Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 51—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.911.5

О решениях дифференциальных включений с импульсной структурой

Д. В. Пономарев
Институт математики, экономики и информатики ИГУ

Аннотация. В статье рассматриваются два класса дифференциальных включений с импульсной структурой. Вначале выделяются включения с аддитивно входящими в правую часть обобщенными функциями, а затем — включения, содержащие в правой части дельта-функцию в качестве коэффициента. Для этих включений определяется структура решений и обосновываются условия их существования.

Ключевые слова: дифференциальное включение; дельта-функция; разрывная траектория; импульсная система.

1. Введение

Теория дифференциальных включений возникла в 30-х годах прошлого века, когда были доказаны теоремы существования решений и описаны их свойства. Однако, теория не нашла в то время широкого применения. Интерес к дифференциальным включениям возник позже при исследовании задач оптимального управления и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В настоящее время теория дифференциальных включений находит широкое применение в различных областях науки и продолжает развиваться, в частности, при исследовании управляемых систем с импульсными воздействиями.

В данной работе рассматриваются два класса дифференциальных включений, позволяющих описать системы с импульсным характером взаимодействия или с импульсным управлением.

Во втором разделе рассматривается более общая постановка задачи (правая часть в качестве слагаемого содержит обобщенную функцию $p(t)$), частным случаем которой являются дифференциальные включения с аддитивно входящими в правую часть дельта-функциями

$$\dot{x} \in F(t, x) + p(t).$$

Для этой задачи вводится понятие решения, и доказывается теорема о его существовании.

Третий раздел содержит некоторые результаты по непрерывным однозначным аппроксимациям включений, которые затем используются для исследования структуры решений дифференциальных включений, содержащих дельта-функцию в качестве коэффициентов

$$\dot{x} \in F(t,x) + \delta(t)G(x).$$

2. Дифференциальные включения с обобщенными функциями, входящими в виде слагаемых

Исследуется общий класс систем, правая часть которых содержит в качестве слагаемого обобщенную функцию

$$\dot{x} \in F(t,x) + p(t). \tag{2.1}$$

Здесь $F(t,x) : [t_0,t_1] \times R^n \to R^n$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями; $p(t)$ — обобщенная производная от некоторой измеримой ограниченной функции $w(t)$. Под $\dot{x}$ подразумевается производная в обобщенном смысле. Если, например, $w(t)$ является функцией Хевисайда, то правая часть включения аддитивно содержит дельта-функцию, которая используется при описании импульсных воздействий на систему.

Под решением включения (2.1) будем понимать измеримую функцию $x(t)$, для которой существует измеримое сечение $v(t) \in F(t, x(t))$ такое, что

$$\dot{x}(t) = v(t) + p(t).$$

Включение (2.1) заменой $x = y + w(t)$ сводится к обыкновенному дифференциальному включению вида

$$\dot{y} \in F_w(t,y), \tag{2.2}$$

где $F_w(t,y) = F(t, y + w(t))$. Тогда при формулировке условий существования решения исходного включения (2.1) могут быть использованы условия существования решения для обычных дифференциальных включений (см., например, [1, с.120]).

Справедлива следующая теорема (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть отображение $F(t,x)$ с выпуклыми компактными значениями удовлетворяет следующим условиям:*

F1) $F(\cdot,x)$ измеримо для каждого фиксированного $x \in R^n$;

F2) $F(t,\cdot)$ полунепрерывно сверху для каждого фиксированного $t \in [t_0,t_1]$;

F3) существует такая суммируемая по Лебегу функция $\alpha(t)$, что

$$\|v(t,x)\| \le \alpha(t)(1+\|x\|)$$

для всех $(t,x) \in [t_0,t_1] \times R^n$ и всех $v(t,x) \in F(t,x)$.

Тогда существует решение задачи (2.1).

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(t,x) + p_\varepsilon(t), \tag{2.3}$$

где про функцию $p_\varepsilon(t)$ известно лишь то, что она равна нулю вне малого интервала $(t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$, и что ее интеграл по любому такому интервалу равен ν. Такие функции будем называть дельтообразными. Они возникают при описании систем, подверженных кратковременному интенсивному воздействию. В механике это могут быть толчки или удары, а также управляющие воздействия. Для дифференциальных уравнений известен предельный переход при $\varepsilon \to +0$ с сохранением значения ν интеграла от $p_\varepsilon(t)$ на любом таком интервале, приводящий к уравнению с δ-функцией Дирака в правой части (см., например, [3, стр.18]). Ниже (в более общей форме) обосновывается аналогичный переход от дифференциального включения (2.3) к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F(t,x) + \nu\delta(t-t_1),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Оно заменой $x = y + \nu\theta(t-t_1)$ сводится к включению вида (2.2) с функцией $w(t) = \nu\theta(t-t_1)$ ($\theta(t)$ — функция Хевисайда).

Рассмотрим последовательность включений

$$\dot{x}_k \in F(t,x_k) + p_k(t), k = 1,2,\dots \tag{2.4}$$

и включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + p(t) \tag{2.5}$$

при следующих предположениях.

1. $p_k(t) = \dot{w}_k(t)$, где функции $w_k(t)$ измеримы и ограничены одной и той же константой для всех $k = 1,2,\dots$, и $w_k(t) \to w(t)$.
2. $p(t) = \dot{w}(t)$.
3. Многозначные отображения $F(t,x)$ и $F_k(t,x)$ для каждого фиксированного $k = 1,2,\dots$ удовлетворяют условиям F1–F3, причем неравенство в условии F3 выполняется с одной и той же функцией $\alpha(t)$ для всех отображений $F(t,x)$ и $F_k(t,x)$.
4. Многозначные отображения F_k удовлетворяют следующему условию: для каждого фиксированного t и для любого открытого множества $V \subset R^n$ такого, что $F(t,x) \subset V$ существует окрестность $U(x)$ точки x и номер N такие, что для всех $k \ge N$ выполняется $F_k(t,U(x)) \subset V$.

Отметим, что отображения $F_k(t,x)$ могут быть однозначными. Тогда включения (2.4) становятся уравнениями. Отметим также, что в качестве $p_k(t)$ могут выступать дельтообразные функции.

Теорема 2. *Пусть для включений (2.4) и (2.5) выполняются условия 1–4. Тогда каждая функция $x(t)$, предельная для какой-либо последовательности решений $x_k(t)$ включений (2.4), является решением включения (2.5).*

3. Дифференциальные включения с дельта-функциями, входящими в правую часть в виде коэффициентов

Пусть $F : [t_0, t_1] \times R^n \to R^n$ и $G : R^n \to R^n$ — многозначные отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

S1) $F(t,x)$ и $G(x)$ являются ограниченными полунепрерывными сверху многозначными отображениями с выпуклыми компактными значениями;

S2) $F(t,x)$ и $G(x)$ удовлетворяют односторонним условиям Липшица по x:

$$\langle x-y, u_1-u_2\rangle \leq l\|x-y\|^2$$

для всех $x, y \in R^n$, $t \in [t_0, t_1]$, $u_1 \in F(t,x)$, $u_2 \in F(t,y)$;

$$\langle x-y, v_1-v_2\rangle \leq l\|x-y\|^2$$

для всех $x, y \in R^n$, $v_1 \in G(x)$, $v_2 \in G(y)$, где $l > 0$ — константа.

Введем в рассмотрение произвольную функцию $\delta_\tau(t)$, удовлетворяющую условиям:

S3) $\delta_\tau(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$;

S4) $\int\limits_{t_0}^{t_1} |\delta_\tau(t)|dt \leq q$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + \delta_\tau(t)G(x) \tag{3.1}$$

и уравнения, на основе которых оно изучается ниже с использованием известных фактов для дифференциальных уравнений с дельта-функциями в коэффициентах,

$$\dot{x} = F_\lambda(t,x) + \delta_\tau(t)G_\lambda(x), \tag{3.2}$$

где $F_\lambda(t,x)$ и $G_\lambda(x)$ — непрерывные однозначные аппроксимации Иосиды для отображений $F(t,x)$ и $G(x)$ соответственно. Решения включения (3.1) и уравнений (3.2) понимаются в обычном смысле как абсолютно непрерывные функции, почти всюду удовлетворяющие (3.1) и (3.2) соответственно.

Лемма 1. *Пусть многозначные отображения $F(t,x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям S1–S2, функции $\delta_\tau(t)$ — условиям S3–S4, и $x_\lambda(t)$, $x_0(t)$ — решения уравнений (3.2) и включения (3.1) соответственно с начальными условиями (t_0,x_0), определенные на отрезке $[t_0,t_1]$. Тогда существуют положительные константы K и λ' такие, что*

$$\|x_\lambda(t)-x_0(t)\| \le K\sqrt{\lambda} \tag{3.3}$$

для всех $t\in[t_0,t_1]$, $\lambda\in(0,\lambda']$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 и замечанием 1 из [4] существуют числа $\lambda'>0$, $L>0$ и $l_1>0$ такие, что для всех $\lambda\in(0;\lambda']$ определены непрерывные отображения $F_\lambda(t,x)$ и $G_\lambda(x)$ (аппроксимации Иосиды) такие, что

1) F_λ и G_λ — непрерывны и ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x с константой $\frac{1}{\lambda}$;

2) выполняются неравенства

$$\langle x-y, F_\lambda(t,x)-u\rangle \le l_1\|x-y\|^2+\lambda L, \tag{3.4}$$

$$\langle x-y, G_\lambda(x)-v\rangle \le l_1\|x-y\|^2+\lambda L \tag{3.5}$$

для всех $u\in F(t,y)$ и $v\in G(y)$.

Обозначим $\Phi_\lambda(t,x)=F_\lambda(t,x)+\delta_\tau(t)G_\lambda(x)$ и $w\in F(t,x)+\delta_\tau(t)G(x)$. Тогда $w=u+\delta_\tau(t)v$, где $u\in F(t,x)$, $v\in G(x)$. Из неравенств (3.4) и (3.5) получаем

$$\begin{gathered}\langle x-y,\Phi_\lambda(t,x)-w\rangle = \langle x-y,(F_\lambda(t,x)-u)+\delta_\tau(t)(G_\lambda(x)-v)\rangle = \\ = \langle x-y,F_\lambda(t,x)-u\rangle+\delta_\tau(t)\langle x-y,G_\lambda(x)-v\rangle \le \\ \le l_1\|x-y\|^2+\lambda L+\delta_\tau(t)(l_1\|x-y\|^2+\lambda L) = \\ = l_1\|x-y\|^2(1+\delta_\tau)+L\lambda(1+\delta_\tau).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Положим $y(t)=x_\lambda(t)-x_0(t)$ и $\xi(t)=\frac{1}{2}\|y(t)\|^2$. Тогда $\dot\xi(t)=\langle y(t),\dot y(t)\rangle$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$, и из неравенства (3.6) получаем

$$\dot\xi(t)\le 2l_1\xi(t)(1+\delta_\tau(t))+L\lambda(1+\delta_\tau(t)). \tag{3.7}$$

Обозначим $f(t)=2l_1(1+\delta_\tau(t))$, $g(t)=L(1+\delta_\tau(t))$ и перепишем (3.7) в виде

$$\dot\xi\le f(t)\xi(t)+\lambda g(t).$$

Отметим, что $\xi(t_0)=0$.Решение $z(t)$ уравнения $\dot z=f(t)z(t)+\lambda g(t)$ с начальными условиями $z(t_0)=0$ запишется в виде

$$z(t)=e^{\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda g(s)e^{-\int\limits_{t_0}^{s} f(v)dv}ds,$$

откуда получаем

$$z(t) \le \lambda e^{\int\limits_{t_0}^{t_1} |2l_1(1+\delta_\tau(s))| ds} \int\limits_{t_0}^{t_1} L(1+\delta_\tau(s)) e^{\int\limits_{t_0}^{t_1} |2l_1(1+\delta_\tau(v))| dv} ds \le$$

$$\le \lambda e^{4l_1(t_1-t_0+q)} L(t_1 - t_0 + q).$$

Обозначим $K^2 = L(t_1 - t_0 + q)e^{4l_1(t_1-t_0+q)}$. Тогда из дифференциальных неравенств с учетом $z(t_0) = \xi(t_0) = 0$ получаем $\xi(t) \le z(t) \le \lambda K^2$, откуда и следует (3.3). □

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in F(t,x) + \delta(t)G(x), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $t_0 < 0 < t_1$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $F(t,x)$ и $G(x)$ удовлетворяют условиям S1–S2.

В теории обобщенных функций произведение $\delta(t)G(x)$ не определено. В связи с этим необходимо уточнение характера перехода, приведшего к рассмотрению этой задачи. В данной работе (3.8) понимается как формальная запись для предела последовательности задач

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in F(t,x) + \delta_i(t)G(x), i = 1,2,\ldots, \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

в том смысле, что под решением (3.8) понимается предел последовательности решений этих включений. Здесь $\delta_i(t)$ образуют последовательность непрерывных неотрицательных функций, удовлетворяющую следующим условиям:

D1) $\delta_i(t) = 0$ для любых $t \notin (\alpha_i, \beta_i)$, где $\alpha_i, \beta_i \to 0$ при $i \to +\infty$;

D2) $\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} |\delta_i(t)| dt \le q$, для любого $i = 1, 2, \ldots$, где q — некоторая фиксированная константа;

D3) $\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} \delta_i(t) dt \to 1$ при $i \to +\infty$.

Введем вспомогательные задачи

$$\dot{u} \in F(t,u), u(t_0) = x_0, t \in [t_0, 0] \tag{3.10}$$

$$\dot{v} \in G(v), v(0) = u(0), t \in [0,1] \tag{3.11}$$

$$\dot{w} \in F(t,w), w(0) = v(1), t \in [0, t_1]. \tag{3.12}$$

Тогда структуру решений включения (3.8) определяет следующая

Теорема 3. *Пусть многозначные отображения $F(t,x)$ и $G(x)$ удовлетворяют условиям S1–S2, функции $\delta_i(t)$ — условиям D1–D3. Тогда для любой последовательности решений $x_i(t)$ задач (3.9) при $i \to +\infty$ имеет место:*

$$\begin{array}{l} x_i(t) \to u(t), t_0 \le t < 0 \\ x_i(t) \to w(t), 0 < t \le t_1 \end{array}$$

где $u(t)$ и $w(t)$ — решения включений (3.10) и (3.12) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим последовательность задач

$$\begin{array}{l} \dot{x}_i = F_\lambda(t,x_i) + \delta_i(t) G_\lambda(x_i), \\ x_i(t_0) = x_0 \end{array} \tag{3.13}$$

и вспомогательные задачи

$$\begin{array}{l} \dot{u}^\lambda = F_\lambda(t,u^\lambda), \\ u^\lambda(t_0) = x_0, t_0 \le t \le 0; \end{array} \tag{3.14}$$

$$\begin{array}{l} \dot{v^\lambda} = G_\lambda(v^\lambda), \\ v^\lambda(0) = u^\lambda(0), 0 \le t \le 1. \end{array} \tag{3.15}$$

$$\begin{array}{l} \dot{w}^\lambda = F_\lambda(t,w^\lambda), \\ w^\lambda(0) = v^\lambda(1), 0 \le t \le t_1; \end{array} \tag{3.16}$$

Из теоремы 3 [3, стр.36] получаем, что для любого фиксированного λ при $i \to +\infty$

$$\begin{array}{l} x_i^\lambda(t) \to u^\lambda(t), t_0 \le t < 0, \\ x_i^\lambda(t) \to w^\lambda(t), 0 < t \le t_1, \end{array} \tag{3.17}$$

где $u^\lambda(t)$ и $w^\lambda(t)$ — решения уравнений (3.14) и (3.16) соответственно.

В силу леммы 1

$$\|x_i(t) - x_i^\lambda(t)\| \le K\sqrt{\lambda}, \forall i = 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\lambda > 0$ таким, что $K\sqrt{\lambda} < \varepsilon/3$. Тогда для любого $t \in [t_0, 0)$ из (3.17) существует номер N такой, что

$$\|x_i^\lambda(t) - u^\lambda(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.19}$$

для всех $i \ge N$. Из [4] вытекает, что

$$\|u^\lambda(t) - u(t)\| \le K\sqrt{\lambda} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.20}$$

для всех $t \in [t_0, 0]$, где $u(t)$ — решение дифференциального включения (3.10).

Теперь из (3.18)–(3.20) получаем

$$\|x_i(t) - u(t)\| \le \|u(t) - u^\lambda(t)\| + \|u^\lambda(t) - x_i^\lambda(t)\| + \|x_i^\lambda(t) - x_i(t)\| < \varepsilon$$

для всех $i \geq N$ при произвольном фиксированном $t \in [t_0, 0)$.

Следовательно $x_i(t) \to u(t)$ при $i \to +\infty$ для любого фиксированного $t \in [t_0, 0)$.

Пусть $v^\lambda(t)$ — решение дифференциального уравнения (3.15) и $v(t)$ — решение включения (3.11). Положим $y(t) = (v^\lambda(t) - v^\lambda(0)) - (v(t) - v(0))$ и $\xi(t) = \frac{1}{2}\|y(t)\|^2$. Тогда $\dot{\xi}(t) = \langle y(t), \dot{y}(t)\rangle$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Пусть $g(t) \in G(v(t))$, тогда

$$\dot{\xi}(t) = \langle (v^\lambda(t) - v^\lambda(0)) - (v(t) - v(0)), G_\lambda(v^\lambda(t)) - g(t)\rangle =$$
$$= \langle v^\lambda(t) - v(t), G_\lambda(v^\lambda(t)) - g(t)\rangle - \langle v^\lambda(0) - v(0), G_\lambda(v^\lambda(t)) - g(t)\rangle.$$

В силу ограниченности многозначного отображения $G(v)$ имеет место оценка $\langle v^\lambda(0) - v(0), G_\lambda(v^\lambda(t)) - g(t)\rangle \leq C_1\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2$, где C_1 — некоторая положительная константа. Из неравенства (3.5) следует $\langle v^\lambda(t) - v(t), G_\lambda(v^\lambda(t)) - g(t)\rangle \leq l_1\|v^\lambda(t) - v(t)\|^2 + \lambda L$. В итоге получаем следующее неравенство

$$\dot{\xi}(t) \leq l_1\|v^\lambda(t) - v(t)\|^2 + \lambda L + C_1\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2 =$$
$$= 2l_1\xi(t) + \lambda L + C_1\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2.$$

Так как $\xi(t_0) = 0$, то в силу леммы Гронуолла-Беллмана (см. [5, с.11]) получаем

$$\xi(t) \leq \int_0^t e^{2l_1(t-s)}(\lambda L + C_1\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2)ds \leq$$
$$\leq (\lambda L + C_1\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2)\int_0^1 e^{2l_1(t-s)}ds,$$

откуда следует, что

$$\|v^\lambda(t) - v(t)\|^2 \leq C_0\|v^\lambda(0) - v(0)\|^2 + K_0\lambda. \tag{3.21}$$

Учитывая начальные условия $v^\lambda(0) = u^\lambda(0)$ и $v(0) = u(0)$ и неравенство (3.21), получаем

$$\|v^\lambda(t) - v(t)\| \leq K_1\sqrt{\lambda}$$

для всех $t \in [0, 1]$. Тогда для решений $w^\lambda(t)$ уравнений (3.16) и решения $w(t)$ включения (3.12) имеем

$$\|w^\lambda(t) - w(t)\| \leq K_2\sqrt{\lambda}$$

для всех $t \in [0, t_1]$. Следовательно, аналогично предыдущему, для любого $\varepsilon > 0$ существуют λ' и натуральное число N такие, что

$$\|x_i(t) - w(t)\| \leq \|w(t) - w^\lambda(t)\| + \|w^\lambda(t) - x_i^\lambda(t)\| + \|x_t^\lambda(t) - x_i\| < \varepsilon$$

для всех $i \geq N$ и $\lambda \in (0, \lambda']$ при любом фиксированном $t \in (0, t_1]$. □

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x) + \delta(t)G_\lambda(x), \tag{3.22}$$

где $F_\lambda(t, x)$ и $G_\lambda(x)$ — непрерывные однозначные аппроксимации Иосиды многозначных отображений $F(t, x)$ и $G(x)$. Согласно [3, c.37] понятие решения для (3.22) не является однозначно определенным и должно учитывать характер предельного перехода, приводящего к рассмотрению этого уравнения. Под решением можно, например, понимать (см. теорему 3 из [3, c.36]) функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнениям (3.14)–(3.16). Отметим, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x)$$

при $t \neq 0$, а в точке $t = 0$ терпит разрыв со скачком, который определяется уравнением (3.15). Это уравнение называется предельным.

Следствие 1. *Пусть для многозначных отображений $F(t, x)$ и $G(x)$ выполнены условия S1–S2, и $x(t)$, $x_\lambda(t)$ — решения задач (3.8), (3.22) соответственно. Тогда существуют положительные константы λ' и K такие, что*

$$\|x(t) - x_\lambda(t)\| \leq K\sqrt{\lambda} \tag{3.23}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$, $t \neq 0$ и для всех $\lambda \in (0, \lambda']$.

Неравенство (3.23) вытекает из неравенства (3.18) и теоремы 3 при $i \to +\infty$ при каждом фиксированном $t \neq 0$.

4. Заключение

Дифференциальные уравнения с дельта-функциями в коэффициентах впервые рассматривались в работе [6]. Как видно из теоремы 3, для включения (3.8) может быть введено предельное дифференциальное включение (3.11), которое определяет условие скачка. Согласно лемме 1 решения последовательности допредельных включений (3.9) могут быть аппроксимированы решениями уравнений (3.13). Из следствия 1 вытекает, что это утверждение справедливо и для решений уравнений (3.22) и решения включения (3.8).

Автор благодарит И.А. Финогенко за предложенные задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Обуховский, В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / В. В. Обуховский, Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис. – М.: КомКнига, 2005. – 256 с.
2. Пономарев, Д.В. О разрывных системах управления с обобщенными функциями / Д. В. Пономарев, И. А. Финогенко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – № 4. – С. 36-40.
3. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов.– М.: Наука, 1985. – 224 с.
4. Финогенко, И.А. О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно непрерывной правой частью / И. А. Финогенко // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т.41, № 5.– С. 647–655.
5. Трубников, Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю. В. Трубников, А. И. Перов. – Минск: Наука и техника, 1986. – 150 с.
6. Kurzweil, J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czechosl. Math. Journ. – 1958. – Vol. 8, № 3. – P. 360–588.

D. V. Ponomariov

On solutions of differential inclusions with impulse structure

Abstract. Two types of differential inclusions with impulse structure are considered in this article. First inclusions with delta-functions as summands and then others with delta-functions as coefficients are distinguished. Structure of solutions for these inclusions is determined and conditions for existence of the solutions are proved.

Keywords: differential inclusion; delta-function; discontinuous trajectories; impulse system.

Пономарев Денис Викторович, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, б. Гагарина, 20 (zmeigo.sc@gmail.com)

Denis Ponomariov, post-graduate student, Institute of Mathematics, Economics and Information Science, Irkutsk State University, 20, Gagarin Blvd., Irkutsk, 664003 (zmeigo.sc@gmail.com)