *совершенной стандартной формой.*

Очевидным образом совершенную стандартную форму можно обобщить.

Пусть $f \in H_2^n$. Тогда следующее представление назовем *стандартной формой* мультиоперации [3]

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}), \tag{1.1}$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^m \mid 0 \le m \le n, \alpha \in \{0, ..., 3\}\}$.

Пример 1. Представим мультиоперацию $f \in H_2^n$ заданной векторно $f(x_1, x_2, x_3) = (32323030)$ стандартной формой.

$$f(x_1, x_2, x_3) = d_{2,2}^2\ (x_1, x_3) \cap d_{4,0}^2\ (x_1, x_3).$$

В то же время

$$f(x_1, x_2, x_3) = d^1_{2,2}\ (x_3) \cap d^2_{4,1}\ (x_1, x_3)$$

Как видим, представление мультиопераций стандартной формой не единственно.

2. Алгоритм минимизации мультиопераций в классе стандартных форм

Ниже приводится алгоритм, позволяющий найти минимальное представление мультиопераций в классе стандартных форм по количеству компонент пересечения, основанный на минимизации булевых функций в дизъюнктивных нормальных формах.

Пусть дана n - местная мультиоперация $f \in H_2^n$, заданная векторной формой $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{2^n})$, где $f(a_1, ..., a_n) = \alpha_i$, $(a_1, ..., a_n)$ является i-м набором при натуральном упорядочивании наборов, $(1 \leq i \leq 2^n)$.

Как показано ранее, представить данную мультиоперацию в стандартной форме можно не единственным способом, поэтому правомерна задача минимизации, то есть разработка алгоритмов, позволяющих найти минимальное представление мультиоперации в классе стандартных форм.

Под минимальным будем понимать представление мультиоперации в виде стандартной формы с наименьшим количеством компонент пересечения. Количество компонент пересечения в представлении назовем его сложностью.

На вход алгоритма подается вектор $\widetilde{\alpha}$, представляющий мультиоперацию f.

На выходе алгоритма получим минимальную стандартную форму, представляющую мультиоперацию f и сложность этой формы.

Перейдем к описанию алгоритма.

Шаг 1. Получим все возможные представления мультиоперации f в следующем виде:

$$f = h_0 \cap h_1 \cap h_2, \tag{2.1}$$

где $h_0 = (\beta_1, ..., \beta_{2^n}),\ h_1 = (\gamma_1, ..., \gamma_{2^n}),\ h_2 = (\delta_1, ..., \delta_{2^n}),$
$\beta_i \in \{0, 3\},\ \gamma_i \in \{1, 3\},\ \delta_i \in \{2, 3\}.$

Количество возможных представлений мультиоперации f в требуемом виде зависит от k — количества компонент $\alpha_i = 0$ вектора $\widetilde{\alpha}$, представляющего данную мультиоперацию.

Рассмотрим различные варианты значений k:

– $k = 0$.

В этом случае мультиоперация имеет единственное представление

$$f(\widetilde{a}) = h_1(\widetilde{a}) \cap h_2(\widetilde{a})$$

Продемонстрируем данное представление для мультиоперации размерности 3.

Пусть $f = (31123321)$, тогда $h_1 = (31133331), h_2 = (33323323)$.

– $k = 1$.

Одна компонента α_i векторного представления мультиоперации f равна нулю. В таблице (1) приведены возможные 5 вариантов значений соответствующих i-компонент мультиопераций h_0, h_1, h_2, также представленых в векторном виде.

Таблица 1.

номер варианта	i - компонента		
	h_0	h_1	h_2
1	3	1	2
2	0	1	3
3	0	1	2
4	0	3	2
5	0	3	3

– $k > 1$.

Очевидно, что для k наборов на которых $\alpha_i = 0$ необходимо рассмотреть 5^k возможных перестановок соответствующих значений i-компонент мультиопераций h_0, h_1, h_2.

Таким образом, первый шаг алгоритма сводится к построению 5^k возможных различных вариантов представлений заданной мультиоперации f в виде (2.1). Как видим, количество вариантов представления экспоненциально зависит от количества нулей в векторном представлении мультиоперации.

Шаг 2. Заменим все мультиоперации в каждом из 5^k представлений, полученных на первом шаге алгоритма булевыми функциями.

Обозначим через

β_i — i - компоненты векторного представления булевых функций f_0, f_1, f_2,

α_i — соответствующие им компоненты векторного представления мультиопераций h_0, h_1, h_2.

Тогда

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i \neq 3; \\ 0, & \text{если } \alpha_i = 3. \end{cases}$$

Итак, на втором шаге алгоритма мы получим $3 \cdot 5^k$ булевых функций. Отметим, что каждое представление мультиоперации описывается тремя булевыми функциями f_0, f_1, f_2.

Шаг 3. Для каждой, полученной на втором шаге алгоритма булевой функции, найдем кратчайшую ДНФ.

Шаг 4. Вычислим сложность каждого представления мультиоперации как сумму элементарных конъюнкций, входящих в кратчайшие ДНФ булевых функций f_0, f_1, f_2, описывающих данное представление. Определим номер первого представления мультиоперации с наименьшей сложностью — представление под данным номером, записанное в стандартной форме и будет выходными данными алгоритма.

Для того, чтобы перейти от булевых функций к записи представления мультиоперации в стандартной форме необходимо каждой элементарной конъюнкции, входящей в кратчайшие ДНФ булевых функций f_α, где $\alpha \in \{0, ..., 2\}$ поставить в соответствие функцию $d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m})$, такую что $d_j \in \{d^m_{i,\alpha} \mid 0 \leq m \leq n\}$.

Тогда представление вида

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

является стандартной формой мультиоперации f.

На этом описание алгоритма окончено.

Продемонстрируем работу алгоритма на следующем примере.

Пример 2. На вход алгоритма подана мультиоперация $f(x_1, x_2, x_3) = (33201210)$.

Шаг 1. Найдем все представления данной мультиоперации в виде

$$f = h_0 \cap h_1 \cap h_2.$$

Количество нулей в векторном представлении мультиоперации равно двум, поэтому возможно 25 различных вариантов ее представления. Все варианты представлены в таблице 2. Значения компонент мультиопераций h_0, h_1, h_2, соответствующих нулевым компонентам мультиоперации f выделены шрифтом.

Шаг 2. Заменим мультиоперации h_0, h_1, h_2 булевыми функциями. Результат замены представим в таблице 3.

Шаг 3. Для каждой булевой функции, полученной на втором шаге алгоритма найдем кратчайшую. Результаты представлены в таблице 4.

Шаг 4. Из таблицы 4 видно, что минимальную сложность имеют пять представлений мультиоперации, соответствующие разложениям под номерами 1, 19, 20, 24, 25. Они имеют сложность четыре. В качестве результата работы алгоритма берется первое представление с наименьшей сложностью — это представление, соответствующее разложению под номером 1.

Запишем его в стандартной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) = d^2_{4,1}(x_2, x_3) \cap d^2_{3,1}(x_1, x_3) \cap d^2_{2,2}(x_1, x_2) \cap d^2_{4,2}(x_1, x_3).$$

Таблица 2.

Варианты представления мультиоперации

номер варианта	h_0	h_1	h_2
1	(333**3**333**3**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**2**)
2	(333**3**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**3**)
3	(333**3**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**2**)
4	(333**3**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**2**323**2**)
5	(333**3**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**2**323**3**)
6	(333**0**333**3**)	(333**1**131**1**)	(332**3**323**2**)
7	(333**0**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**3**323**3**)
8	(333**0**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**3**323**2**)
9	(333**0**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**3**323**2**)
10	(333**0**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**3**323**3**)
11	(333**0**333**3**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**2**)
12	(333**0**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**3**)
13	(333**0**333**0**)	(333**1**131**1**)	(332**2**323**2**)
14	(333**0**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**2**323**2**)
15	(333**0**333**0**)	(333**1**131**3**)	(332**2**323**3**)
16	(333**0**333**3**)	(333**3**131**1**)	(332**2**323**2**)
17	(333**0**333**0**)	(333**3**131**1**)	(332**2**323**3**)
18	(333**0**333**0**)	(333**3**131**1**)	(332**2**323**2**)
19	(333**0**333**0**)	(333**3**131**3**)	(332**2**323**2**)
20	(333**0**333**0**)	(333**3**131**3**)	(332**2**323**3**)
21	(333**0**333**3**)	(333**3**131**1**)	(332**3**323**2**)
22	(333**0**333**0**)	(333**3**131**1**)	(332**3**323**3**)
23	(333**0**333**0**)	(333**3**131**1**)	(332**3**323**2**)
24	(333**0**333**0**)	(333**3**131**3**)	(332**3**323**2**)
25	(333**0**333**0**)	(333**3**131**3**)	(332**3**323**3**)

Таблица 3.

Результат замены булевыми функциями

номер варианта	f_0	f_1	f_2
1	(00000000)	(00011011)	(00110101)
2	(00000001)	(00011011)	(00110100)
3	(00000001)	(00011011)	(00110101)
4	(00000001)	(00011010)	(00110101)
5	(00000001)	(00011010)	(00110100)
6	(00010000)	(00011011)	(00101001)
7	(00010001)	(00011011)	(00100100)
8	(00010001)	(00011011)	(00100101)
9	(00010001)	(00011010)	(00100101)
10	(00010001)	(00011010)	(00100100)
11	(00010000)	(00011011)	(00110101)
12	(00010001)	(00011011)	(00110100)
13	(00010001)	(00011011)	(00110101)
14	(00010001)	(00011010)	(00110101)
15	(00010001)	(00011010)	(00110100)
16	(00010000)	(00001011)	(00110101)
17	(00010001)	(00001011)	(00110100)
18	(00010001)	(00001011)	(00110101)
19	(00010001)	(00001010)	(00110101)
20	(00010001)	(00001010)	(00110100)
21	(00010000)	(00001011)	(00100101)
22	(00010001)	(00001011)	(00100100)
23	(00010001)	(00001011)	(00100101)
24	(00010001)	(00001010)	(00100101)
25	(00010001)	(00001010)	(00100100)

Таблица 4.

Минимальные ДНФ

номер варианта	f_0	f_1	f_2	сложность
1	-	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	4
2	$x_1x_2x_3$	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
3	$x_1x_2x_3$	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
4	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
5	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
6	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	5
7	x_2x_3	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
8	x_2x_3	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	5
9	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	5
10	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
11	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
12	x_2x_3	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
13	x_2x_3	$x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
14	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
15	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
16	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
17	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
18	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	5
19	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$	4
20	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	4
21	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	5
22	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	5
23	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$	$x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	5
24	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3$	$x_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	4
25	x_2x_3	$x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$	4

3. Тестирование алгоритма

Для тестирования алгоритма была написана компьютерная программа и проведены следующие эксперименты.

Проведена минимизация всех мультиопераций в классе стандартных форм для $n = 2$ и $n = 3$.

Для каждой мультиоперации была найдена сложность ее минимального представления. Полученные данные позволили определить среднюю сложность минимального представления мультиопераций в классе стандартных форм для $n = 2$ и $n = 3$ и количественное распределение мультиопераций по сложностям полученных минимальных представлений.

$L_{aver}(2) = 2.38$, $L_{aver}(3) = 4.14$, где L_{aver} — средняя сложность минимального представления мультиопераций в классе стандартных форм.

Распределение полученных минимальных представлений при $n = 2$ отражено в таблице 5 и при $n = 3$ в таблице 6. Используем следующие обозначения: L — сложность мультиопераций; k — количество мультиопераций, имеющих соответствующую сложность, P — процент от числа всех мультиопераций.

Таблица 5.

L	1	2	3	4
k	24	124	92	14
P	9.45%	48.82%	36.22%	5.51%

Таблица 6.

L	1	2	3	4	5	6	7	8
k	78	1765	13319	28966	17144	3724	512	26
P	0.12%	2.69%	20.32%	44.2%	26.16%	5.69%	0.78%	0.04%

Выше было показано, что сложность алгоритма увеличивается экспоненциально в зависимости от количества нулей, входящих в векторное представление мультиоперации. С другой стороны, на сложность алгоритма влияет выбор метода минимизации булевых функций [4, 5].

Список литературы

1. Romov B.A. The completeness problem in partial hyperclones / B. A. Romov // Discrete Mathematics, 2006. — 306. — P. 1405—1414.
2. Перязев Н.А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки; Казань, 2009. — Т. 151. Книга 2. — С. 120–125.
3. Перязев Н.А. Супеклоны мультиопераций /Н. А. Перязев // Труды VIII Международной конференции "Дискретные системы в теории управляющих систем". — М.: МАИС Пресс, 2009. — С.233–238.
4. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова / — М.: Наука, 1974. —Т.1.— 312 с.
5. Избранные вопросы теории булевых функций. / Под ред. С.Ф. Винокурова и Н.А. Перязева / — М.: Физматлит, 2001. — 192 с.

N. A. Peryazev, I. A. Yakovjuk

Minimisation of multioperations in a class Standard forms

Abstract. In article the algorithm of minimisation of multioperations in a class of standard forms is presented.

Keywords: multioperation, the standard form, algorithm, minimisation, crossing.

Перязев Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математической информатики, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя набережная, 6; тел.: (3952)240477 (nikolai.baikal@gmail.com)

Яковчук Инна Александровна, аспирант, кафедра математической информатики, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя набережная, 6; тел.: (3952)240477 (inna-andrey@list.ru)

Peryazev Nikolay, East Siberian Academy of Education, 6, Nignaya Naberegnaya, Irkutsk, 664011 professor, Phone: (3952)240477 (nikolai.baikal@gmath.com)

Yakovjuk Inna, East Siberian Academy of Education, 6, Nignaya Naberegnaya, Irkutsk, 664011 aspirant, Phone: (3952)240477 (inna-andrey@list.ru)