Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 61—87

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.946

Анализ стационарных решений начально-краевой задачи для нелокального параболического уравнения физики плазмы

Г. А. Рудых
Иркутский государственный университет

Аннотация. Методами нелинейного функционального анализа изучаются свойства стационарных решений начально-краевой задачи для нелинейного нелокального параболического уравнения второго порядка с неявным вырождением. Данное уравнение возникает при математическом моделировании диффузии ограниченной плазмы поперек магнитного поля и ее равновесных конфигураций в установке типа токамак. Задача о стабилизации нестационарных решений к стационарным сведена к исследованию разрешимости нелинейной краевой задачи с нелокальными (интегральными) операторами. Получены достаточные условия на параметры изучаемой интегродифференциальной краевой задачи, обеспечивающие существование и единственность ее классического решения, для которого конструктивно построена область притяжения.

Ключевые слова: нелинейное нелокальное параболическое и эллиптическое уравнения, классическое решение, стабилизация, область притяжения, монотонный оператор, конус, нижнее и верхнее решения, парная неподвижная точка.

1. Введение, необходимые результаты и постановка задачи

Многие задачи математического моделирования в физике плазмы, в частности, диффузии ограниченной плазмы и ее равновесных конфигураций в установках типа токамак, приводят к необходимости исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих нелокальные (интегральные) операторы [1, 2].

Диффузия плазмы через магнитное поле изучалась в работах [3 – 7] и описывается, в общем случае, нелинейными вырождающимися параболическими уравнениями второго порядка [8]. Фундаментальные результаты, полученные в работах [9, 10] являются основополагающими при математическом моделировании как медленной, так и быстрой диффузии плазмы поперек магнитного поля, а также ее равновесных конфигураций. В настоящее время имеется значительное число публикаций [8, 11 – 15], посвященных исследованию начально-краевых задач для параболических уравнений с неявным вырождением вида

$$u_t = \triangle g(u) + f(\lambda, u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \quad u = u_0, \quad (t,x) \in \{0\} \times \Omega,$$

где $\mathbb{R}^+ = (0,\infty); \Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное подмножество с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\alpha}$; $\alpha \in (0,1)$; $g : \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$ – непрерывная возрастающая функция; $\bar{\mathbb{R}}^+ = [0,\infty)$; $g(0) = 0$; g^{-1} – непрерывна по Гёльдеру; g или g^{-1}- локально непрерывна по Липшицу; $f : \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция; $f(\lambda, \cdot)$- локально непрерывна по Липшицу; $f(\lambda, 0) = 0$ для $\lambda \in \mathbb{R}$; $u_0 \in L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega\}; L^\infty(\Omega)$ – банахово пространство относительно нормы $||u(x)||_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$.

В дальнейшем все эти условия будем называть предположениями (**U**).

Определение 1. *Под решением задачи (1.1) на* $[0,T], T > 0$*, понимается функция* $u \in C([0,T]; L_1(\Omega)) \bigcap L^\infty(Q_T)$*,* $Q_T = \Omega \times (0,T]$ *такая, что*

$$\int\limits_\Omega u(t)\varphi(t)dx - \iint\limits_{Q_t} (u\varphi_t + g(u)\triangle\varphi)dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega u_0\varphi(0)dx + \iint\limits_{Q_t} f(\lambda, u)\varphi dxdt, \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in C^2(\bar{Q}_t)$*,* $\varphi \geq 0$*,* $\varphi = 0$ *на* $\sum_T = \partial\Omega \times (0,T]$*,* $t \in [0,T]$.

Под решением задачи (1.1) на $\bar{\mathbb{R}}^+$ понимается решение последней на $[0,T]$ для любого $T > 0$. Верхнее(соответственно нижнее) решение начально - краевой задачи (1.1) определяется аналогично, посредством замены в соотношении (1.2) знака равенства на знак неравенства $\geq$ (соответственно $\leq$).

Под решением стационарной задачи

$$-\triangle g(u) = f(\lambda, u), \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.3}$$

понимается функция $u \in L^\infty(\Omega)$ такая, что

$$-\int\limits_\Omega g(u)\triangle\varphi dx = \int\limits_\Omega f(\lambda, u)\varphi dx, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

для любой функции $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varphi \geq 0$ в Ω, $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$. Аналогично, как и для (1.1) определяются верхнее и нижнее решения краевой задачи

(1.3). Так как g^{-1} непрерывна по Гёльдеру, то любое решение задачи (1.3) является классическим в том смысле, что $v = g(u) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$-классическое решение краевой задачи

$$-\triangle v = h(\lambda, v), \;\; x \in \Omega, \;\; v = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

где $h : \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R};\; h(\lambda, v) = f(\lambda, g^{-1}(v)) = f(\lambda, \cdot) \circ g^{-1}(v);\; f(\lambda, \cdot)$ – локально непрерывна по Липшицу; $g^{-1}(v) \equiv p(v)$ – возрастающая функция.

Итак, в силу введенных обозначений, начально-краевая задача (1.1) может быть преобразована к виду

$$(p(v))_t = \Delta v + h(\lambda, v), (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{1.5}$$

$$v = 0, \;\; (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \;\; v = v_0, \;\; (t, x) \in \{0\} \times \Omega.$$

Здесь $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$; $p : \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$ – возрастающая и локально непрерывная по Липшицу функция; $p(v) \equiv g^{-1}(v)$; $h : \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция; $h(\lambda, v) = f(\lambda, p(v))$; $h(\lambda, \cdot)$ – локально непрерывна по Липшицу; $h(\lambda, 0) = 0$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. Все эти условия будем называть предположениями (**V**).

Под решением задачи (1.5) на $[0, T], ; T > 0$, понимается функция

$$v \in C\left([0, T]; L_1(\Omega)\right) \bigcap L^\infty(Q_T), \;\; Q_T = \Omega \times (0, T],$$

удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega p(v(t))\varphi(t)dx - \iint\limits_{Q_t} (p(v)\varphi_t + v\triangle\varphi)dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega p(v_0)\varphi(0)dx + \iint\limits_{Q_t} h(\lambda, v)\varphi dxdt, \tag{1.6}$$

для всех $\varphi \in C^2(\bar{Q}_t), \; \varphi \geq 0, \; \varphi = 0$ на $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T], \; t \in [0, T]$.

Аналогично, как и выше определяется решение на $\bar{\mathbb{R}}^+$ (глобальное решение), а также верхнее (нижнее) решение задачи (1.5), путем замены в формуле (1.6) знака равенства на знак неравенства $\geq$ $(\leq)$.

Что касается взаимосвязи между задачами (1.3), (1.4) отметим, что в силу монотонности и непрерывности g функция u является максимальным в $L^\infty_+(\Omega)$ (соответственно изолированным в $L^\infty(\Omega)$) решением задачи (1.3) тогда и только тогда, когда функция $v = g(u)$ является максимальным $L^\infty_+(\Omega)$ (соответственно изолированным в $L^\infty(\Omega)$) решением задачи (1.4).

Вопросы стабилизации неотрицательных решений задачи (1.1) к стационарным изучались многими авторами (см., например, [14, 15], а также [8, 12] и имеющиеся там ссылки). В частности, в [14] доказано, что если выполняются предположения (**U**), тогда начально-краевая задача (1.1) имеет единственное для $t \in [0,T]$ решение $u(u_0,t)$, причем $u(u_0,t) \geq 0$ для $t \in [0,T]$.

Справедливость этого результата следует из теоремы сравнения для нижнего и верхнего решений задачи (1.1) (см., [15] и приведенную ниже лемму **A** работы [14]) и благодаря условию $g : \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$ – локально непрерывна по Липшицу, из предположений (**U**).

Лемма A. *Пусть выполнены предположения* (**U**). *Пусть* u_1, u_2 *- нижнее, соответственно, верхнее решение начально-краевой задачи (1.1) на промежутке* $[0,T]$, *T>0. Пусть* $l > 0$ *- константа Липшица для функции* f *на отрезке* $[-\xi,\xi]$, *где*

$$\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}, \;\; \xi_i = ess \sup_{(x,t)\in Q_T} |u_i(x,t)|, \;\; i = 1,2.$$

Тогда следующее неравенство

$$\int\limits_\Omega [u_1(t) - u_2(t)]_+ dx \leq e^{lt} \int\limits_\Omega [u_1(0) - u_2(0)]_+ dx,$$

выполняется для любого $t \in [0,T]$, *где* $r_+ = \max\{r, 0\}, \; r \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в работе [15]лемма **A** доказана для случая, когда функция g является локально непрерывной по Липшицу. Если g^{-1} локально непрерывна по Липшицу, тогда интегральное равенство (1.2) можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$\int\limits_\Omega (g^{-1}(v))(t)\varphi(t)dx - \iint\limits_{Q_t} (g^{-1}(v)\varphi_t + v\triangle\varphi)dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega (g^{-1}(v))(0)\varphi(0)dx + \iint\limits_{Q_t} f(\lambda, g^{-1}(v))\varphi dxdt,$$

где $t \in [0,T], T > 0$.

Кроме того, в этом случае (при условии, что выполнены предположения (**V**)) имеют место результаты (i), (ii), полученные в работе [16, теорема 2.4].

(i). Пусть u, v – решения первой краевой задачи (1.5) на промежутке $[0,T], T > 0$ с начальными данными u_0, v_0 соответственно. Пусть $r > 0$ – константа Липшица функции h на отрезке $[-s,s]$, где $s = \max\left\{||u||_{L^\infty(Q_T)}, ||v||_{L^\infty(Q_T)}\right\}$. Тогда для любого $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$||p(u(t)) - p(v(t))||_{L_1(\Omega)} \leq e^{rt}||p(u_0) - p(v_0)||_{L_1(\Omega)}.$$

(ii). Пусть u, v – нижнее и верхнее решения первой краевой задачи (1.5) с начальными данными u_0, v_0 соответственно, причем $u_0 \leq v_0$. Тогда $u \leq v$ почти всюду в Q_T.

Итак, если функция $g(u)$ (соответственно $g^{-1}(v) \equiv p(v)$) является локально непрерывной по Липшицу, тогда изучаются свойства стабилизации неотрицательных решений начально-краевой задачи (1.1) (соответственно (1.5)) к стационарным решениям краевой задачи (1.3) (соответственно (1.4)) с последующим построением, в пространстве начальных данных, областей притяжения.

Помимо этого, в [14] установлено, что если выполнены предположения (**U**) и $u_0 \in L^\infty_+(\Omega)$ – нижнее (верхнее) решение задачи (1.3), тогда соответствующее решение $u(u_0, t)$ задачи (1.1) не убывает (не возрастает) по t и, кроме того, доказан следующий результат, используемый в настоящей работе.

Теорема A. *Пусть выполнены предположения* (**U**). *Пусть* $u_1 \in L^\infty_+(\Omega)$ $(u_2 \in L^\infty_+(\Omega))$*- нижнее (верхнее) решение стационарной задачи (1.3),* $0 \leq u_1 \leq u_2$*. Тогда соответствующее решение* $u(u_1, t)$, $(u(u_2, t))$ *нестационарной задачи (1.1) является неубывающей (невозрастающей) функцией* t *почти всюду в* Ω*, имеет место цепочка неравенств*

$$u_1 \leq u(u_1, t) \leq u(u_2, t) \leq u_2, \;\; t \in \bar{\mathbb{R}}^+,$$

и $u(u_1, t)$, $u(u_2, t)$ *сходятся при* $t \to +\infty$ *(в* $C(\bar{\Omega})$*, если* $dim\, \Omega = 1$ *или в* $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$*, если* $dim\, \Omega \geq 2$*) монотонно соответственно к пределам* u_*, u^**, которые являются минимальным, максимальным стационарными решениями задачи (1.3) на множестве* $K = \{u \in L^\infty_+(\Omega) : 0 \leq u_1 \leq u \leq u_2\}$.

Итак, если $u_1, u_2 \in L^\infty_+(\Omega)$- нижнее, соответственно, верхнее решение стационарной задачи (1.3), $0 \leq u_1 \leq u_2$ и функция $u_0 \in L^\infty_+(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $u_1 \leq u_0 \leq u_2$, тогда решение $u(u_0, t)$ задачи (1.1) определено для всех $t \geq 0$, причем $u_1 \leq u(u_0, t) \leq u_2$, где $u = u_0$ для $(x, t) \in \Omega \times \{0\}$. Кроме того, выпуклое подмножество K инвариантно относительно решений начально-краевой задачи (1.1).

В публикации [15], предшествовавшей [14], исследовались вопросы существования, сравнения и стабилизации решений начально-краевой задачи для параболического уравнения с неявным вырождением вида

$$u_t = (u^p)_{xx} + f(\lambda, u), \;\; (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{1.1$'$}$$

$$u = 0, \;\; (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \;\; u = u_0, \;\; (t, x) \in \{0\} \times \Omega,$$

где $\Omega = (-e, e)$; $u_0 \in L^\infty(\Omega)$; $0 \leq u_0 \leq 1$; $p > 1$; $f(\lambda, u) = u(1-u)(u-\lambda)$; $0 < \lambda < (p+1)/(p+3)$.

В частности, в [15] установлено, что задача $(1.1)'$ имеет единственное на $\bar{\mathbb{R}}^+$ решение $u(u_0, t)$, причем $0 \leq u(u_0, t) \leq 1$.

Итак, асимптотическое поведение решений начально-краевой задачи (1.1) определяется множеством ее стационарных решений и сводится к изучению его структуры. В работах [17, 18], а также [14, 15], для обобщенных решений начально-краевых задач $(1.1), (1.1)'$ была построена качественная теория, аналогичная той, что развита в исследованиях [19, 20] для равномерно параболических уравнений. В частности, в [15] на основе принципа сравнения решений задачи $(1.1)'$, получен результат о стабилизации нестационарных решений к изолированным стационарным решениям, множество которых анализировалось явным интегрированием. Результаты, касающиеся регулярности решений, обеспечивали относительную компактность траекторий задачи $(1.1)'$ в соответствующем функциональном пространстве, на котором определен подходящий обобщенный функционал Ляпунова, не обязательно определенно-положительный (см., например, [21]). В работе [14] главным условием для доказательства сходимости траекторий начально-краевой задачи (1.1) к соответствующим стационарным решениям задачи (1.3) являлось требование монотонности траекторий по времени. Это позволило преодолеть трудности, связанные с доказательством относительной компактности траекторий исследуемой задачи в подходящем метрическом пространстве, на котором определен функционал Ляпунова.

Тем самым, задача об устойчивости стационарных решений сводится к исследованию структуры множества этих решений. В случае, когда удается доказать единственность стационарного решения, тогда верхнее и нижнее решения задают область притяжения в пространстве начальных данных. Однако, в настоящее время, как известно [22 – 24], не существует достаточно общих критериев единственности неотрицательных решений задач вида (1.4). Единственность можно гарантировать, если отображение $f(\lambda, \cdot) \circ g^{-1}(v)$ монотонно.

Наконец, отметим, что основными методами исследования уравнений вида (1.4) являются [25 – 28]: метод обыкновенных дифференциальных уравнений, вариационные методы, метод верхних и нижних решений, метод априорных оценок и, так называемый, метод теорем типа Лиувилля. Причем в [28] теоремы типа Лиувилля применялись для изучения существования (несуществования) решений нелинейных нелокальных дифференциальных неравенств с частными производными.

Статья построена следующим образом. В разделах 2, 3 доказывается теорема существования и единственности классического решения общей интегродифференциальной краевой задачи, а также предлагается монотонный итерационный метод построения ее решения, позволяющий оценивать погрешность приближения. В разделе 4 полученные результаты применяются к разрешимости нелинейной нелокальной краевой задачи, возникающей при моделировании диффузии ограниченной тороидальной плазмы поперек магнитного поля и ее равновесных конфигураций.

Итак, в этой работе исследуется разрешимость нелинейного операторного уравнения

$$Lu = F(x, u, z), \quad u \in D(L), \tag{1.7}$$

с граничными условиями общего вида, входящими в оператор L, где L-непрерывно обратимый дифференциальный оператор; $F : \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция своих аргументов; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область; $z = Tu$; T – непрерывный нелинейный оператор (возможно, что T – интегральный оператор типа Вольтерра или Фредгольма), действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$; $F(x, \cdot, z)$ – локально непрерывна по Липшицу; $F(x, u, T(\cdot))$ – монотонный оператор.

В качестве L можно рассматривать, например, либо равномерно эллиптический, либо обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка. Однако, предложенный ниже подход применим и к параболическим операторам. В этом случае (1.7) является вырождающимся параболическим уравнением второго порядка с нелокальными (интегральными) операторами.

При этих предположениях доказывается существование классического решения задачи (1.7). Помимо этого, получены достаточные условия обеспечивающие единственность ее решения.

При получении этих результатов используются современные методы нелинейного функционального анализа: модификация классических методов теории монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах [22, 23] для случая парных неподвижных точек [24] в сочетании с техникой верхних и нижних решений [14, 25].

2. Теорема существования решения краевой задачи

Будем говорить, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и ее граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2+\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$, если для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует шар $S = S(x_0)$ и взаимно однозначное отображение $f : S \to D \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $f(S \bigcap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$, $f(S \bigcap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$, $f \in C^{2+\alpha}(S)$, $f^{-1} \in C^{2+\alpha}(D)$, где $\mathbb{R}^n_+$ – открытое верхнее полупространство. Важно отметить, что если $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, то функция $\varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ может быть продолжена на $\bar{\Omega}$ функцией класса $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Обратно, функция из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ имеет граничные значения класса $C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу (1.7), где L – непрерывно обратимый дифференциальный оператор. Как отмечалось выше, в качестве L можно взять равномерно эллиптический оператор, определенный на ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2+\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, то есть

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x), \qquad (2.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \leq \nu, \ x \in \Omega,$$

где $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ – константы эллиптичности; $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$; $c(x) \geq 0$. При этих предположениях справедливо включение $Lu(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

Ясно, что если $Lu(x)$ принадлежит классу более высокой гладкости чем $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, то и $u(x)$ также принадлежит классу более высокой гладкости чем $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Иначе, чем выше регулярность $Lu(x)$, тем выше регулярность $u(x)$.

Краевая задача (1.7), (2.1) с однородным граничным условием Дирихле $Lu = F(x, u, Tu)$, $x \in \Omega$, $u = 0, x \in \partial\Omega$, является базовой при математическом моделировании равновесных конфигураций ограниченной плазмы в установках типа токамак [29, 30].

Кроме того, в случае теплопроводности, эта первая краевая задача описывает стационарное распределение температуры $u(x)$ в заданной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ по известному ее значению на границе $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$.

В этом разделе изучается разрешимость двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu \equiv -(a(x)u')' + b(x)u = F(x, u, z), \ x \in (0,1), \qquad (2.2)$$

$$a(x) \in C^1[0,1], \ b(x) \in C[0,1], \quad a(x) > 0, \quad b(x) \geq 0,$$

с граничными условиями

$$L_i u \equiv \alpha_i u(i) + (-1)^{i+1}\beta_i u'(i) = \gamma_i, \qquad (2.3)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1$.

Пусть F – непрерывная функция, $z = Tu$ – непрерывный, возможно, нелинейный оператор, действующий из $C[0,1]$ в $C[0,1]$, где $C[0,1]$ – пространство вещественнозначных непрерывных функций с *sup* – нормой (равномерной нормой)

$$||f(x)||_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Ниже предполагается, что T- монотонный оператор, то есть для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$ таких, что $0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$, имеем $T\varphi(x) \leq T\psi(x)$, если T – возрастающий оператор, либо $T\varphi(x) \geq T\psi(x)$, если T – убывающий оператор. Для определенности будем считать, что T – убывающий оператор. Наконец, отметим, что предлагаемый ниже метод решения краевой задачи (1.7) применим также, если $z = z(T_1u, \ldots, T_ku)$, $z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, где операторы T_i обладают приведенными выше свойствами, причем тип монотонности (возрастание, или убывание), может быть различным для различных $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть заданы функции $v_0(x), w_0(x) \in C[0,1]$ такие, что $0 \leq v_0(x) \leq w_0(x)$. Посредством $[v_0, w_0]$ будем обозначать множество $\{u(x) \in C[0,1] : v_0(x) \leq u(x) \leq w_0(x)\}$ и называть его порядковым интервалом [31].

Теперь предположим, что функция $F(x,u,z)$ для всех $u \in [v_0, w_0]$, $z \in [Tw_0, Tv_0]$, $x \in (0,1)$ обладает следующими свойствами:

(1) $F(x,u,z)$ не убывает по z;

(2) $F(x,u,z)$ непрерывно дифференцируема по u на порядковом интервале $[v_0, w_0]$;

(3) для любого $\tau \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$\tau F(x,u,T(\tau u)) < F(x,\tau u, Tu).$$

Отметим, что в силу условия **(2)** существует $M(v_0, w_0) \geq 0$, такое, что $\frac{\partial}{\partial u}F \geq -M$, $F + Mu \geq 0$. Причем, если F не убывает по u, то M можно положить равной нулю.

Определение 2. *Решением задачи (2.2), (2.3) назовем функцию $u(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющую уравнению (2.2) и граничным условиям (2.3).*

Пусть оператор L непрерывно обратим, тогда этим же свойством, в силу положительности L и M, обладает оператор $L + M$. Далее, предположим, что помимо **(1)**, **(2)**, **(3)** выполнено условие:

(4) оператор $(L+M)^{-1}$ является u_0 – положительным [22, 23], то есть найдется такой ненулевой элемент $u_0 \in C[0,1]$, $u_0 > 0$, что для любого ненулевого элемента $u \in C[0,1]$, $u > 0$ можно указать числа $\alpha(u) > 0$, $\beta(u) > 0$, при которых выполняется цепочка неравенств

$$\alpha(u)u_0 \leq (L+M)^{-1}u \leq \beta(u)u_0.$$

Определение 3. *Функции $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющие соотношениям*

$$Lv_0 \leq F(x, v_0, Tw_0), \;\; L_iv_0 \leq 0 \;\; (Lw_0 \geq F(x, w_0, Tv_0), \;\; L_iw_0 \geq 0), \quad (2.4)$$

назовем нижним (верхним) квазирешениями задачи (2.2), (2.3), где $i = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* **(1).** *Пусть существуют нижнее и верхнее квазирешения $v_0(x), w_0(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$ задачи (2.2), (2.3) такие, что $v_0(x) \leq w_0(x)$. Тогда краевая задача (2.2), (2.3) имеет, по крайней мере, одно решение $u(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, принадлежащее порядковому интервалу $[v_0, w_0]$, то есть $v_0(x) \leq u(x) \leq w_0(x)$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$H(x,u,Tu) \equiv F(x,p(u),Tp(u)) + q(u), \;\; x \in (0,1),$$

$$p(u) = max\{v_0(x), min\{u(x), w_0(x)\}\}, \tag{2.5}$$

$$q(u) = \begin{cases} \dfrac{w_0 - u}{1+u^2}, & u > w_0, \\ 0, & v_0 \le u \le w_0, \\ \dfrac{v_0 - u}{1+u^2}, & u < v_0, \end{cases}$$

где T – убывающий оператор. Из соотношений (2.5) следует справедливость включений

$$p(u) \in [v_0, w_0], \;\; Tp(u) \in [Tw_0, Tv_0], \tag{2.6}$$

и зависимостей $p(v_0) = v_0$, $p(w_0) = w_0$. Тогда из формул (2.5), (2.6) получим, что функция $H(x,u,Tu)$ принимает следующий вид

$$H(x,u,Tu) = \begin{cases} F(x,w_0,Tw_0) + \dfrac{w_0 - u}{1+u^2}, & u(x) > w_0(x), \\ F(x,u,Tu), & v_0(x) \le u(x) \le w_0(x), \\ F(x,v_0,Tv_0) + \dfrac{v_0 - u}{1+u^2}, & u(x) < v_0(x), \end{cases} \tag{2.5$'$}$$

Причем $F(x,u,z) : (0,1) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ – функция непрерывная по совокупности своих переменных, где $z = Tu$.

Далее, ясно, что функция $H(x,u,Tu)$, определяемая согласно $(2.5)'$ является непрерывной и ограниченной на множестве $(0,1) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$.

Итак, если в качестве концевых точек порядкового интервала $[v_0, w_0]$ использовать нижнее и верхнее квазирешения задачи (2.2), (2.3), определяемые посредством неравенств (2.4) и ввести в рассмотрение функцию $H(x,u,Tu)$ вида $(2.5)'$, то приходим к исследованию разрешимости вспомогательной краевой задачи вида

$$Lu = H(x,u,Tu), \;\; L_i u = 0, \;\; x \in (0,1).$$

Теперь, по известному следствию теоремы Шаудера (см., например, [31, теорема 8.3.23], а также [32, теорема 36.7, с.253]), вспомогательная краевая задача имеет хотя бы одно решение $u(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$. Отметим, что результат [31, теорема 8.3.23] доказывается на основе фундаментальной теоремы 8.3.17 работы [31] главное достоинство которой состоит в ее конструктивности. Далее, докажем, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3) и, кроме того, $v_0(x) \le u(x) \le w_0(x)$. Из определения функции $H(x,u,Tu)$ согласно формуле $(2.5)'$ следует, что для этого достаточно показать что выполняется включение $u \in [v_0, w_0]$, иначе $v_0(x) \le u(x) \le w_0(x)$. Докажем, например, справедливость левого из этой цепочки неравенств, то есть $u(x) \geq v_0(x)$. Итак, осуществим намеченное. С этой целью предположим, что $u \notin [v_0, w_0]$. Тогда, очевидно, найдутся $\epsilon > 0$, $x_0 \in (0,1)$ такие, что

$$v_0(x_0) = u(x_0) + \epsilon,\ v_0'(x_0) = u'(x_0),\ v_0''(x_0) \leq u''(x_0). \tag{2.7}$$

Далее, из формул (2.5) с учетом соотношений (2.7) следует справедливость зависимостей

$$p(u(x_0)) = v_0(x_0), \quad q(u(x_0)) = \frac{\epsilon}{1 + u^2(x_0)}. \tag{2.8}$$

Принимая во внимание условия (2.2), наложенные на функции $a(x)$ и $b(x)$ получаем, что $a'(x),\ b(x) \in C[0,1]$. Тем самым, функции $a'(x),\ b(x)$ являются ограниченными на отрезке $[0,1]$. Поскольку x_0 - внутренняя точка отрезка $[0,1]$, тогда предположим, что $a'(x_0) = \beta,\ b(x_0) = \alpha$. Теперь воспользуемся тем фактом, что в силу условий (2.7), (2.8) функция $v_0(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$ не является нижним квазирешением краевой задачи (2.2), (2.3). Итак, в рассматриваемом случае следует, что $L_i v_0 > 0$, где $i = 0, 1$. Поэтому с учетом граничных условий (2.3) имеем

$$\alpha_0 v(0) - \beta_0 v'(0) > 0, \quad \alpha_1 v(1) + \beta_1 v'(1) > 0. \tag{2.9}$$

Далее, введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$f(x) = b(x) v_0(x) - a'(x) v_0'(x), \;\; x \in (0,1),$$

где $a'(x), b(x)$ – ограниченные на множестве $[0,1]$ функции. Отсюда в силу неравенств (2.9) следует, что выполняются соотношения

$$f(0) \equiv \alpha_0 v(0) - \beta_0 v'(0) > 0, \quad f(1) \equiv \alpha_1 v(1) + \beta_1 v'(1) > 0.$$

где $\alpha_0 = b(0); \beta_0 = a'(0); \alpha_1 = b(1); \beta_1 = -a'(1)$. Ясно, что функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[0,1]$. Тем самым, согласно теореме о промежуточном значении непрерывной на множестве $[0,1]$ функции, существует точка x_0 такая, что

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) > 0.$$

Итак, справедлива формула

$$f(x_0) = b(x_0) v_0(x_0) - a'(x_0) v_0'(x_0) > 0,$$

где $x_0 \in (0,1); b(x_0) = \alpha; a'(x_0) = \beta$.

После того, как получен этот результат, нетрудно убедиться, что имеет место следующая цепочка неравенств

$$F(x, v_0, Tw_0)\ |_{x=x_0} = F(x_0, v_0(x_0), Tw_0(x_0)) =$$

$$= -a(x_0)v_0''(x_0) - a'(x_0)v_0'(x_0) + b(x_0)v_0(x_0) \geq -a(x_0)v_0''(x_0) \geq$$

$$\geq -a(x_0)u''(x_0) = F(x, v_0, Tp(u)) \mid_{x=x_0} + \frac{\epsilon}{(1+u^2(x_0))} \geq$$

$$\geq F(x, v_0, Tw_0) \mid_{x=x_0} + \frac{\epsilon}{(1+u^2(x_0))}.$$

Тем самым, в силу условия **(1)** и формул (2.6), приходим к противоречию. Следовательно, $u(x) \geq v_0(x),\ x \in (0,1)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства: $u(x) \leq w_0(x)$. Теорема доказана. □

Замечание 1. При изучении эллиптической краевой задачи (1.7) с оператором L, определяемым согласно (2.1), необходимо заботиться о гладкости решения. Рассмотрим уравнение (1.7), (2.1) с граничным условием Дирихле: $u = 0,\ x \in \partial\Omega,\ \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ и покажем, что в этом случае $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, где $0 < \alpha < 1$. Действительно, поскольку функция $H(x, u, Tu)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$ и ограничена, тогда выполняется включение $u(x) = L^{-1}H(x, u, Tu) \in C^{1+\delta}(\bar{\Omega}),\ 0 < \delta < 1$ и, следовательно, $F(x, u, Tu) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Тем самым, из классического результата [33, теорема 6.14] следует, что $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

В заключительной части этого раздела кратко остановимся на условиях непрерывной обратимости равномерно эллиптического оператора L, задаваемого формулой (2.1). Итак, пусть оператор L определен в ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ и его коэффициенты $a_{ij}(x),\ b_i(x),\ c(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}), c(x) \geq 0$. Введем в рассмотрение банаховы пространства $X = C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}),\ Y = C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, для которых справедливо теоретико-множественное вложение $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Тогда линейный оператор $L : X \to Y$ непрерывно обратим, если $R(L) = Y$, оператор L обратим и $L^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то есть ограничен. Кроме того, если $f(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, тогда первая краевая задача с однородным граничным условием

$$Lu(x) = f(x),\ \ x \in \Omega,\ u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{2.10}$$

имеет единственное классическое решение $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Поэтому, в силу (2.10), достаточно рассматривать оператор L на линейном пространстве

$$U = \{u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}.$$

Теперь предположим, что

$$L_{\lambda}u(x) \equiv Lu(x) + \lambda u(x),\ \lambda \in \bar{\mathbb{R}}^+,$$

где L – оператор, определяемый посредством (2.1). Тогда согласно [34] оператор $L_{\lambda} : C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ является биективным (взаимно однозначным) оператором "на", причем L_{λ}^{-1} принадлежит банахову пространству линейных ограниченных операторов, действующих из $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$

в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, то есть $L_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Более того, из теоремы 6.14 работы [33] следует, что отображение $L_\lambda : U \to C^\alpha(\bar{\Omega})$ обратимо. Причем обратное отображение L_λ^{-1} является компактным (вполне непрерывным) отображением пространства $C^\alpha(\bar{\Omega})$ в пространство $C^2(\bar{\Omega})$. Поэтому L_λ^{-1} является компактным отображением и как отображение $C^\alpha(\bar{\Omega})$ в $C^\alpha(\bar{\Omega})$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$u(x) - \lambda L_\lambda^{-1} u(x) = L_\lambda^{-1} f(x),\ f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \tag{2.11}$$

в котором $L_\lambda^{-1} : C^\alpha(\bar{\Omega}) \to C^\alpha(\bar{\Omega})$ – компактный оператор. Далее, так как оператор L_λ^{-1} отображает пространство $C^\alpha(\bar{\Omega})$ в U, тогда любое решение $u(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ уравнения (2.11) принадлежит также и линейному пространству U. Итак, действуя на уравнение (2.11) оператором L_λ, приходим к краевой задаче

$$Lu(x) = L_\lambda \Big(u(x) - \lambda L_\lambda^{-1} u(x) \Big) = f(x),\ u(x) \in U. \tag{2.12}$$

Причем очевидно, что имеет место взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (2.11) и решениями задачи Дирихле (2.12).

3. Теорема единственности решения краевой задачи

Для доказательства единственности решения исследуемой краевой задачи (2.2), (2.3), введем в рассмотрение линейное уравнение

$$Lu + Mu = F(x, \eta, T\mu) + M\eta \equiv G(x, \eta, \mu), \tag{3.1}$$

где $\eta, \mu \in C[0,1]$. Далее, определим отображение $A : C[0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$, которое ставит в соответствие каждой упорядоченной паре $(\eta, \mu) \in [v_0, w_0] \times [v_0, w_0]$ единственное решение

$$u = A(\eta, \mu); \quad \eta, \mu \in C[0,1], \tag{3.2}$$

краевой задачи (3.1), (2.3).

Утверждение 1. *Пусть A- отображение, определяемое формулой (3.2). Пусть выполнены условия* **(2)**, **(4)**. *Тогда справедливы следующие свойства:*
(a). $v_0 \le A(v_0, w_0), w_0 \ge A(w_0, v_0)$; **(b).** $A(\eta, \mu)$ *не убывает по* η *и не возрастает по* μ; **(c).** A *является* u_0*- положительным.*

Доказательство. **(a).** Пусть $A(v_0, w_0) = v_1$. Покажем, что $v_0 \le v_1$. Действительно, если это неравенство не выполняется, тогда существуют $\epsilon > 0$, $x_0 \in (0,1)$ такие, что для функции $z = v_0 - v_1$, $z(x_0) = \epsilon$, $z'(x_0) = 0$, $z''(x_0) \le 0$. Тем самым, мы приходим к противоречию: $0 \le -a(x_0) z''(x_0) \le M(v_1 - v_0)(x_0) = -M\epsilon$. Свойство **(b)** доказывается аналогичными рассуждениями с использованием условия **(2)**. Наконец, свойство **(c)** непосредственно следует из условия **(4)**. □

Теорема 2. *Пусть для* $F : (0,1)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *выполнены условия* **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**. *Тогда краевая задача (2.2), (2.3) имеет единственное решение* $u(x)$, *принадлежащее порядковому интервалу* $[v_0, w_0]$.

Доказательство. В первую очередь, определим следующим образом:

$$(L+M)v_n = G(x, v_{n-1}, w_{n-1}), \quad L_i v_n = 0,$$
$$\tag{3.3}$$
$$(L+M)w_n = G(x, w_{n-1}, v_{n-1}), \quad L_i w_n = 0,$$

последовательные приближения v_n, w_n, где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда имеет место цепочка неравенств

$$v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0, \tag{3.4}$$

причем $v_n \to u$, $w_n \to u$ равномерно при $n \to \infty$. Пусть $K \subset C[0,1]$ – множество неотрицательных функций. Тогда K образует нормальный конус [22, 23] в пространстве $C[0,1]$. Иначе, существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что

$$||f||_{C[0,1]} \le \alpha ||g||_{C[0,1]},$$

для любых функций $f, g \in C[0,1]$, удовлетворяющих неравенству $0 \le f \le g$. Известно, что всякий порядковый интервал $[v_0, w_0]$ является замкнутым и выпуклым множеством. Однако он не обязан быть ограниченным по норме, если порождающий упорядочение конус не является нормальным. Так как конус K неотрицательных функций из $C[0,1]$ при $\alpha = 1$ является нормальным, тогда $[v_0, w_0]$ будет ограниченным по норме. Другими словами, существует число $c \in \mathbb{R}^+$ такое, что для всех $u \in [v_0, w_0]$ выполняется неравенство $||u||_{C[0,1]} \le c$. Тем самым, всякий порядковый интервал $[v_0, w_0]$ – ограниченное замкнутое и выпуклое множество. Итак, при наделении пространства $C[0,1]$ вещественнозначных непрерывных функций sup – нормой и частичным упорядочением, задаваемым конусом K неотрицательных функций в $C[0,1]$ оператор $A = (L+M)^{-1}$, определяемый формулой (3.2) и удовлетворяющий свойствам (**a**), (**b**), (**c**) согласно [24] является вполне непрерывным. Далее, введем в рассмотрение последовательность

$$v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1}).$$

Тем самым, из утверждения 1 следует, что $v_0 \le v_1 \le w_1 \le w_0$. Теперь, предположим, что выполняется цепочка неравенств: $v_{n-1} \le v_n \le w_n \le w_{n-1}$. Тогда, из свойства **(b)** получим, что

$$v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1}) \le A(v_n, w_{n-1}) \le A(v_n, w_n) = v_{n+1},$$

$$w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1}) \ge A(w_n, v_{n-1}) \ge A(w_n, v_n) = w_{n+1}.$$

и

$$v_{n+1} = A(v_n, w_n) \le A(w_n, w_n) \le A(w_n, v_n) = w_{n+1}.$$

Итак, по индукции следует справедливость (3.4).

Далее, в силу полной непрерывности оператора A множество $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ является относительно компактным (предкомпактным). Тем самым, найдется подпоследовательность $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ такая, что $v_{n_k} \to v^*$. Ясно, что $v_n \le v^* \le w_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $0 \le v^* - v_m \le v^* - v_{n_k}$ для $m > n_k$. Теперь, учитывая, что конус неотрицательных функций в $C[0,1]$ является нормальным, тогда $\| v^* - v_m \| \le \| v^* - v_{n_k} \| \to 0$. Итак, $v_n \to v^*$, $v^* \in [v_0, w_0]$. Совершенно аналогично, можно доказать, что $w_n \to w^*$, $w^* \in [v_0, w_0]$. Далее, поскольку, A – деминепрерывный оператор, тогда $A(v_n, w_n)$ слабо сходится к $A(v^*, w^*)$, то есть $A(v_n, w_n) \rightharpoonup A(v^*, w^*)$. Также, очевидно, что $A(w_n, v_n) \rightharpoonup A(w^*, v^*)$. Таким образом, $v^* = A(v^*, w^*)$ и $w^* = A(w^*, v^*)$, то есть (v^*, w^*) – парная неподвижная точка [24, 35].

Допустим, что $(\bar{v}, \bar{w})$ – другая парная неподвижная точка. Так как $v_0 \le \bar{v} \le w_0$, $v_0 \le \bar{w} \le w_0$,

$$v_1 = A(v_0, w_0) \le A(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \le A(w_0, v_0) = w_1,$$

$$v_1 = A(v_0, w_0) \le A(\bar{w}, \bar{v}) = \bar{w} \le A(w_0, v_0) = w_1,$$

тогда, аналогично, по индукции, можно доказать, что выполняются неравенства

$$v_n \le \bar{v} \le w_n, \ \ v_n \le \bar{w} \le w_n, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Из (3.5), взяв предел, следует, что $v^* \le \bar{v} \le w^*$, $v^* \le \bar{w} \le w^*$. Тем самым, парная неподвижная точка (v^*, w^*) обладает свойством максимальности и минимальности в том смысле, что для любой другой парной неподвижной точки $(\bar{v}, \bar{w})$ выполняются выписанные выше неравенства. Далее, из условия **(3)** и свойства **(c)** имеем, что для всех $\tau \in (0,1)$ справедлива цепочка неравенств

$$A(\tau u, v) - \tau A(u, \tau v) \ge \alpha u_0 \ge \frac{\alpha}{\beta} A(\tau u, v). \tag{3.6}$$

Теперь, определим $\tau_0 = \inf\{\tau > 0 : v^* \ge \tau w^*\}$. Очевидно, что $\tau_0 \le 1$, $v^* \ge \tau_0 w^*$. Пусть $\tau_0 < 1$, тогда с учетом формулы (3.6) и свойства **(b)** получим

$$\tau_0 w^* = \tau_0 A(w^*, v^*) \le \tau_0 A(w^*, \tau_0 w^*) \le (1 - \frac{\alpha}{\beta}) \times$$

$$A(\tau_0 w^*, w^*) \le (1 - \frac{\alpha}{\beta}) A(v^*, w^*) = (1 - \frac{\alpha}{\beta}) v^*,$$

что противоречит определению τ_0. Тем самым, $\tau_0 = 1$. Поскольку по построению $v^* \le w^*$, тогда $v^* = w^* = u$, $u = A(u,u)$. Наконец, из максимального и минимального свойств парной неподвижной точки (v^*, w^*) следует единственность u. Теорема доказана. □

Замечание 2. При изучении эллиптической краевой задачи (1.7), (2.1) с граничным условием Дирихле: $u = 0, x \in \partial\Omega$ вполне непрерывность оператора A следует из оценки функции Грина оператора (2.1)

$$0 \le G(x,y) \le \begin{cases} k|x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ k|\ln|x-y||, & n = 2, \end{cases}$$

полученной в работе [22], где $x \in \bar{\Omega}$; $y \in \Omega$; $x \neq y$; $|x-y|$ – расстояние между точками x, y. В этой же работе доказана u_0 – положительность (свойство **(4)**).

4. Математическая модель баланса плотностей плазмы в установке типа токамак и свойства ее стационарных решений

В общем случае, математическая модель, описывающая эволюционный процесс в тороидальной плазме, обладающей аксиальной симметрией представляет собой двумерную задачу. Однако благодаря существенному различию (на несколько порядков) характерных времен переноса вдоль и поперек магнитных поверхностей ее удается достаточно хорошо описать в рамках одномерных моделей, получивших название транспортных [36]. Их основу составляет система диффузионных уравнений [37], выражающих баланс частиц и энергии плазмы на каждой магнитной поверхности. Причем снижение размерности изучаемой задачи достигается за счет усреднения исследуемых величин и потоков по магнитным поверхностям, отражающего высокую скорость продольного перемещения. Кроме того, отметим, что диффузионные модели идеально приспособлены для изучения эволюции плазмы и полоидального магнитного поля в аксиально-симметричных тороидальных замкнутых конфигурациях типа токамак.

Известно [36], что инжекция в установку токамак (поперек магнитного поля) пучка нейтралов высокой энергии является одним из методов дополнительного нагрева плазмы. Нейтральные частицы не отклоняются магнитным полем и поэтому их пучок легко проникает в плазму. В плазме нейтральные частицы ионизируются, образовавшиеся в результате этого высокоэнергетические ионы захватываются магнитным полем и за счет кулоновского механизма столкновений передают свою энергию электронам и ионам плазмы. Так как время пролета нейтралов поперек плазменного шнура мало по сравнению с характерным временем изменения макроскопических параметров плазмы, то плотность нейтралов в любой момент времени можно считать стационарной. Для медленных процессов эволюции в токамаке при классическом (кулоновском) переносе плазмы преобладающей является ее диффузия поперек магнитного поля. Диффузия плазмы в аксиально-симметричных конфигурациях, в силу законов сохранения, возникает только за счет перекрестных столкновений между электронами и ионами, что автоматически приводит к равенству их диффузионных потоков. Тем самым, в результате столкновений между собой, электроны и ионы будут диффундировать поперек магнитного поля. В итоге, за счет того, что приток высокоэнергетичных ионов, в результате ионизации, может компенсироваться их потерями в связи с наличием областей потерь в токамаке, диффузией плазмы поперек магнитного поля и, наконец, потерями, обусловленными кулоновскими столкновениями, то могут возникать стационарные распределения плотности плазмы. В связи с этим, актуальной является задача об условиях существования таких стационарных состояний и их устойчивости.

Итак, с учетом выше изложенного, рассмотрим простейшую транспортную модель баланса плотностей плазмы и нейтральных частиц в установке типа токамак

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \gamma\rho n - n, \tag{4.1}$$

$$(x\rho_k)_x = (-1)^k x\rho_k n, \;\; \rho = \rho_0 + \rho_1, \; k = 0, 1, \tag{4.2}$$

с начальным $n(x,t)|_{t=0} = n_0(x) \geq 0$ и граничными условиями

$$xn_x|_{x=0} = n|_{x=1} = 0, \tag{4.3}$$

$$x(\rho_0 - \rho_1)|_{x=0} = 0, \;\; \rho_0|_{x=1} = 1. \tag{4.4}$$

Здесь $n(x,t)$- плотность плазмы; $\rho_0(x)$ и $\rho_1(x)$ – плотность летящих со стенок к оси и встречных, соответственно, инжектируемых нейтральных частиц; $\rho(x)$ – полная плотность нейтралов в плазме; x- радиус магнитной поверхности; $\alpha > 0$ – коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля; $\gamma > 0$ – мощность инжекции.

Исследуемая нелинейная начально-краевая задача (4.1)-(4.4) содержит одну пространственную переменную x и соответствует цилиндру с трансляционной и круговой симметриями. Причем трансляционная симметрия отражает аксиальную симметрию исходного тора, а круговая - процедуру усреднения в перпендикулярном сечении. Кроме того, предполагается, что на поверхности, с которой происходит инжекция, задан поток нейтралов, а плотность плазмы равна нулю.

С одной стороны, (4.2) при $k = 0$ запишется

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\rho_0(x,t)) = x\rho_0(x,t)n(x,t),$$

и, как нетрудно убедиться, приводит к зависимости

$$\rho_0(x,t) = \frac{c_0(t)}{x} \cdot \exp\Big(\int_0^x n(s,t)ds\Big).$$

Причем в силу второго из условий (4.4) получим, что

$$c_0(t) = \exp\Big(-\int_0^1 n(s,t)ds\Big),$$

то есть

$$\rho_0(x,t) = \frac{1}{x} \cdot \exp\Big(-\int_0^1 n(s,t)ds\Big)\exp\Big(\int_0^x n(s,t)ds\Big).$$

С другой стороны, (4.2) при $k = 1$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\rho_1(x,t)) = -x\rho_1(x,t)n(x,t).$$

Из этого соотношения непосредственно следует справедливость выражения

$$\rho_1(x,t) = \frac{c_1(t)}{x} \cdot \exp\Big(-\int_0^x n(s,t)ds\Big).$$

Причем в силу первого из условий (4.4) и с учетом вида функции $\rho_0(x,t)$ получим, что

$$c_1(t) = \exp\Big(-\int_0^1 n(s,t)ds\Big),$$

то есть

$$\rho_1(x,t) = \frac{1}{x} \cdot \exp\Big(-\int_0^1 n(s,t)ds\Big)\exp\Big(-\int_0^x n(s,t)ds\Big).$$

Тем самым, имеет место формула

$$\rho(x,t) = \frac{2}{x} \cdot \exp\Big(-\int_0^1 n(s,t)ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x n(s,t)ds\Big).$$

В итоге, справедлив следующий результат.

Утверждение 2. *Исключая из системы (4.1), (4.2), с учетом граничных условий (4.4), функцию ρ приходим к нелокальному параболическому уравнению вида*

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \Big[\frac{2\gamma}{x}e^{-\int_0^1 n(s,t)ds} ch\int_0^x n(s,t)ds - 1\Big]n. \qquad (4.5)$$

Отметим, что в настоящее время теория нелинейных нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными пока еще слабо разработана. В связи с этим, укажем ряд работ [1, 2, 28, 38 – 40] в которых получены важные результаты в этом направлении исследований.

Далее, запишем стационарный аналог уравнения (4.5)

$$-\frac{\alpha}{x}(xnn')' = \left[\frac{2\gamma}{x}e^{-\int_0^1 nds}\mathrm{ch}\int_0^x nds - 1\right]n, \tag{4.6}$$

нагруженного граничными условиями (4.3), который является предметом исследования настоящего раздела, где $n' = \frac{d}{dx}n(x)$.

Итак, рассмотрим краевую задачу (4.6), (4.3)

$$-(xu')' = \lambda(\xi Tu - x)u^{1/2} \equiv \lambda F(x, u, Tu), \tag{4.7}$$

$$xu'|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где $u = n^2; \xi = 2\gamma; \lambda = 2/\alpha;$

$$Tu = \exp\left(-\int_0^1 u^{1/2}ds\right)\mathrm{ch}\left(\int_0^x u^{1/2}ds\right). \tag{4.8}$$

Теперь с использованием теоремы 2 покажем разрешимость исследуемой интегродифференциальной краевой задачи (4.7), (4.8).

Другими словами, построим нижнее и верхнее квазирешения $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$ такие, чтобы выполнялись условия **(1)-(4)**. Итак, осуществим намеченное и в первую очередь покажем, что имеет место следующий результат.

Утверждение 3. *Оператор Tu, определяемый согласно (4.8) является монотонно убывающим, то есть для любых $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1]$, удовлетворяющих условию $0 \le \varphi(x) \le \psi(x)$ справедливо неравенство $T\varphi(x) \ge T\psi(x)$.*

Доказательство. Действительно, так как $0 \le \varphi(x) \le \psi(x)$, тогда приходим к справедливости неравенств

$$\exp\left(\int_0^x \varphi^{1/2}ds\right) \le \exp\left(\int_0^x \psi^{1/2}ds\right),$$

$$\exp\left(-\int_0^x \psi^{1/2}ds\right) \le \exp\left(-\int_0^x \varphi^{1/2}ds\right).$$

Отсюда, очевидно, следует соотношение

$$\exp\left(\int_0^x \varphi^{1/2}ds\right) + \exp\left(-\int_0^x \psi^{1/2}ds\right) \le$$

$$\leq \exp\Big(\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big) + \exp\Big(-\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big).$$

Тем самым, имеет место зависимость

$$\mathrm{sh}\Big(\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big) \leq \mathrm{sh}\Big(\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big).$$

Далее, возводя в квадрат обе части этого неравенства и используя формулу $1+\mathrm{sh}^2(\cdot) = \mathrm{ch}^2(\cdot)$, легко показать, что

$$\mathrm{ch}\Big(\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big) \leq \mathrm{ch}\Big(\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big).$$

Также очевидно, что выполняются следующие соотношения

$$\exp\Big(-\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big) \geq \exp\Big(-\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big),$$

$$\exp\Big(-\int_0^1 \varphi^{1/2} ds\Big) \geq \exp\Big(-\int_0^1 \psi^{1/2} ds\Big).$$

Теперь ясно, что в силу зависимости

$$-\exp\Big(-\int_0^1 \varphi^{1/2} ds\Big) \leq -\exp\Big(-\int_0^1 \psi^{1/2} ds\Big),$$

справедливо представление

$$-\exp\Big(-\int_0^1 \varphi^{1/2} ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big) \leq -\exp\Big(-\int_0^1 \psi^{1/2} ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big).$$

В итоге заключаем, что имеет место неравенство

$$\exp\Big(-\int_0^1 \varphi^{1/2} ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x \varphi^{1/2} ds\Big) \geq \exp\Big(-\int_0^1 \psi^{1/2} ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x \psi^{1/2} ds\Big).$$

Отсюда, в силу формулы (4.8) следует, что $T\varphi(x) \geq T\psi(x)$. Тем самым, исследуемый оператор (4.8) является монотонно убывающим. Помимо этого $0 \leq Tu(x) \leq 1$ для всех $u(x) \in C[0,1]$. Утверждение доказано. $\square$

Итак условие **(1)** выполнено. Далее, так как $F(x,u,z)/u \to 0$ при $u \to \infty$ равномерно по x и z, тогда существует постоянная $a^2 > 0$ такая, что

$$F(x,a^2,z)/a^2 \leq \xi/a \leq 1/\lambda, \tag{4.9}$$

где $z = Tu$. Полагая $w_0 = a^2$ имеем

$$A(w_0,v_0) = \lambda \int_0^1 G(x,s)F(s,w_0,Tv_0)ds \leq$$

$$\leq a^2 \int_0^1 G(x,s)ds \leq a^2 = w_0, \tag{4.10}$$

где $G(x,s)$- функция Грина, соответствующего дифференциального оператора, определяемая формулой

$$G(x,s) = \begin{cases} -\ln x, & s \leq x, \\ -\ln s, & x \leq s. \end{cases} \tag{4.11}$$

Очевидно, что $w_0 = a^2$ будет искомым верхним квазирешением, если $a \geq \xi\lambda$.

Теперь рассмотрим вспомогательную краевую задачу на собственные значения

$$L_0 z \equiv -(xz')' = \eta xz, \;\; 0 < x < 1, \;\; xz'|_{x=0} = z|_{x=1} = 0. \tag{4.12}$$

Хорошо известно [41], что решение $z(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (4.12) имеет вид $z(x) = J_0(\eta_0^{1/2}x)$, где $J_0(\eta_0^{1/2}x)$ – функция Бесселя; $\max J_0 = 1$, $J_0 > 0$ при $x \in [0,1)$; η_0 – главное собственное значение. Причем каждое собственное значение η_0 оператора L_0 является неотрицательным и простым. Кроме того, каждому собственному значению $\eta_0 = \lambda_0^2$ соответствует собственная функция $J_0(\lambda_0 x)$ и справедлива оценка $z(x) = O(1)$ при $x \to 0^+$.

Далее, предположим, что $v_0 = \nu^2 z$, где ν- некоторая постоянная. Тогда учитывая (4.12) приходим к справедливости цепочки неравенств

$$-(xv_0')' - \lambda(\xi T w_0 - x)v_0^{1/2} \leq \eta_0 \nu \left(\nu - \frac{\lambda}{\eta_0}(\xi e^{-a} - 1) \right) \leq 0,$$

при условии, что

$$\nu \leq \lambda(\xi e^{-a} - 1)/\eta_0, \;\; a \leq \ln \xi. \tag{4.13}$$

Итак, если постоянная ν является достаточно малой, тогда $v_0 = \nu^2 J_0(\eta_0^{1/2}x)$- нижнее квазирешение. Так как $F(x,u,Tu) = (\xi Tu - x)u^{1/2}$, то условие **(3)** будет выполнено, если мы покажем, что имеет место соотношение

$$\tau F(x,u,T(\tau u)) - F(x,\tau u, Tu) = (\tau u)^{1/2} f(x,y,z,t) < 0, \tag{4.14}$$

где

$$f(x,y,z,t) = t(\xi e^{-ty}\mathrm{ch}(tz) - x) - (\xi e^{-y}\mathrm{ch}(z) - x); \tag{4.15}$$

$$y = \int_0^1 u^{1/2}ds; \;\; z = \int_0^x u^{1/2}ds; \;\; t = \tau^{1/2}; \;\; y \leq a.$$

С этой целью докажем вспомогательное

Утверждение 4. *Пусть* $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi/(2-\xi)$ *и* x_i *– вещественный корень уравнения*

$$\exp x_i = \xi_i(1 - x_i), \quad i = 1, 2. \tag{4.16}$$

Пусть выполнено одно из условий:

(5) *если* $1 < \xi \le 2/(1-e^{-2})$, *то* $a \le \min\{x_1, x_2/2\}$, *(при* $\xi > 2$, x_2 *– наименьший из корней уравнения (4.16) для* $i = 2$*);*

(6) *если* $\xi > 2/(1-e^{-2})$, *то* $a \le x_1$.

Тогда $f(x,y,z,t) < 0$

Доказательство. Проведем исследование на экстремум функции (4.15). Несложно проверить, что $f_x > 0$; $f_y = f_z = 0$ лишь при $t = 1$; $f(x,y,z,t) \to 0^-$ при $t \to 1^-$. Причем $0 \le z \le y \le a$. В связи с этим $\max f(x,y,z,t) = \max\{f_1(t) = f(1,a,0,t),\ f_2(t) = f(1,a,a,t),\ f_3(t) = f(1,0,0,t)\}$. Сразу же отметим, что $f_3(t) < 0$ при $\xi > 1$. Далее, уравнение $f_1'(t) = 0$, запишется $e^{at} = \xi(1 - at)$, совпадает с (4.16) для $i = 1$ и имеет единственное решение $x_1 = at_1$ при всех $\xi > 1$. Помимо этого, $f_1''(t_1) < 0$. Аналогично, уравнение $f_2'(t) = 0$ запишется $(2-\xi)e^{2at} = \xi(1-2at)$, совпадает с (4.16) для $i = 2$ и при $1 < \xi \le 2$ обладает единственным решением $x_2 = 2at_2$; при $2 < \xi \le 2/(1-e^{-2})$ – двумя решениями $1 < x_2 = 2at_2 < 2 < x_3$ и, наконец, при $\xi > 2/(1-e^{-2})$ не имеет решений. Кроме того, $f_2''(t_2) < 0$. Тем самым, из условий **(5)**, **(6)** следует, что $t_1 \ge 1$, $t_2 \ge 1$. Итак, для всех $t \in (0,1)$, $x \in [0,1]$ и $0 \le z \le y \le a$ имеем $f(x,y,z,t) < 0$. Утверждение доказано. □

Замечание 3. Более того, можно показать, что условия **(5)**, **(6)**, входящие в утверждение 4 являются также и необходимыми для выполнения неравенства
$f(x,y,z,t) < 0$ при всех $t \in (0,1)$, $x \in [0,1]$, $0 \le z \le y \le a$.

Тем самым, с учетом утверждения 4 следует справедливость неравенства (4.14). Отсюда заключаем, что условие **(3)** выполнено.

Далее, поскольку $x_1 = at_1$, $a \le \ln\xi$, тогда из (4.16) для $i = 1$ получаем, что $x_1 \le \ln\xi$, где $\xi > 1$. В итоге, используя утверждение 4, приходим к справедливости цепочки неравенств

$$0 < \xi\exp(-a) - 1 \le \xi Tu - x. \tag{4.17}$$

Так как $F(x,u,Tu) = (\xi Tu - x)u^{1/2}$, то в силу (4.17) непосредственно следует, что свойство **(2)** имеет место при $M = 0$.

Наконец, покажем, что условие **(4)** также выполняется. В связи с этим докажем

Утверждение 5. *Пусть* $y(x) \ge 0$ *для* $x \in [0,1)$ *и* $y(x) \not\equiv 0$. *Тогда существуют* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *такие, что выполняется неравенство*

$$\alpha(1-x) \le \int_0^1 G(x,s)y(s)ds \le \beta(1-x), \tag{4.18}$$

где $G(x,s)$ – функция Грина, определяемая согласно (4.11).

Доказательство. Справедливость этого утверждения будет следовать из леммы 7.1 [22], если мы покажем, что найдется такое $\epsilon = \epsilon([x_1, x_2]) > 0$, что для каждого множества $[x_1, x_2] \subset [0,1]$ положительной меры имеет место неравенство

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \epsilon \int_0^1 G(x,s)ds. \tag{4.19}$$

С одной стороны, пусть $0 \leq x \leq (x_1+x_2)/2$, тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \int_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} G(x,s)ds = -\int_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} \ln s ds =$$

$$= -(s\ln s - s)|_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} = a.$$

С другой стороны, пусть $(x_1+x_2)/2 \leq x \leq 1$, тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} G(x,s)ds = -\ln x \int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} ds =$$

$$= -b\ln x \geq b(1-x).$$

Итак, для всех $x \in [0,1]$, $a > b$ выполняется следующая оценка

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \min\{a, b(1-x)\} = b(1-x) = b\int_0^1 G(x,s)ds,$$

а следовательно и неравенство (4.19). Тем самым, приходим к справедливости соотношения (4.18). Утверждение доказано. □

Ясно, что утверждение 5 означает выполнение условия **(4)**.

В итоге, суммируя полученные результаты, заключаем, что имеет место

Теорема 3. *Пусть $v_0 = \nu^2 J_0(\eta_0^{1/2}x)$, $w_0 = a^2$ – нижнее и, соответственно, верхнее квазирешения, $0 \leq v_0 \leq w_0$. Пусть $a \geq \xi\lambda$, выполняются неравенства (4.13) и постоянная a удовлетворяет условиям утверждения 4. Тогда краевая задача (4.7), (4.8) обладает единственным решением $u(x) \in [v_0, w_0]$, монотонно убывающим по x. Пусть $n(n_0(x),t)$- решение задачи (4.5), (4.3) с начальным условием $n(n_0(x),0) = n_0(x)$, $n_0(x) \in [\nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2}x), a]$, $n_0(x) \in L_+^\infty(0,1)$. Тогда $|x^{1/2}(n(n_0(x),t) - u^{1/2}(x))| \to 0$ равномерно по x при $t \to +\infty$.*

Доказательство следует из теорем **A** и 2. При этом в теореме **A** мы считаем, что $x(u^2)_x \in L_+^\infty(0,1)$. Монотонность стационарного решения

$n(x)$, $\nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2}x) \le n(x) \le a$, следует из оценки (4.17), зависимости $u = n^2$ и принципа максимума.

Итак, получены достаточные условия на параметры ξ, λ, при выполнении которых существует единственное стационарное решение $n(x)$ краевой задачи (4.6), (4.3). Кроме того, в пространстве начальных данных построена область притяжения стационарного решения.

Суммируя результаты этого раздела, сформулируем полезный, как нам представляется, результат.

Утверждение 6. *Пусть выполнены неравенства (4.13) и одно из условий:* **(5)** *или* **(6)***, где x_1, x_2 – корни уравнения (4.16), $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \xi/(2-\xi)$, (в случае $\xi > 2, x_2$ – наименьший из корней уравнения (4.16)). Тогда краевая задача (4.6), (4.3) имеет единственное стационарное решение $n(x), \nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2}x) \le n(x) \le a$, причем $n(x)$ монотонно убывает по x.*

В заключение отметим, что при параметрах $\xi = 2.32$, $\lambda = 0.167$ проведен расчет стационарного распределения плотности плазмы $n(x)$, подтверждающий заключение теоремы 3 и утверждения 6.

Список литературы

1. Carrillo, J.A. On a non-local elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction / J.A Carrilo // Nonliear analysys TMA. — 1998. — V. 32. — P. 97–115.
2. Ferone, A. A topological approach for generalized nonlocal models for a confiner plasma in a tokamak / A. Ferone, M. Jalal, J.Rakotoson, R. Volpicelli // Comm. Appl. Anal. — 2001. — V. 5, N 2. – P. 159–181.
3. Hyman, J. Analysis of nonlinear parabolic equations modelling plasma diffusion across a magnetic field / J. Hyman, P. Rosenau // Lectures in Applied Mathematics. — 1986. — V. 23. — P. 219–245.
4. Rosenau, P. Plasma diffusion across a magnetic field / P. Rosenau, J. Hyman // Phys. D. — 1986. — V. 20. — P. 444–446.
5. Rosenau, P. Long time asymptotic of a system for plasma diffusion / P. Rosenau, E. Turkel // TTSP. — 1987. — V. 16, N 2–3. — P. 377–391.
6. Kwong, Y. Interior and boundary regularity of solutions to a plasma type equation / Y. Kwong // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — V. 104, N 2. — P. 472–478.
7. Bertsch M., A system of degenerate parabolic equations from plasma physics: the large time behavior / M. Bertsch. S. Kamin // SIAM J. Math. Anal. — 2000. — V. 31, N 4. — P. 776–790.
8. Калашников, А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / А.С. Калашников // УМН. — 1987. — Т. 42, N 2. — С. 135–176.
9. Олейник, О.А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации / О.А. Олейник, А.С. Калашников, Чжоу-Юй-Линь.// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1958. — Т. 22, N 5. — С. 667–704.

10. Сабинина, Е.С. Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений / Е.С. Сабинина // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 143, N 4. — С. 794–797.
11. Галактионов, В.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В.А. Галактионов, В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин, С.П. Курдюмов, А.А. Самарский // Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР. — 1987. Т. 28. — С. 95 -205.
12. Самарский, А.А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. — М.: Наука, — 1987.
13. Aronson, D.G. Regularity of flows in porous media: a survey / D.G. Aronson // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States: Springer — 1988. — V. 1, N. V. — P. 35–49.
14. De Mottoni, P. Attractivity properties of nonnegative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems / P. De Mottoni, A. Schiaffino, A. Tesei // Ann. Math. Pura Appl. — 1984. — V. 136. — P. 35–48.
15. Aronson, D.G. Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem / D.G. Aronson, M.G. Crandall, L.A. Peletier// Nonlinear Anal., TMA. — 1982. — V. 6, N 10. — P. 1001–1022.
16. Filo, J. On solutions of a perturbed fast diffusion equation / J. Filo // Aplikace matematicy. — 1987. — V. 32, N 5. — P. 364–380.
17. Aronson, D.G. Large time behavior of solutions of the porous medium equation in bounded domains / D.G. Aronson, L.A. Peletier // J. Differ. Equat. — 1981. — V. 39, N 3. — P. 378–412.
18. Bertsch, M. Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation / M. Bertsch // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — V. 42, N 1. — P. 66–76.
19. Белоносов, В.С. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений / В.С. Белоносов, Т.И. Зеленяк. — Новосибирск: НГУ, — 1975.
20. Зеленяк, Т.И. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа / Т.И. Зеленяк // Матем. сборник. — 1977. — Т. 104, N 3. — С. 486–510.
21. Шестаков, А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А.А. Шестаков. — М.: Наука. — 1990.
22. Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М.: Физматгиз, — 1962.
23. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайнико, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. — М.: Наука, — 1969.
24. Guo, D. Nonlinear problems in abstract cones / D. Guo, V. Lakshmikantham. — London: Academic Press. — 1988.
25. Похожаев, С.И. Об уравнениях вида $\triangle u = f(x, u, Du)$ / С.И. Похожаев // Матем. сборник. — 1980. — Т. 113, N 2. — С. 324–338.
26. Похожаев, С.И. Об эллиптических задачах в R^n с суперкритическим показателем нелинейности / С.И. Похожаев // Матем. сборник. 1991. Т. 182, N 4. С. 467–489.
27. Митидиери, Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных / Э. Митидиери, С.И. Похожаев. — М.: Наука, 2001. — (Тр. МИАН, Т. 234).

28. Митидиери, Э. Лиувиллевы теоремы для некоторых нелинейных нелокальных задач / Э. Митидиери, С.И. Похожаев // Докл. РАН. — 2004. — Т. 399, N 6. — С. 732–736.
29. Bandle, C. A priori estimates and the boundary value of solutions for a problem arising in plasma physics / C. Bandle // Nonl. Anal. TMA. — 1983. — V. 7, N 4. — P. 439–451.
30. Rakotoson, J. Un modéle non local en physique des plasmas: résolution par une méthode de degré topologique / J. Rakotoson // Acta Appl. Math. — 1985. — V. 4, N 1. — P. 1–14.
31. Хатсон, В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. — М.: Мир, — 1983.
32. Куфнер А., Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. — М.: Наука, — 1988.
33. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н.Трудингер. — М.: Наука, — 1989.
34. Крылов, Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера / Н.В. Крылов. — Новосибирск.: Научная книга, — 1998.
35. Guo, D. Coupled fixed points of nonlinear operator with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham //Nonlinear Anal., TMA. — 1987. — V. 11, N 5. — P. 623–632.
36. Днестровский, Ю.Н. Математическое моделирование плазмы / Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костамаров. — М.: Наука, — 1982.
37. Хоган, Дж.Т. Многокомпонентные модели переноса в токамаке // Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез / Дж.Т. Хоган. — М.: Мир, — 1980. — С. 142–177.
38. Маслов, В.П. Об интегальном уравнении $u(x) = F(x) + \int G(x,\xi)u_+^{k/2}(\xi)d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi)d\xi$ / В.П. Маслов // Функц. анализ и его приложения. — 1994. — Т. 28, N 1. — С. 41–50.
39. Похожаев, С.И. Об уравнениях Маслова / С.И. Похожаев // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, N 2. — С. 338-349.
40. Wei, J. On a nonlinear eigenvalue problem / J. Wei, L. Zhang // Ann. Sc. norm. super Pisa. Cl. sci. — 2001. — V. 30, N 1. — P. 41–61.
41. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, — 1981.

G. A. Rudykh

Analysis of the stationary solutions for initial boundary value problem of nonlocal parabolic equation of plasma physics

Abstract. The methods of nonlinear functional analysis, we study the properties stationary solutions of initial-boundary value problem for nonlinear nonlocal second order parabolic equation with implicit degeneration. This equation arises in the mathematical simulation of diffusion limited plasma across the magnetic field and its equilibrium configurations in the installation type tokamak. Problem of stabilization of nonstationary solutions to stationary reduced to study of the solvability of nonlinear boundary value problem with nonlocal (integral) operators. Sufficient conditions parameters studied integrodifferential boundary value problem ensure the existence and uniqueness of its classical solutions, for which structurally built area of attraction.

Keywords: nonlocal parabolic and elliptic equation, classical solution, stabilization, the region of attraction, monotone operator, cone, lower and upper solutions, steam fixed point.

Рудых Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (rydukh@icc.ru)

Gennadii Rudykh, professor, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (rudykh@icc.ru)